На правах рукописи

**Фирдман Илья Александрович**

# АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ БИФОРМ

01.01.06 – алгебра, математическая логика и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Омск, 2007

Работа выполнена на кафедре высшей математики факультета транспорта, нефти и газа Омского государственного технического университета.

**Научный руководитель:**

доктор физико-математических наук,
профессор Бокуть Леонид Аркадьевич

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук,
профессор Ионин Владимир Кузьмич

доктор физико-математических наук,
профессор Широков Игорь Викторович

**Ведущая организация:**

Алтайский государственный университет

Защита состоится 15 мая 2007 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета К 212.179.01 при ГОУ ВПО «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского» по адресу: 644077, Омск, ул. Нефтезаводская, 11.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Омского государственного университета имени Достоевского.

Автореферат разослан «    » апреля 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук,
доцент М. А. Шевелин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы** Диссертация посвящена алгебраическим аспектам и приложениям принципа феноменологической симметрии. Дадим сначала его общее описание.

Первоначально понятие феноменологической симметрии было введено в 1960-х годах Ю. И. Кулаковым[1,2,3,4] как основная идея его теории физических структур. Общее содержание этого понятия можно выразить следующим образом. Пусть даны множества $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $R$ произвольной природы, связанные отображением $\langle,\rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ (*репрезентатором*, или, как мы будем его называть, *биформой*), описывающим взаимодействие элементов множеств $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$. Задаются, кроме того, два натуральных числа $m$ и $n$ — позднее будет видно, что они описывают размерность (в некотором смысле) множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ над $R$. Введем два интуитивных понятия, которые будут конкретизироваться в зависимости от дополнительной структуры, определенной на множествах $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $R$, и постановки интересующей нас задачи. Это понятие полного подмножества (для топологических пространств речь может идти о всюду плотных подмножествах, для пространств матриц над телом — о множестве всех необратимых матриц, и т. п.; может требоваться и точное совпадение полного подмножества со всем множеством) и зависимого подмножества (например, нигде не плотного, для топологических пространств, или, для пространств вида $R^k$ с произвольной структурой $R$, подмножества, являющегося графиком некоторой функции $R^{k-1} \to R$).

Для упорядоченных наборов элементов $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{M}^k$, $\mathfrak{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{N}^l$ обозначим через $\langle I, \mathfrak{A}\rangle$ матрицу размера $k \times l$, составленную из всевозможных элементов вида $\langle i_p, \alpha_q\rangle$, $p = 1, \ldots, k$, $q = 1, \ldots, l$. Таким образом, $\langle I, \mathfrak{A}\rangle \in R^{kl}$.

Принцип феноменологической симметрии для многоосновной алгебраической системы $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ можно теперь представить как требование выполнения следующих двух условий:

1. Для любых элементов $Z$ и $\Omega$, соответственно, некоторых множеств

---

[1] Кулаков Ю. И. *Элементы теории физических структур (дополнение Михайличенко Г. Г.).* Новосибирск: НГУ, 1968.

[2] Кулаков Ю. И. *Об одном принципе, лежащем в основании классической физики.* // Докл. АН СССР, 1970, т. 193, №1. с. 72–75.

[3] Кулаков Ю. И. *Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур.* // Докл. АН СССР, 1970, т. 193, №5, с. 985–987.

[4] Кулаков Ю. И. *О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа.* // Докл. АН СССР, 1971, т. 201, №3. с. 570–572.

$\mathcal{B}_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}^n$, $\mathcal{B}_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}^m$ (множеств баз) множество $\langle Z, \mathcal{N} \rangle = \{\langle Z, \alpha \rangle : \alpha \in \mathcal{N}\} \subseteq R^n$ полно в $R^n$, а множество $\langle \mathcal{M}, \Omega \rangle \subseteq R^m$ полно в $R^m$.

2. Множество $P = \{\langle I, \mathfrak{A} \rangle : I \in \mathcal{M}^{n+1}, \mathfrak{A} \in \mathcal{N}^{m+1}\} \subseteq R^{(n+1)(m+1)}$ зависимо в $R^{(n+1)(m+1)}$.

Система $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$, удовлетворяющая двум приведенным условиям, называется *(бинарной) физической структурой ранга (n+1,m+1)*. Отметим, что имеется и содержательная теория унарных физических структур[3,5,6], определяющихся на одном множестве $\mathcal{M}$ близким образом, тесно связанная с геометрией расстояний.

Первая интерпретация принципа феноменологической симметрии была дана Кулаковым[1] в контексте исследования и классификации некоторого, достаточно разнообразного по природе исследуемых явлений, класса физических законов (включающего, например, второй закон Ньютона и закон Ома для полной цепи). При этом $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ понимались как множества взаимодействующих физических объектов, репрезентатор $\langle , \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ — как функция, описывающая их взаимодействие, ее область значений $R$ отождествлялась с множеством вещественных чисел (этим предполагалось, что взаимодействие между парой объектов из рассматриваемых множеств может быть описано вещественным числом и измерено экспериментально). Другая предложенная Кулаковым интерпретация относилась к геометрии, где $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ рассматривались как многообразия размерности $m$ и $n$, соответственно связанные метрикой $\langle , \rangle$. При этом всюду, где в этом могла возникнуть необходимость, предполагалась аналитичность рассматриваемых функций. Математическая формулировка понятия физической структуры, соответствующая этим интерпретациям, была дана Кулаковым[1,2,4] и затем уточнялась и улучшалась его учеником Г. Г. Михайличенко[7,8,9]. Ее общая суть может быть выражена следующим образом.

