УДК 517.1 : 512.816

Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения

Богданова Р.А.

Рассматривается задача о нахождении локальных групп всех движний двумерных гельмгольцевых геометрий, которая сводится к решению функциональных уравнений.

Ключевые слова: феноменологически симметричная геометрия, группа движений, функциональное уравнение.

Целью исследования является нахождение локальных групп всех движений как решений функционального уравнения. Определение множества всех движений плоскости, сохраняющих метрическую функцию, приводит к разработке чисто аналитических методов решения соответствующих функциональных уравнений, что является актуальным, поскольку в теории функциональных уравнений известно мало общих методов их решения.

Геометрия на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ обычно задается гладкой невырожденной метрической функцией $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$, которая паре точек $< ij > \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ сопоставляет число $f(ij) \in R$ как расстояние между ними в некотором обобщенном смысле. В локальной системе координат (x, y) эта функция имеет следующее представление:

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \tag{1}$$

Феноменологическая симметрия такой двумерной геометрии означает, что для четверки точек $< ijkl > \in \mathfrak{M}^4$ шесть взаимных расстояний между ними связаны уравнением

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)) = 0, \tag{2}$$

существование которого может быть установлено по рангу функциональной матрицы

$$\left\| \frac{\partial(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl))}{\partial(x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l)} \right\|.$$

Определение. *Гладкое локально взаимно одназначное (обратимое) отображение*

$$x^{/} = \lambda(x, y), \quad y^{/} = \sigma(x, y), \tag{3}$$

удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial(\lambda,\sigma)}{\partial(x,y)} \neq 0, \tag{4}$$

называется движением, если оно сохраняет метрическую функцию:

$$f(\lambda(i),\sigma(i),\lambda(j),\sigma(j)) = f(x_i,y_i,x_j,y_j), \tag{5}$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$.

Равенство (5) есть функциональное уравнение на множество всех движений, которое является группой, определяющей групповую симметрию данной геометрии.

Полная классификация феноменологически симметричных двумерных геометрий впервые была построена Г.Г. Михайличенко [1] в 1981 году. Наряду с хорошо известными геометриями, такими как плоскость Евклида, плоскость Минковского, двумерная сфера и другие, в этой классификации присутствуют не известные ранее двумерные геометрии гельмгольцевого типа, в которых окружность не имеет привычного образа. Например, для одной из них окружностью является логарифмическая спираль, о которой говорил Г.Гельмгольц [2].

Для трех возможных гельмгольцевых геометрий запишем координатное представление задающих их метрических функций:

1) плоскость Гельмгольца:

$$f(ij) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)\exp(2\gamma \operatorname{arctg}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}), \tag{6}$$

где $\gamma > 0$;

2) псевдогельмгольцева плоскость:

$$f(ij) = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2)\exp(2\beta ar(c)\operatorname{th}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}), \tag{7}$$

где $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$;

3) дуальногельмгольцева плоскость:

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2\exp(2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}). \tag{8}$$

В настоящей работе для трех гельмгольцевых геометрий, задаваемых метрическими функциями (6), (7), (8), находятся локальные группы всех движений как решение функционального уравнения (5). Заметим, что условие гладкости и обратимости преобразований (3) совершенно естественно. Линейность же их не предполагается, а устанавливается как следствие в процессе решения уравнения (5) отдельно для каждой двумерной гельмгольцевой геометрии.

Сначала рассмотрим плоскость Гельмгольца, задаваемую метрической функцией (6). Явный вид уравнения (2) для нее неизвестен, однако его существование подтверждается рангом соответствующей функциональной матрицы, который равен пяти [3].

Преобразование (3) сохраняет метрическую функцию (6):

$$((\lambda(i)-\lambda(j))^2+(\sigma(i)-\sigma(j))^2)\exp(2\gamma\operatorname{arctg}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{\lambda(i)-\lambda(j)})=$$

$$=((x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2)\exp(2\gamma\operatorname{arctg}\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}). \tag{9}$$

Равенство (9) является функциональным уравнением на множество движений (3).

Теорема 1. *Множество всех движений плоскости Гельмгольца есть трехпараметрическая группа её преобразований*

$$x^/ = ax-by+c, \quad y^/ = bx+ay+d, \tag{10}$$

где $(a^2+b^2)\exp(2\gamma\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a})=1.$

Обычный метод решения функциональных уравнений типа (9) состоит в сведении их к алгебраическим и дифференциальным уравнениям.

Продифференцируем уравнение (9) по координатам точки j и разделим на него результаты дифференцирования:

$$\left.\begin{array}{c}
(\lambda_x(j)+\gamma\sigma_x(j))\dfrac{\lambda(i)-\lambda(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2+(\sigma(i)-\sigma(j))^2}+\\
+(\sigma_x(j)-\gamma\lambda_x(j))\dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2+(\sigma(i)-\sigma(j))^2}=\dfrac{(x_i-x_j)-\gamma(y_i-y_j)}{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2},\\
(\lambda_y(j)+\gamma\sigma_y(j))\dfrac{\lambda(i)-\lambda(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2+(\sigma(i)-\sigma(j))^2}+\\
+(\sigma_y(j)-\gamma\lambda_y(j))\dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2+(\sigma(i)-\sigma(j))^2}=\dfrac{(x_i-x_j)\gamma+(y_i-y_j)}{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}.
\end{array}\right\}$$

Полученные два равенства рассмотрим как систему алгебраических уравнений относительно дробей

$$\frac{\lambda(i)-\lambda(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2+(\sigma(i)-\sigma(j))^2}, \quad \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2+(\sigma(i)-\sigma(j))^2}.$$

Определитель этой системы

$$\triangle(j)=\begin{vmatrix}\lambda_x(j)+\gamma\sigma_x(j) & \sigma_x(j)-\gamma\lambda_x(j)\\ \lambda_y(j)+\gamma\sigma_y(j) & \sigma_y(j)-\gamma\lambda_y(j)\end{vmatrix}=(1+\gamma^2)\frac{\partial(\lambda(j),\sigma(j))}{\partial(x_j,y_j)}$$

вследствие условия (4) отличен от нуля и поэтому она может быть решена методом Крамера:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\lambda(i)-\lambda(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2+(\sigma(i)-\sigma(j))^2}=\frac{\sigma_y(j)-\gamma\lambda_y(j)+\gamma(\sigma_x(j)-\gamma\lambda_x(j))}{\triangle\ (j)}\times\\
&\times\frac{x_i-x_j}{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}-\frac{\gamma(\sigma_y(j)-\gamma\lambda_y(j))+\sigma_x(j)-\gamma\lambda_x(j)}{\triangle\ (j)}\frac{y_i-y_j}{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2},\\
&\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2+(\sigma(i)-\sigma(j))^2}=\frac{\gamma(\lambda_x(j)+\gamma\sigma_x(j))-\lambda_y(j)-\gamma\sigma_y(j)}{\triangle\ (j)}\times\\
&\times\frac{x_i-x_j}{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}+\frac{\gamma(\lambda_y(j)+\gamma\sigma_y(j))+\lambda_x(j)+\gamma\sigma_x(j)}{\triangle\ (j)}\frac{y_i-y_j}{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Для сокращения последующего изложения запишем решения (11) в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\lambda(i)-\lambda(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2+(\sigma(i)-\sigma(j))^2}&=\frac{au}{u^2+\vartheta^2}+\frac{g\vartheta}{u^2+\vartheta^2},\\
\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2+(\sigma(i)-\sigma(j))^2}&=\frac{bu}{u^2+\vartheta^2}+\frac{h\vartheta}{u^2+\vartheta^2},
\end{aligned}\right\} \tag{11$'$}$$