Пусть $R = \mathbb{R}$, для репрезентатора $\langle , \rangle$ выполняется условие невырожденности (см. стр. 7), и введена топология поточечной сходимости на

[5] Лев В. Х. *Трехмерные геометрии в теории физических структур.* // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Новосибирск: Ин-т математики СОАН СССР, 1988. с. 90–103. (Вычислительные системы. Вып. 125).

[6] Михайличенко Г. Г. *О групповой и феноменологической симметриях в геометрии.* // Докл. АН СССР, 1983, т. 269, №2, с. 284–288.

[7] Михайличенко Г. Г. *Решение функциональных уравнений в теории физических структур.* // Докл. АН СССР, 1972, т. 206, №5, с. 1056–1058.

[8] Михайличенко Г. Г. *Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур).* // Докл. АН СССР, 1985, т. 24, №1, с. 39–41.

[9] Михайличенко Г. Г. *Математический аппарат теории физических структур.* Горно-Алтайск: ГАГУ, 1997.— 144 с.

$\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ (т. е. минимальная топология, в которой отображение $\langle , \rangle$ раздельно непрерывно, см. стр. 11). Первое из условий феноменологической симметрии понимается как наличие на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ локальных координат, вводимых посредством невырожденных (в аналитическом смысле) отображений $\langle \cdot, \Omega \rangle : \mathcal{M} \to R^m$ и $\langle Z, \cdot \rangle : \mathcal{N} \to R^n$. Зависимость множества $P$ понимается как существование такой достаточно гладкой функции $\Phi : R^{(n+1)(m+1)} \to R$ (с градиентом, отличным от нуля почти всюду), что

$$\Phi(P) = 0. \tag{$*$}$$

В этой постановке Михайличенко[7,9] была доказана следующая классификационная теорема. Во введенных выше локальных координатах (обозначаем координаты рассматриваемого нами элемента $i \in \mathcal{M}$ как $(x_1, \ldots, x_m)$, элемента $\alpha \in \mathcal{N}$ как $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$) функция $\langle , \rangle$ представляется (при условии $n \geq m$) следующим образом:

1. для $n = m$: $\langle i, \alpha \rangle = \psi^{-1}(x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n)$ или $\langle i, \alpha \rangle = \psi^{-1}(x_1\xi_1 + \ldots + x_{n-1}\xi_{n-1} + x_n + \xi_n)$ (эти два варианта эквивалентны при $n = m = 2$);
2. для $n = m + 1$: $\langle i, \alpha \rangle = \psi^{-1}(x_1\xi_1 + \ldots + x_{n-1}\xi_{n-1} + x_n)$;
3. для $n = 3$, $m = 1$: $\langle i, \alpha \rangle = \psi^{-1}(\,(x_1\xi_1 + \xi_2)/(x_1 + \xi_3)\,)$,

где $\psi$ — локальный диффеоморфизм $R$. Для других значений $n \geq m$ физических структур не существует. При $n \leq m$ классификация аналогична.

Собственно, возможность построения классификации и делает теорию физических структур содержательной, позволяя находить конкретный вид отображения $\langle , \rangle$ по достаточно общим структурным свойствам его действия на множествах $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$.

Аналитическая аксиоматика физических структур естественным образом распространяется на случаи $R = \mathbb{R}^k$ (*$k$-метрические физические структуры*) или $R = \mathbb{C}$, однако, их классификация значительно сложнее и получена лишь в частных случаях[10,11,12].

Отметим, что в аналитической формулировке теории физических структур имеется большое число дополнительных ограничений (таких,

[10] Михайличенко Г. Г. *Двуметрические физические структуры ранга (n+1,2).* // Сиб. мат. журн., 1993, т. 34, №3, с. 132–143.

[11] Литвинцев А. А. *Комплексная физическая структура ранга (2,2).* // Михайличенко Г. Г. *Математический аппарат теории физических структур.* Горно-Алтайск: ГАГУ, 1997.— 144 с. Приложение: с. 133–144.

[12] Литвинцев А. А. *Комплексная физическая структура ранга (3,2).* // Материалы XXXV международной студенческой конференции. Новосибирск: НГУ, 1997, с. 62–63.

как аналитичность $\Phi$, соответствие $R$ с аналитической и алгебраической структурами $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), не являющихся необходимыми для корректной и содержательной постановки задачи — в уравнении $(*)$ не используется ни аналитичность функции $\Phi$ (кроме предположения ее невырожденности), ни операции сложения и умножения на $R$, которые, тем не менее, возникают в итоговом выражении $\langle,\rangle$.

Это подводит к мысли о содержательности исследования феноменологической симметрии в алгебраическом контексте. Первая алгебраическая аксиоматика теории физических структур была дана в 1990-м году В. К. Иониным[13] (для физических структур ранга (2,2) с отождествлением $\mathcal{M} = R = \mathcal{N}$). Им было показано, для ранга (2,2), наличие на $R$ бинарной операции, согласующейся некоторым естественным образом с $\langle,\rangle$ (и описывающей ее действие) и задающей на $R$ структуру группы. Тем самым была, с одной стороны, дана аксиоматика абстрактной группы на основе феноменологической симметрии, с другой стороны, построена классификация алгебраических (абстрактных) физических структур ранга $(2,2)$ (в предложенной аксиоматике).

Иониным[14] была сформулирована также аксиоматика теории физических структур в большой степени общности и указана возможность получения из нее, в частности, алгебраической аксиоматики.