введя следующие обозначения переменных:

$$u=x_i-x_j,\quad \vartheta=y_i-y_j \tag{12}$$

и коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned}
a&=\frac{\sigma_y(j)-\gamma\lambda_y(j)+\gamma(\sigma_x(j)-\gamma\lambda_x(j))}{\triangle\ (j)},\quad b=\frac{\gamma(\lambda_x(j)+\gamma\sigma_x(j))-\lambda_y(j)-\gamma\sigma_y(j)}{\triangle\ (j)},\\
g&=-\frac{\gamma(\sigma_y(j)-\gamma\lambda_y(j))+\sigma_x(j)-\gamma\lambda_x(j)}{\triangle\ (j)},\quad h=\frac{\gamma(\lambda_y(j)+\gamma\sigma_y(j))+\lambda_x(j)+\gamma\sigma_x(j)}{\triangle\ (j)}.
\end{aligned}\right\}$$

Согласно этим обозначениям переменные u,ϑ независимы, а коэффициенты a,b,g,h могут зависеть от координат точки j, причем легко проверяетя, что

$$ha-bg\neq 0. \tag{13}$$

Из решений (11$'$) найдем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2+(\sigma(i)-\sigma(j))^2}&=\frac{(au+g\vartheta)^2+(bu+h\vartheta)^2}{(u^2+\vartheta^2)^2},\\
\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{\lambda(i)-\lambda(j)}&=\frac{bu+h\vartheta}{au+g\vartheta},
\end{aligned}\right\}, \tag{14}$$

которые подставим в исходное функциональное уравнение (9):

$$\exp(2\gamma\operatorname{arctg}\frac{bu+h\vartheta}{au+g\vartheta})=\frac{(au+g\vartheta)^2+(bu+h\vartheta)^2}{u^2+\vartheta^2}\exp(2\gamma\operatorname{arctg}\frac{\vartheta}{u}),$$

откуда после простых преобразований получаем тождество

$$2\gamma \operatorname{arctg} \frac{bu^2 + (h-a)u\vartheta - g\vartheta^2}{u^2 + (g+b)u\vartheta + h\vartheta^2} =$$

$$= \ln \frac{(a^2+b^2)u^2 + 2(ag+bh)u\vartheta + (g^2+h^2)\vartheta^2}{u^2+\vartheta^2}. \tag{15}$$

Далее тождество (15) продифференцируем по переменной u:

$$\frac{\gamma(2(bh+ga)u\vartheta^2 + (bg-ha+b^2+a^2)u^2\vartheta + (h^2-ha+g^2+bg)\vartheta^3)}{(a^2+b^2)u^4 + 2(bh+ga)(u\vartheta^3+\vartheta u^3) + (a^2+b^2+g^2+h^2)u^2\vartheta^2 + (g^2+h^2)\vartheta^4} =$$
$$= \frac{(ag+bh)\vartheta^3 + (a^2+b^2-g^2-h^2)u\vartheta^2 - (ag+bh)u^2\vartheta}{(a^2+b^2)u^4 + 2(bh+ga)(u\vartheta^3+\vartheta u^3) + (a^2+b^2+g^2+h^2)u^2\vartheta^2 + (g^2+h^2)\vartheta^4},$$

после чего убираем общий знаменатель и приводим подобные слагаемые:

$$\begin{gathered}(2\gamma(bh+ga) - (a^2+b^2-g^2-h^2))u\vartheta^2 + \\ +((bg-ha+b^2+a^2)\gamma + (ag+bh))\vartheta u^2 + \\ +(\gamma(h^2-ha+g^2+bg) - (ag+bh))\vartheta^3 = 0.\end{gathered} \tag{16}$$

Следствием тождества (16) являются связи между коэффициентами выражений (14):

$$2\gamma(bh+ga) - (a^2+b^2-g^2-h^2) = 0,$$

$$(bg-ha+b^2+a^2)\gamma + (ag+bh) = 0,$$

$$\gamma(h^2-ha+g^2+bg) - (ag+bh) = 0,$$

которые выполняются одновременно с неравенством (13). Вычтем из второй связи третью и подставим результат в первую:

$$bh + ag = 0.$$

Из первой связи тогда получаем

$$a^2 + b^2 - g^2 - h^2 = 0.$$

Если сложить вторую связь с третьей, то с учетом $ha - bg \neq 0$ получим:

$$a^2 + b^2 + g^2 + h^2 = 2(ha - bg) \neq 0.$$

В результате полученные выше три связи примут следующий вид:

$$bh + ag = 0, \quad a^2+b^2-g^2-h^2 = 0, \quad a^2+b^2+g^2+h^2 = 2(ha-bg) \neq 0.$$