Отталкиваясь от работ Ионина, А. А. Симонов[15,16] построил алгебраическую аксиоматику бинарной физической структуры произвольного ранга. На ее основе им было доказано (для структур ранга $(n+1,2)$ при произвольном $n \geq 2$) существование согласованных с действием $\langle,\rangle$ бинарных операций $\cdot$ и $\oplus$ на $R$, определяющих на $R$, при дополнительных предположениях, структуру почти кольца, и указаны возможности применения соответствующего результата к классификации физических структур соответствующих рангов. Идеи феноменологической симметрии структуры ранга $(3,2)$ были использованы[17] Симоновым для построения связи между

[13]Ионин В. К. *Абстрактные группы как физические структуры.* // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Новосибирск, 1990. Вып. 135: Вычислительные системы, с. 40–43.

[14]Ионин В. К. *К определению физических структур.* // Труды института математики. Новосибирск, 1992. Том 21, с. 42–51.

[15]Симонов А. А. *Физическая структура ранга (3,2) на абстрактных множествах.* // Материалы XXXV Междунар. науч. студ. конф. "Студент и научно-технический прогресс"(Новосибирск, 22–24 апр. 1997 г.) Математика. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1997. с. 100–101.

[16]Симонов А. А. *Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур.* // *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур. М., 2004.— 847 с., ил. Приложение: с. 675–707.

[17]Симонов А. А. *О соответствии между почтиобластями и группами.* // Алгебра и логика. 2006. 45, № 2, с. 239–251.

точно дважды транзитивными группами и алгебраическими системами, близкими к почти области.

Некоторые алгебраические свойства полиметрических физических структур малых рангов рассматривались также Михайличенко[10] в связи с интерпретацией его классификационных результатов.

**Цель работы**

1. Исследовать алгебраические аспекты феноменологической симметрии для физических структур $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ больших рангов (больших, чем (3,3)) и указать способ задания с ее помощью структуры тела на $R$ и линейного пространства над $R$ на $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$.

2. Построить содержательную алгебраическую классификацию биформ для физических структур больших рангов.

3. Исследовать тополого-алгебраические аспекты феноменологической симметрии и построить содержательную классификацию биформ для непрерывных физических структур.

**Методы исследования** В работе используются методы универсальной алгебры, линейной алгебры над телами и топологической алгебры.

**Основные результаты**

1. Дана алгебраическая аксиоматика (абстрактной) физической структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ ранга $(n+1, m+1)$, $n, m \geq 2$, и проведена их классификация в случае ранга, отличного от $(3,3)$, дающая явный вид биформы и согласованную с ней структуру тела на $R$.

2. Построена аксиоматика пары линейных пространств над телом с заданной на них невырожденной билинейной формой, основанная на принципе феноменологической симметрии и не предполагающая предварительно введенных операций сложения и умножения.

3. Дана аксиоматика непрерывной физической структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ ранга $(n+1, m+1)$, $n, m \geq 2$, и проведена их классификация в случае ранга, отличного от $(3,3)$, дающая явный вид биформы и согласованную с ней структуру топологического тела на $R$. Для случая $R = \mathbb{R}$, $R = \mathbb{C}$ или $R = \mathbb{H}$ ($\mathbb{H}$ — топологическое тело кватернионов) указано соответствие биформы с операциями исходного тела.

4. Дана аксиоматика непрерывной физической структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ ранга $(n+1,2)$, и проведена их классификация в случае ранга $n \geq 2$, дающая явный вид биформы и указывающая эквивалентность таких структур точно $n$-транзитивным непрерывным группам преобразований топологического пространства $R$.

**Научная новизна** Все основные результаты диссертации являются новыми.

**Теоретическая и практическая значимость работы** Работа носит теоретический характер. Представленный в работе подход к аксиоматическому заданию линейных пространств и тополого-алгебраических структур может быть использован в дальнейших исследованиях по линейной и топологической алгебре. Результаты работы могут быть использованы при чтении спецкурсов по линейной алгебре и по теории физических структур.

**Апробация работы** Результаты диссертации были представлены на Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2004, 2005) и докладывались на семинаре им. А. И. Ширшова «Теория колец» ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН и на Омском алгебраическом семинаре.

**Публикации** Все основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[4]. Работа [4] написана автором совместно с А. А. Симоновым при равном вкладе соавторов.

**Структура и объем работы** Диссертация изложена на 140 страницах и состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы, и списка литературы из 33 наименований. Часть разделов разбита на подразделы. Нумерация определений, теорем, предложений, лемм, следствий, замечаний раздельная, сквозная внутри каждой главы. Нумерация формул сквозная в пределах раздела (номер главы, номер раздела, номер формулы в разделе).

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе исследуются алгебраические физические структуры больших рангов.

В разделе 1.2 дается аксиоматика алгебраической физической структуры в случае большого ранга и формулируются классификационные теоремы для них.

В подразделе 1.2.1 задаются базовые аксиомы абстрактной физической структуры, из которых затем будут выводиться остальные.

Пусть дана (многоосновная) алгебраическая система $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$, где $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $R$ — произвольные множества ($R$ содержит более одного элемента), $\langle,\rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ — некоторое отображение, называемое *биформой* и удовлетворяющее условию *невырожденности* (в дальнейшем называемому также аксиомой невырожденности) :

- для любых $i, i' \in \mathcal{M}$, $i \neq i'$, найдется $\alpha \in \mathcal{N}$, такой, что $\langle i, \alpha\rangle \neq \langle i', \alpha\rangle$,
- для любых $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, $\alpha \neq \alpha'$, найдется $i \in \mathcal{M}$, такой, что $\langle i, \alpha\rangle \neq \langle i, \alpha'\rangle$.

Мы считаем заданными также целые положительные числа $n$ и $m$; пару $(n+1, m+1)$ будем называть *рангом* данной системы.

В дальнейшем мы будем использовать следующую сокращенную форму записи: для $i_1, \ldots, i_k, i \in \mathcal{M}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \alpha \in \mathcal{N}$ мы можем обозначить $(i_1, \ldots, i_k) = I \in \mathcal{M}^k$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = \mathfrak{A} \in \mathcal{N}^l$. В этом случае будем под $\langle I, \alpha\rangle$ понимать строку $(\langle i_1, \alpha\rangle, \ldots, \langle i_k, \alpha\rangle) \in R^k$, под $\langle i, \mathfrak{A}\rangle$ — строку $(\langle i, \alpha_1\rangle, \ldots, \langle i, \alpha_l\rangle) \in R^l$, под $\langle I, \mathfrak{A}\rangle$ — соответствующую матрицу $k \times l$.

Мы будем иметь дело с отображениями $\langle I, \cdot\rangle : \mathcal{N} \to R^k$, $I \in \mathcal{M}^k$, определенными по правилу $\langle I, \cdot\rangle : \alpha \mapsto \langle I, \alpha\rangle$, $\alpha \in \mathcal{N}$. Эти отображения будут обозначаться также как $\pi_I : \mathcal{N} \to R^k$. Аналогично определенные отображения $\langle \cdot, \mathfrak{A}\rangle : \mathcal{M} \to R^k$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{N}^k$, будем обозначать $\pi^{\mathfrak{A}} : \mathcal{M} \to R^k$.

Пусть заданы некоторые упорядоченные наборы $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{M}^n$ и $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \mathcal{N}^m$. Мы можем теперь сформулировать следующие аксиомы на $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ (будем называть их базовым набором аксиом).

**Аксиома A1** Пусть $I' \in \mathcal{M}^n$, $i, i' \in \mathcal{M}$, $\mathfrak{A}' \in \mathcal{N}^m$, $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$. Пусть $\langle Z, \mathfrak{A}'\rangle = \langle I', \Omega\rangle$, $\langle i', \Omega\rangle = \langle i, \mathfrak{A}'\rangle$, $\langle Z, \alpha'\rangle = \langle I', \alpha\rangle$. Тогда $\langle i', \alpha\rangle = \langle i, \alpha'\rangle$.

**Аксиома A2** Для любого $r \in R^n$ найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle Z, \alpha\rangle = r$; для любого $r \in R^m$ найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \Omega\rangle = r$.

**Определение 1.4** Будем говорить, что $i \in \mathcal{M}$ зависит от системы элементов $(i_1, \ldots, i_k) = I \in \mathcal{M}^k$, если для любых $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$

$$\langle I, \alpha\rangle = \langle I, \alpha'\rangle \text{ влечет } \langle i, \alpha\rangle = \langle i, \alpha'\rangle.$$

**Определение 1.5** *Систему элементов $i_1, \ldots, i_k \in \mathcal{M}$ будем называть независимой, если она не зависит ни от какой меньшей системы элементов $\mathcal{M}$, то есть не существует такой системы $i'_1, \ldots, i'_{k-1} \in \mathcal{M}$ (пустой в случае $k = 1$), от которой зависят все $i_1, \ldots, i_k$.*

Аналогично определяется зависимость и независимость элементов $\mathcal{N}$.

**Аксиома А3** Пусть $k \in \{1,2,3\}$, $(i_1,\ldots,i_k) = I \in \mathcal{M}^k$ независимы. Тогда для любого вектора $r \in R^k$ найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \alpha\rangle = r$. Пусть $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = \mathfrak{A} \in \mathcal{N}^k$ независимы. Тогда для любого $r \in R^k$ найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \mathfrak{A}\rangle = r$.

**Определение 1.6** *Многоосновную алгебраическую систему $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$, удовлетворяющую указанным выше условиям ($R$ содержит более одного элемента, биформа невырождена, выполняются аксиомы A1, A2, A3) будем называть (абстрактной) физической структурой ранга $(n+1, m+1)$.*

**Определение 1.7** *Две физические структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ и $(\mathcal{M}', \mathcal{N}', R', \langle,\rangle')$ ранга $(n+1, m+1)$ будем называть сильно эквивалентными, если найдутся такие биективные отображения $\mu : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, $\nu : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$, что для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ выполнено $\langle \mu(i), \nu(\alpha)\rangle' = \langle i, \alpha\rangle$.*

В подразделе 1.2.2 выводятся следствия аксиом A1 и A2, которые будут рассматриваться затем как самостоятельные аксиомы A4–A6.

**Аксиома А6** Если $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, то из $\langle Z, \alpha\rangle = \langle Z, \alpha'\rangle$ следует $\alpha = \alpha'$. Если $i, i' \in \mathcal{M}$, то из $\langle i, \Omega\rangle = \langle i', \Omega\rangle$ следует $i = i'$.