Подставим вторую из них в первое из выражений (14):

$$\frac{1}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2 + (\sigma(i)-\sigma(j))^2} = \frac{a^2+b^2}{(x_i-x_j)^2 + (y_i-y_j)^2},$$

с учетом чего из решений ($11^/$) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(i)-\lambda(j) &= \frac{a}{a^2+b^2}(x_i-x_j)-\frac{b}{a^2+b^2}(y_i-y_j), \\ \sigma(i)-\sigma(j) &= \frac{b}{a^2+b^2}(x_i-x_j)+\frac{a}{a^2+b^2}(y_i-y_j). \end{aligned}\right\} \qquad (11^{//})$$

Дифференцируя результаты ($11^{//}$) по координатам точки i, разделим переменные:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_x(i) &= \frac{a(j)}{a(j)^2+b(j)^2} = const = a, \\ \sigma_x(i) &= \frac{b(j)}{a(j)^2+b(j)^2} = const = b. \end{aligned}\right\}$$

Введение новых констант a и b позволяет в выражениях ($11^{//}$) осуществить дополнительное разделение переменных:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(i)-ax_i+by_i &= \lambda(j)-ax_j+by_j = const = c, \\ \sigma(i)-bx_i-ay_i &= \sigma(j)-bx_j-ay_j = const = d, \end{aligned}\right\}$$

то есть

$$\lambda(x,y)=ax-by+c, \quad \sigma(x,y)=bx+ay+d. \qquad (17)$$

Дополнительная связь на константы выражений (17) возникает при их подстановке в исходное функциональное уравнение (9):

$$(a^2+b^2)\exp(2\gamma \operatorname{arctg}\frac{b}{a})=1. \qquad (18)$$

Функции (17) со связью (18) как полное решение функционального уравнения (9) по формулам (3) определяют трехпараметрическое множество всех движений (10) плоскости Гельмгольца. Это множество является локальной группой по композиции движений, причем выполнение всех аксиом группы [4] легко проверяется. Теорема полностью доказана.

Дополнительно отметим, что метрическая функция (6) является двухточечным инвариантом группы преобразований (10). С другой стороны, каждый такой инвариант $f(ij)=f(x_i,y_i,x_j,y_j)$ является решением функционального уравнения $f(i^/j^/)=f(ij)$ для группы преобразований (10). Общее решение этого уравнения

$$f(ij)=\chi[((x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2)\exp(2\gamma \operatorname{arctg}\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j})]$$

совпадает с метрической функцией (6) с точностью до масштабного преобразования $\chi^{-1}(f)\to f$.

Далее определим множество всех движений псевдогельмгольцевой плоскости, задаваемой метрической функцией (7).

Запишем функциональное уравнение на множества движений (3):

$$((\lambda(i)-\lambda(j))^2-(\sigma(i)-\sigma(j))^2)\exp(2\beta ar(c)th\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{\lambda(i)-\lambda(j)})=$$

$$=((x_i-x_j)^2-(y_i-y_j)^2)\exp(2\beta ar(c)th\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}), \tag{19}$$

Теорема 2. *Множество всех движений псевдогельмгольцевой плоскости есть трехпараметрическая группа её преобразований*

$$x^{/}=ax+by+c,\quad y^{/}=bx+ay+d, \tag{20}$$

где $(a^2-b^2)\exp(2\beta ar(c)th\frac{b}{a})=1$.