Определим для каждого элемента $i \in \mathcal{M}$ функцию $U[i] : R^n \to R$ следующим равенством:

$$U[i](\langle Z, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha\rangle \text{ для всех } \alpha \in \mathcal{N}.$$

Определение корректно в силу аксиомы A6; функции определены на всем $R^n$ в силу аксиомы A2. Пусть теперь $U^n_{\mathcal{M}} = \{U[i] \mid i \in \mathcal{M}\}$. Для $k = 0,\ldots,n$ определим $U^k_{\mathcal{M}}$ как подмножество функций из $U^n_{\mathcal{M}}$, постоянных на последних $n-k$ координатах (и рассматриваемых как функции $R^k \to R$). Обозначим $U_{\mathcal{M}} = \bigsqcup_{k=0}^{n} U^k_{\mathcal{M}}$. Аналогично определяется набор функций $U_{\mathcal{N}}$.

**Аксиома А4** Множества функций $U_{\mathcal{M}}$, $U_{\mathcal{N}}$ замкнуты относительно взятия суперпозиции (в которой участвуют функции лишь из одного множества).

**Аксиома А5** Пусть $I = (i_1,\ldots,i_k) \in \mathcal{M}^k$, $u \in U^k_{\mathcal{M}}$. Тогда найдется такой элемент $i \in [i_1,\ldots,i_k]$, что для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle i, \alpha\rangle = u(\langle I, \alpha\rangle)$. Аналогичное утверждение справедливо для $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathcal{N}$, $u \in U^k_{\mathcal{N}}$.

В подразделе 1.2.3 формулируются классификационные теоремы для алгебраических физических структур больших рангов. Приведем их здесь в сокращенном виде (опуская утверждения теорем, дающие явный вид набора функций $U_{\mathcal{M}}$, $U_{\mathcal{N}}$).

**Теорема 1.4** *Пусть для системы $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ ранга $(n+1, m+1)$, такого, что $m, n \geq 2$, $(n+1, m+1) \neq (3,3)$, выполнена следующая совокупность аксиом: A2, A3, одно из следующих трех сочетаний: A1; A4 и A6; A5 и A6, а также невырожденность биформы и наличие в $R$ более, чем одного элемента. Тогда*

1. *Мы можем выбрать элементы $O, e \in R$ (при этом в качестве $e$ можно взять произвольный элемент $R$, не равный $O$) и задать на $R$ бинарные операции $+$ и $\cdot$ так, что $(R, +, \cdot, O, e)$ будет телом.*

2. *$\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ являются, соответственно, левым $m$-мерным и правым $n$-мерным линейными пространствами над телом $R$, определенным в предыдущем пункте.*

3. *$m = n$, $m = n+1$ или $m = n-1$.*

4. *Можно выбрать такие наборы элементов $(z'_1, \ldots, z'_n) = Z' \in \mathcal{M}^n$, $(\omega'_1, \ldots, \omega'_m) = \Omega' \in \mathcal{N}^m$, что отображения $\langle Z', \cdot\rangle : \mathcal{N} \to R^n$ и $\langle \cdot, \Omega'\rangle : \mathcal{M} \to R^m$ биективны, и для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ биформа $\langle,\rangle$ представляется в одном из следующих видов (в первом и последнем случаях $m = n$, во втором — $m = n+1$, в третьем — $m = n-1$) :*

$$\begin{aligned}
\langle i, \alpha\rangle &= x_1 \cdot \xi_1 + \ldots + x_n \cdot \xi_n; \\
\langle i, \alpha\rangle &= (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 + \ldots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n + x_{n+1}; \\
\langle i, \alpha\rangle &= x_1 \cdot (\xi_1 - \xi_n) + \ldots + x_{n-1} \cdot (\xi_{n-1} - \xi_n) + \xi_n; \\
\langle i, \alpha\rangle &= (x_1 - x_n) \cdot (\xi_1 - \xi_n) + \ldots + \\
&\qquad\qquad (x_{n-1} - x_n) \cdot (\xi_{n-1} - \xi_n) + x_n + \xi_n,
\end{aligned}$$

   *где $\langle i, \Omega'\rangle = (x_1, \ldots, x_m)$, $\langle Z', \alpha\rangle = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $+$ и $\cdot$ — операции в теле $R$.*

Теорема 1.4 классифицирует абстрактные физические структуры с точностью до сильной эквивалентности.

Будет доказываться также более частная теорема. Рассмотрим следующую дополнительную аксиому.

**Аксиома A0** В множестве $\mathcal{M}$ есть такой элемент $z_0$, что для любых $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$ выполнено $\langle z_0, \alpha\rangle = \langle z_0, \alpha'\rangle$. Существует такой элемент $\omega_0 \in \mathcal{N}$, что для любых $i, i' \in \mathcal{M}$ выполнено $\langle i, \omega_0\rangle = \langle i', \omega_0\rangle$.

Кроме того, мы будем называть утверждение аксиомы A3, берущееся только для $k = 1, 2$, *аксиомой A3'*.

**Теорема 1.5** *Пусть для системы* $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ *ранга* $(n+1, m+1)$, *такого, что* $m, n \geq 1$, $(n+1, m+1) \neq (2, 2)$, *выполнена следующая совокупность аксиом:A0, A2, A3', одно из следующих трех сочетаний: A1; A4 и A6; A5 и A6, а также невырожденность биформы и наличие в* $R$ *более, чем одного элемента. Тогда*

1. $m = n$.
2. *Мы можем выбрать элементы* $O, e \in R$ *(при этом в качестве* $e$ *можно взять произвольный элемент* $R$, *не равный* $O$) *и задать на* $R$ *бинарные операции* $+$ *и* $\cdot$ *так, что* $(R, +, \cdot, O, e)$ *будет телом.*
3. $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$ *являются, соответственно, левым и правым* $n$*-мерными линейными пространствами над телом* $R$, *определенным в предыдущем пункте.*
4. $\langle , \rangle$ *является невырожденной билинейной формой на векторных пространствах* $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$.
5. *Можно выбрать такие дуальные базисы* $(z'_1, \dots, z'_n) = Z' \in \mathcal{M}^n$, $(\omega'_1, \dots, \omega'_n) = \Omega' \in \mathcal{N}^n$ *линейных пространств* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$, *что отображения* $\langle Z', \cdot \rangle : \mathcal{N} \to R^n$ *и* $\langle \cdot, \Omega' \rangle : \mathcal{M} \to R^n$ *будут биективны.*

Как показано в приложении 1, для пары из $n$-мерных левого и правого, соответственно, линейных пространств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ над телом $R$, если принять за $Z$, $\Omega$ их дуальные базисы, выполняются все условия теоремы 1.5.