Дифференцируя уравнение (19) по координатам точки j и деля на него результаты дифференцирования получаем два равенства:

$$\left.\begin{array}{c}(\lambda_x(j)+\beta\sigma_x(j))\dfrac{\lambda(i)-\lambda(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2-(\sigma(i)-\sigma(j))^2}-\\ -(\sigma_x(j)+\beta\lambda_x(j))\dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2-(\sigma(i)-\sigma(j))^2}=\dfrac{(x_i-x_j)-\beta(y_i-y_j)}{(x_i-x_j)^2-(y_i-y_j)^2},\\ (\lambda_y(j)+\beta\sigma_y(j))\dfrac{\lambda(i)-\lambda(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2-(\sigma(i)-\sigma(j))^2}-\\ -(\sigma_y(j)+\beta\lambda_y(j))\dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2-(\sigma(i)-\sigma(j))^2}=\dfrac{\beta(x_i-x_j)-(y_i-y_j)}{(x_i-x_j)^2-(y_i-y_j)^2}.\end{array}\right\}, \tag{21}$$

которые рассмотрим как систему алгебраических уравнений относительно дробей

$$\frac{\lambda(i)-\lambda(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2-(\sigma(i)-\sigma(j))^2},\quad \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2-(\sigma(i)-\sigma(j))^2}.$$

Поскольку определитель системы (21)

$$\triangle\ (j)=\begin{vmatrix}\lambda_x(j)+\beta\sigma_x(j) & -(\sigma_x(j)+\beta\lambda_x(j))\\ \lambda_y(j)+\beta\sigma_y(j) & -(\sigma_y(j)+\beta\lambda_y(j))\end{vmatrix}=(\beta^2-1)\frac{\partial(\lambda(j),\sigma(j))}{\partial(x_j,y_j)}$$

вследствие $\beta\neq 1$ и условия (4) отличен от нуля, она может быть решена методом Крамера:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\lambda(i)-\lambda(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2-(\sigma(i)-\sigma(j))^2}=\dfrac{\beta(\sigma_x(j)+\beta\lambda_x(j))-(\sigma_y(j)+\beta\lambda_y(j))}{\triangle\ (j)}\times\\ \times\dfrac{x_i-x_j}{(x_i-x_j)^2-(y_i-y_j)^2}+\dfrac{\beta(\sigma_y(j)+\beta\lambda_y(j))-(\sigma_x(j)+\beta\lambda_x(j))}{\triangle\ (j)}\dfrac{y_i-y_j}{(x_i-x_j)^2-(y_i-y_j)^2},\\ \dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2-(\sigma(i)-\sigma(j))^2}=\dfrac{\beta(\lambda_x(j)+\beta\sigma_x(j))-(\lambda_y(j)+\beta\sigma_y(j))}{\triangle\ (j)}\times\\ \times\dfrac{x_i-x_j}{(x_i-x_j)^2-(y_i-y_j)^2}+\dfrac{\beta(\lambda_y(j)+\beta\sigma_y(j))-(\lambda_x(j)+\beta\sigma_x(j))}{\triangle\ (j)}\dfrac{y_i-y_j}{(x_i-x_j)^2-(y_i-y_j)^2}.\end{array}\right\} \tag{22}$$

Запишем решения (22) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda(i)-\lambda(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2-(\sigma(i)-\sigma(j))^2} &= \frac{au}{u^2-\vartheta^2}+\frac{g\vartheta}{u^2-\vartheta^2}, \\ \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2-(\sigma(i)-\sigma(j))^2} &= \frac{bu}{u^2-\vartheta^2}+\frac{h\vartheta}{u^2-\vartheta^2}, \end{aligned}\right\}, \qquad (22^{/})$$

используя обозначения переменных (12) и вводя новые обозначения коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\beta(\sigma_x(j)+\beta\lambda_x(j))-(\sigma_y(j)+\beta\lambda_y(j))}{\triangle\ (j)}, \\ b &= \frac{\beta(\lambda_x(j)+\beta\sigma_x(j))-(\lambda_y(j)+\beta\sigma_y(j))}{\triangle\ (j)}, \\ g &= \frac{\beta(\sigma_y(j)+\beta\lambda_y(j))-(\sigma_x(j)+\beta\lambda_x(j))}{\triangle\ (j)}, \\ h &= \frac{\beta(\lambda_y(j)+\beta\sigma_y(j))-(\lambda_x(j)+\beta\sigma_x(j))}{\triangle\ (j)}, \end{aligned}\right\}$$

причем $a=a(j), b=b(j), g=g(j), h=h(j)$ и выполняется неравенство (13).