Раздел 1.3 посвящен доказательству теорем 1.4, 1.5. Его основная идея заключается в исследовании наборов функций $U_{\mathcal{M}}$, $U_{\mathcal{N}}$ и определении с их помощью операций на $R$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, удовлетворяющих требуемым нами условиям.

Во второй главе исследуются непрерывные физические структуры больших рангов.

В разделе 2.2 дается аксиоматика непрерывных физических структур больших рангов и формулируются классификационные теоремы.

Как и в главе 1, рассматриваем алгебраическую систему $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$, где $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $R$ — произвольные множества ($R$ содержит более одного элемента, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ непусты), а биформа $\langle , \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ удовлетворяет условию невырожденности, и задан ранг $(n + 1, m + 1)$. Полагаем также, что на $R$ задана структура хаусдорфового топологического пространства.

Пусть заданы непустые подмножества баз $\mathcal{B}_\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^n$ и $\mathcal{B}_\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}^m$. Пусть выполняются следующие аксиомы на $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$.

**Аксиома T1** Существует такая функция $F : R^m \times R^{nm} \times R^n \to R$, определенная и непрерывная на подмножестве $R^m \times \langle \mathcal{B}_\mathcal{M}, \mathcal{B}_\mathcal{N} \rangle \times R^n$, что для всех $I \in \mathcal{B}_\mathcal{M},\ i \in \mathcal{M},\ \mathfrak{A} \in \mathcal{B}_\mathcal{N},\ \alpha \in \mathcal{N}$ выполнено

$$\langle i, \alpha \rangle = F(\langle i, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \alpha \rangle).$$

**Аксиома T2** Для любой базы $I \in \mathcal{B}_\mathcal{M}$ подмножество $\langle I, \mathcal{B}_\mathcal{N} \rangle = \pi_I \times \cdots \times \pi_I(\mathcal{B}_\mathcal{N}) \subseteq R^{nm}$ всюду плотно в $R^{nm}$. Для любой базы $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_\mathcal{N}$ подмножество $\langle \mathcal{B}_\mathcal{M}, \mathfrak{A} \rangle$ всюду плотно в $R^{nm}$.

**Аксиома T3** Множество $\langle \mathcal{B}_\mathcal{M}, \mathcal{B}_\mathcal{N} \rangle$ содержит некоторое открытое подмножество пространства $R^{nm}$.

Мы считаем выполненной также аксиому A3 главы 1. Аксиома A2 же предполагается выполненной для произвольных баз:

**Аксиома A2'** Для любых $I \in \mathcal{B}_\mathcal{M}$, $r \in R^n$ найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \alpha \rangle = r$; для любых $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_\mathcal{N}$, $r \in R^m$ найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \mathfrak{A} \rangle = r$.

**Определение 2.4** *Многоосновную алгебраическую систему $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$, удовлетворяющую указанным выше условиям и аксиомам будем называть непрерывной физической структурой ранга $(n+1, m+1)$, если $n, m \geq 2$.*

Элементы $\mathcal{M}$ могут, ввиду невырожденности биформы, рассматриваться как различные функции на $\mathcal{N}$ со значениями в $R$: $\mathcal{M} \subseteq R^\mathcal{N}$, и аналогично $\mathcal{N} \subseteq R^\mathcal{M}$. Введем теперь на $\mathcal{M}$ (и на $\mathcal{N}$) топологию, индуцированную соответствующими топологиями прямого произведения.

**Определение 2.5** *Две непрерывные физические структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ и $(\mathcal{M}', \mathcal{N}', R', \langle,\rangle')$ ранга $(n+1, m+1)$ будем называть сильно эквивалентными, если найдутся такие гомеоморфные биекции $\mu : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, $\nu : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$, что для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ будет выполнено $\langle \mu(i), \nu(\alpha) \rangle' = \langle i, \alpha \rangle$.*

Поскольку множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в всех условиях симметричны, мы можем без ограничения общности рассматривать лишь случай $m \geq n$.

**Теорема 2.4** *Пусть $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ — непрерывная физическая структура ранга $(n+1, m+1)$, $m \geq n \geq 2$, $(m,n) \neq (3,3)$. Тогда*

1. *$m = n$ или $m = n+1$.*

2. *Мы можем выбрать элементы $O, e \in R$ (при этом в качестве $e$ можно взять произвольный элемент $R$, не равный $O$) и задать на $R$ бинарные операции $+$ и $\cdot$ так, что $(R, +, \cdot, O, e)$ будет топологическим телом.*

3. *$\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ с введенной выше топологией являются, соответственно, $m$-мерным топологическим левым и $n$-мерным топологическим правым векторными пространствами над телом $R$.*

4. *Найдутся такие $Z' \in \mathcal{M}^n$ и $\Omega' \in \mathcal{N}^m$, что отображения $\langle Z', \cdot\rangle : \mathcal{N} \to R^n$ и $\langle \cdot\,, \Omega'\rangle : \mathcal{M} \to R^n$ являются (топологическими) изоморфизмами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ на топологическое левое и топологическое правое, соответственно, векторные пространства строк длины $m$ и $n$, соответственно, над $R$.*

5. *$\langle,\rangle$ совместно непрерывна и задается в явном виде так же, как в теореме 1.4*

Теорема 2.4 описывает непрерывные физические структуры с точностью до эквивалентности. Следующая теорема является ее следствием.