Из решений $(22^{/})$ найдем выражения

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2-(\sigma(i)-\sigma(j))^2} &= \frac{(au+g\vartheta)^2-(bu+h\vartheta)^2}{(u^2-\vartheta^2)^2}, \\ \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{\lambda(i)-\lambda(j)} &= \frac{bu+h\vartheta}{au+g\vartheta}, \end{aligned}\right\}, \qquad (23)$$

которые подставим в исходное функциональное уравнение (19):

$$2\beta ar(c)th\frac{bu^2+(h-a)u\vartheta-g\vartheta^2}{au^2+(g-b)u\vartheta-h\vartheta^2}=$$

$$=\ln\frac{(a^2-b^2)u^2+2(ag-bh)u\vartheta+(g^2-h^2)\vartheta^2}{u^2-\vartheta^2}. \qquad (24)$$

Тождество (24) продифференцируем по переменной u:

$$\frac{2\beta((b(g-b)-a(h-a))u^2\vartheta+(2ag-2bh)u\vartheta^2+(g(g-b)-h(h-a))\vartheta^3)}{(a^2-b^2)u^4+2(ag-bh)u^3\vartheta+(g^2-h^2)\vartheta^2u^2-(a^2-b^2)u^2\vartheta^2-2(ag-bh)u\vartheta^3-(g^2-h^2)\vartheta^3}=$$
$$=\frac{-2(ag-bh)\vartheta u^2-2(a^2-b^2+g^2-h^2)u\vartheta^2-2(ag-bh)\vartheta^3}{(a^2-b^2)u^4+2(ag-bh)u^3\vartheta+(g^2-h^2)\vartheta^2u^2-(a^2-b^2)u^2\vartheta^2-2(ag-bh)u\vartheta^3-(g^2-h^2)\vartheta^3},$$

после чего умножим на общий знаменатель и приведем подобные слагаемые:

$$(2\beta(bg-b^2-ah+a^2)+2(ag-bh))u^2\vartheta+$$
$$+2((ag-bh)2\beta+(a^2-b^2+g^2-h^2))\vartheta^2u+ \qquad (25)$$
$$+(2\beta(g^2-bg-h^2+ha)+2(ag-bh))\vartheta^3=0.$$

Следствием тождества (25) являются следующие связи на коэффициенты выражений (23):

$$2\beta(bg - b^2 - ah + a^2) + 2(ag - bh) = 0,$$
$$(ag - bh)2\beta + (a^2 - b^2 + g^2 - h^2) = 0,$$
$$2\beta(g^2 - bg - h^2 + ha) + 2(ag - bh) = 0,$$

С учетом (13) эти связи легко могут быть приведены к следующему виду:

$$ag - bh = 0, \quad a^2 - b^2 + g^2 - h^2 = 0, \quad a^2 - b^2 = h^2 - g^2 = ha - bg \neq 0.$$

Подставим вторую из них в первое выражение (23):

$$\frac{1}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{a^2 - b^2}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

с учетом чего из решений ($22^{/}$) находим:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(i) - \lambda(j) &= \frac{a}{a^2 - b^2}(x_i - x_j) + \frac{b}{a^2 - b^2}(y_i - y_j), \\ \sigma(i) - \sigma(j) &= \frac{b}{a^2 - b^2}(x_i - x_j) + \frac{a}{a^2 - b^2}(y_i - y_j). \end{aligned}\right\} \tag{$22^{//}$}$$

Дифференцируя результаты ($22^{//}$) по координатам точки i, разделяем переменные:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_x(i) &= \frac{a(j)}{a(j)^2 - b(j)^2} = const = a, \\ \sigma_x(i) &= \frac{b(j)}{a(j)^2 - b(j)^2} = const = b. \end{aligned}\right\}$$

Введение новых констант a и b позволяет в выражениях ($22^{//}$) осуществить дополнительное разделение переменных, откуда получаем

$$\lambda(x, y) = ax + by + c, \quad \sigma(x, y) = bx + ay + d. \tag{26}$$

Дополнительная связь на константы выражений (26) возникает при их подстановке в исходное функциональное уравнение (19):

$$(a^2 - b^2)\exp(2\beta\ ar(c)th\frac{b}{a}) = 1. \tag{27}$$

Функции (26) со связью (27) как полное решение функционального уравнения (19) по формулам (3) определяют трехпараметрическое множество всех движений (20) псевдогельмгольцевой плоскости. Это множество является локальной группой по композиции движений, причем выполнение всех аксиом группы [4] легко проверяется. Теорема полностью доказана.

Также как и в случае плоскости Гельмгольца метрическая функция (7) является двухточечным инвариантом группы преобразований (20). С другой стороны, каждый такой инвариант $f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$ является решением функционального уравнения $f(i^/ j^/) = f(ij)$ для группы преобразований (20). Общее решение этого уравнения совпадает с метрической функцией (7) с точностью до масштабного преобразования.

Рассмотрим, наконец, дуальногельмгольцеву плоскость, задаваемую метрической функцией (8).

Запишем функциональное уравнение на множество движений (3):

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^2 \exp(2\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)}) = (x_i - x_j)^2 \exp(2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}). \tag{28}$$

Теорема 3. *Множество всех движений дуальногельмгольцевой плоскости есть трехпараметрическая группа её преобразований*

$$x^/ = ax + c, \quad y^/ = bx + ay + d, \tag{29}$$

где $a^2 \exp(2\frac{b}{a}) = 1$.

Воспользуемся аналогичным методом для решения функционального уравнения (28). Дифференцируя его по координатам точки j и деля на него результаты дифференцирования, получаем два равенства:

$$\left.\begin{array}{c} (\lambda_x(j) + \sigma_x(j))\dfrac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} - \lambda_x(j)\dfrac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} = \dfrac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2} - \dfrac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2}, \\ (\lambda_y(j) + \sigma_y(j))\dfrac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} - \lambda_y(j)\dfrac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} = \dfrac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2}. \end{array}\right\}, \tag{30}$$

которые рассмотрим как систему алгебраических уравнений относительно дробей

$$\frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2}, \quad \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2}.$$

Поскольку определитель системы (30)

$$\triangle\ (j) = \begin{vmatrix} \lambda_x(j) + \sigma_x(j) & -\lambda_x(j) \\ \lambda_y(j) + \sigma_y(j) & -\lambda_y(j) \end{vmatrix} = \frac{\partial(\lambda(j), \sigma(j))}{\partial(x_j, y_j)}$$

вследствие условия (4) отличен от нуля, она может быть решена методом Крамера:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} = \dfrac{\lambda_x(j) - \lambda_y(j)}{\triangle\ (j)}\dfrac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2} + \dfrac{\lambda_y(j)}{\triangle\ (j)}\dfrac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2}, \\ \dfrac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} = \dfrac{\lambda_x(j) + \sigma_x(j) - \lambda_y(j) - \sigma_y(j)}{\triangle\ (j)}\dfrac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2} + \dfrac{\lambda_y(j) + \sigma_y(j)}{\triangle\ (j)}\dfrac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2}. \end{array}\right\} \tag{31}$$

Для сокращения последующего изложения запишем решения (31) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda(i)-\lambda(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2} &= \frac{au}{u^2}+\frac{g\vartheta}{u^2},\\ \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2} &= \frac{bu}{u^2}+\frac{h\vartheta}{u^2}, \end{aligned}\right\}, \qquad (31^{/})$$

учитывая обозначения переменных (12) и вводя новые обозначения и коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} a=\frac{\lambda_x(j)-\lambda_y(j)}{\triangle\ (j)},\quad b=\frac{\lambda_x(j)+\sigma_x(j)-\lambda_y(j)-\sigma_y(j)}{\triangle\ (j)},\\ g=\frac{\lambda_y(j)}{\triangle\ (j)},\quad h=\frac{\lambda_y(j)+\sigma_y(j)}{\triangle\ (j)}, \end{aligned}\right\}$$

причем выполняется неравенство (13).