**Теорема 2.5** *Пусть $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ — непрерывная физическая структура ранга $(n+1, m+1)$, такого, что $m \geq n \geq 2$, $(n+1, m+1) \neq (3,3)$, причем $R$ — поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$, с заданной на них классической топологией. Тогда $m = n$ или $m = n+1$, и найдутся такие $I \in \mathcal{M}^n$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{N}^n$ и такой гомеоморфизм $\varphi : R \to R$, что выполняется одна из следующих трех формул, справедливая для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ (в первом и третьем случае $m = n$, во втором — $m = n+1$).*

$$\langle i, \alpha\rangle = \varphi^{-1}(\varphi(x_1)\varphi(\xi_1) + \ldots + \varphi(x_n)\varphi(\xi_n)); \tag{†}$$

$$\begin{aligned}\langle i, \alpha\rangle = \varphi^{-1}((\varphi(x_1) - \varphi(x_n))\varphi(\xi_1) + \ldots + \\ (\varphi(x_1) - \varphi(x_n))\varphi(\xi_n)) + \varphi(x_{n+1});\end{aligned} \tag{‡}$$

$$\begin{aligned}\langle i, \alpha\rangle = \varphi^{-1}((\varphi(x_1) - \varphi(x_{n-1}))(\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_n)) + \ldots + \\ (\varphi(x_1) - \varphi(x_n))(\varphi(\xi_{n-1}) - \varphi(\xi_n)) + \varphi(x_n) + \varphi(\xi_n)),\end{aligned} \tag{§}$$

*где $(x_1, \ldots, x_n) = \langle i, \mathfrak{A}\rangle$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \langle I, \alpha\rangle$. Отображения $\langle I, \cdot\rangle$ и $\langle \cdot\,, \mathfrak{A}\rangle$ при этом можно взять биективными и гомеоморфными.*

Сформулирована также отдельная теорема (теорема 2.6) для случая, когда выполняется аксиома A0.

Далее в главе 2 доказываются теорема 2.4 и вытекающие из нее теоремы 2.5, 2.6. Доказательство теоремы 2.4 в целом выглядит следующим образом. Сперва показывается, что непрерывная физическая структура рассматриваемого ранга является абстрактной физической структурой, удовлетворяет условиям теоремы 1.4 и является сильно эквивалентной одной из абстрактных структур $A_n(R)$, $B_n(R)$, $C_n(R)$, определенных в приложении 1. Затем, с использованием результатов проведенного в приложении 1 исследования этих структур, полученные результаты топологизуются - показывается непрерывность тела $R$ и векторных пространств $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$.

В главе 3 исследуются непрерывные физические структуры ранга $(n+1, 2)$. В разделе 3.1 приводятся известные результаты о классификации непрерывных точно $n$-транзитивных группах преобразований локально компактного, связного, удовлетворяющего первой аксиоме счетности топологического пространства[18,19].

Приводится, в частности, следующая конструкция[19]. Пусть $\mathbb{H}$ — тело кватернионов, $\Gamma$ – однопараметрическая подгруппа ее мультипликативной группы, такая, что для каждого вещественного положительного числа $r$ найдется в точности один элемент из $\Gamma$ с нормой $r$ (будем обозначать его $\gamma(r)$, функция $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{H}$ непрерывна). Обозначим за $G_\Gamma$ группу преобразований $\mathbb{H}$, состоящую из следующих преобразований:

$$y(x) = a \cdot x \cdot b + c \qquad (a, b, c \in \mathbb{H},\ |a| = 1,\ b \in \Gamma).$$

$G_\Gamma$ (с топологией, индуцированной топологией $\mathbb{H}^3$) будет непрерывной точно 2-транзитивной группой преобразований $\mathbb{H}$.

В разделе 3.2 дается определение непрерывной физической структуры ранга $(n+1, 2)$ и формулируется классификационная теорема, указывающая вид биформы.

Рассмотрим многоосновную алгебраическую систему $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$, где $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — произвольные множества, $R$ — хаусдорфово локально компактное, связное топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, $\langle,\rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ — отображение, называемое биформой. Будем предполагать, что биформа удовлетворяет условию невырожденности в смысле главы 1.

[18] J. Tits. *Sur les groupes doublement transitifs continus.* // Comment. Math. Helv., 26, pp. 203-224 (1952).

[19] J. Tits. *Sur les groupes doublement transitifs continus: Correction et compléments* // Comment. Math. Helv., 30, pp. 234-240 (1956).

Пусть задано натуральное число $n$. Обозначим за $\overline{R^n} \subseteq R^n$ множество всех таких $n$-ок элементов $R$, все элементы в каждой из которых попарно различны. Обозначим за $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}^n$ множество всех $n$-ок элементов $\mathcal{M}$, все элементы которых попарно различны.