Из решений ($31^{/}$) найдем выражения

$$\frac{1}{\lambda(i)-\lambda(j)}=\frac{au+g\vartheta}{u^2},\quad \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{\lambda(i)-\lambda(j)}=\frac{bu+h\vartheta}{au+g\vartheta}, \qquad (32)$$

которые подставим в исходное функциональное уравнение (28), откуда после простых преобразований получаем тождество

$$2\frac{u(bu+h\vartheta)-\vartheta(au+g\vartheta)}{u(au+g\vartheta)}=\ln\frac{(au+g\vartheta)^2}{u^2}. \qquad (33)$$

Далее тождество (33) продифференцируем по переменной u:

$$\frac{(2bu+h\vartheta-a\vartheta)(au^2+gu\vartheta)-2bau^3-2hau^2\vartheta+2a^2u^2\vartheta+2agu\vartheta^2-bgu^2\vartheta-ghu\vartheta^2+agu\vartheta^2+g^2\vartheta^3}{u^2(au+g\vartheta)^2}=$$
$$=\frac{a^2u^3+agu^2\vartheta-a^2u^3-2agu^2\vartheta-g^2u\vartheta^2}{u^2(au+g\vartheta)^2},$$

сокращаем знаменатель и приводим подобные слагаемые:

$$(bg-ah+ag+a^2)u^2\vartheta+(2ag+g^2)u\vartheta^2+g^2\vartheta^3=0. \qquad (34)$$

Следствием тождества (34) являются следующие связи на коэффициенты выражений (32):

$$g=0,\quad h=a\neq 0.$$

С учетом данных связей из решений (32) находим:

$$\lambda(i)-\lambda(j)=\frac{u}{a},\quad \sigma(i)-\sigma(j)=\frac{bu}{a^2}+\frac{\vartheta}{a}. \qquad (31^{//})$$

Дифференцируя результаты ($31^{//}$) по координатам точки i, разделяем переменные:

$$\lambda_x(i)=\frac{1}{a(j)}=const=a,\quad \sigma_x(i)=\frac{b(j)}{a(j)^2}=const=b.$$

Введение констант a и b позволяет в выражениях ($31^{//}$) осуществить дополнительное разделение переменных, после чего получаем

$$\lambda(x, y) = ax + c, \quad \sigma(x, y) = bx + ay + d. \tag{35}$$

Дополнительная связь на константы выражений (35) возникает при их подстановке в исходное функциональное уравнение (28):

$$a^2 \exp(2\frac{b}{a}) = 1. \tag{36}$$

Функции (35) со связью (36) как полное решение функционального уравнения (28) по формулам (3) определяют трехпараметрическое множество всех движений (29) дуальногельмгольцевой плоскости. Это множество является локальной группой по композиции движений, причем выполнение всех аксиом группы [4], легко проверяется. Теорема полностью доказана.

Метрическая функция (8), как и раньше является двухточечным инвариантом группы преобразований (29). Каждый такой инвариант $f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$ является решением функционального уравнения $f(i^/j^/) = f(ij)$ для группы преобразований (29). Общее решение этого уравнения совпадает с метрической функцией (8) с точностью до масштабного преобразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Михайличенко Г.Г.** Двумерные геометрии // Докл. АН СССР, 1981, Т.260, № 4. С.803-805.

2. **Гельмгольц** Г. О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. - М., 1956, С.366-388.

3. **Фихтенгольц Г.М.** Основы математического анализа(2) - СПб.: Лань, 1999, С.201-211.

4. **Понтрягин Л.С.** Неперерывные группы. - М.: Наука, 1973, С.11-59.

Автор: Богданова Рада Александровна

Адрес (дом):649000 Республика Алтай г.Горно-Алтайск ул. Социалистическая, 14 ком.303/3

Адрес (служебный):Горно-Алтайский государственный университет Физико-математический факультет кафедра математики и информатики

649000 Республика Алтай г.Горно-Алтайск ул. Социалистическая, 26

тел: (служебный)(388-22)6-67-69