**Определение 3.3** *Будем говорить, что система $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \langle , \rangle, R)$ является непрерывной физической структурой ранга $(n+1, 2)$, если она удовлетворяет, кроме заданных выше условий на биформу и топологию $R$, следующим аксиомам T1', A2'.*

**Аксиома T1'** Существует такая функция $F : R \times R^n \times R^n \to R$, определенная и непрерывная на подмножестве $R \times \overline{R^n} \times \overline{R^n}$, что для всех $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}},\ i \in \mathcal{M},\ \mathfrak{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}},\ \alpha \in \mathcal{N}$ выполнено

$$\langle i, \alpha \rangle = F(\langle i, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \alpha \rangle).$$

**Аксиома A2"** Для любого элемента $\alpha \in \mathcal{N}$ и любого $r \in R$ найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \alpha \rangle = r$. Для любой $n$-ки $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ и любой $n$-ки $r \in \overline{R^n}$ найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \alpha \rangle = r$.

Зададим на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ топологию таким же образом, как в главе 2.

**Теорема 3.4** *Для любой непрерывной физической структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ ранга $(n+1, 2)$, $n \geq 2$, выполняются следующие утверждения.*

1. *Ранг структуры должен принимать одно из значений $(3, 2)$, $(4, 2)$.*
2. *Для произвольных $Z \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $\omega \in \mathcal{N}$ отображения $\langle Z, \cdot \rangle : \mathcal{N} \to \overline{R^n}$ и $\langle \cdot, \omega \rangle : \mathcal{M} \to R$ будут гомеоморфизмами (далее в формулировке теоремы также считаем $Z \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $\omega \in \mathcal{N}$ произвольными).*
3. *В случае ранга $(3, 2)$ найдется такой гомеоморфизм $\varphi : R \to T$, где $T$ — топологическое пространство вещественных чисел $\mathbb{R}$, комплексных чисел $\mathbb{C}$ или кватернионов $\mathbb{H}$, что будет иметь место одно из следующих тождеств, выполненное для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ (обозначаем $\langle i, \omega \rangle = x_1$, $\langle Z, \alpha \rangle = (\xi_1, \xi_2)$, $+$ и $\cdot$ — обычные сложение и умножение в соответствующих топологических телах $T$):*

   $$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}((\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)) \cdot \varphi(x_1) + \varphi(\xi_2)), \qquad T = \mathbb{R},\ \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{H};$$

   $$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}(a \cdot \varphi(x_1) \cdot b + \varphi(\xi_2)),$$

   *где $T = H$, $\Gamma \subset \mathbb{H}$ и отображение $\gamma : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ описаны выше, $a = (\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)) \cdot b^{-1}$, $b = \gamma(|\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)|)$.*

4. *В случае ранга* $(4,2)$ *найдется такой гомеоморфизм* $\varphi : R \to T$ *(где* $T$ *— это вещественная проективная прямая* $RP_1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *или* $CP_1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$*), что для любых* $i \in \mathcal{M}$*,* $\alpha \in \mathcal{N}$

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}\left(\frac{a \cdot \varphi(x_1) + b}{c \cdot \varphi(x_1) + d}\right),$$

*где* $x_1 = \langle i, \omega \rangle$*,* $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \langle Z, \alpha \rangle$*,* $a$*,* $b$*,* $c$*,* $d$ *— такие элементы* $T$*, что дробно-линейное преобразование* $y(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ *переводит упорядоченную тройку точек* $(0, 1, \infty)$ *в* $(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \varphi(\xi_3))$*.*

**Замечание 3.1** *Все представленные в данной классификации структуры могут быть построены.*

Доказательство теоремы 3.4 опирается на следующие утверждения.

Фиксируем некоторые элементы $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{M}$, такие, что $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{M}^n$, и элемент $\omega \in \mathcal{N}$.

Определим так же, как в главе 1, отношение зависимости на $\mathcal{N}$ и связанный с ним набор функций $U_\mathcal{N} = U^1_\mathcal{N}$. (Обозначаем просто $U_\mathcal{N} = U$).

**Предложение 3.1 (А. А. Симонов, [4])** $U$ *является точно* $n$*-транзитивной группой преобразований множества* $R$*.*

На $U$ естественным образом задается топология, в которой $U$ оказывается гомеоморфным $\overline{R^n}$ (с индуцированной топологией пространства $R^n$).

**Предложение 3.2** $U$ *является непрерывной группой преобразований множества* $R$*.*

Мы сопоставили, таким образом, каждой непрерывной физической структуре $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ ранга $(n+1, 2)$ точно $n$-транзитивную непрерывную группу преобразований топологического пространства $R$. В предложении 3.3 показано, что для топологических пространств $R$ с достаточно хорошими свойствами (требуемыми определением 3.3) по заданной точно $n$-транзитивной непрерывной группе преобразований с некоторыми дополнительными условиями можно построить физическую структуру ранга $(n+1, 2)$, удовлетворяющую аксиомам T1' и A2", для которой $U$ соответствует множеству $U^1_\mathcal{N}$. В частности, если топология $R$ удовлетворяет требованиям определения 3.3, по заданной точно $n$-транзитивной непрерывной группе преобразований можно построить непрерывную физическую структуру, для которой $U = U^1_\mathcal{N}$, что доказывает замечание 3.1 к теореме 3.4 и делает теорему содержательной. Алгебраическая часть предложения 3.3 (существование соответствующей абстрактной физической структуры) была доказана А. А. Симоновым, топологизация проведена автором диссертации.

Предложения 3.1, 3.2 показывают, что $U$ является точно $n$-транзитивной непрерывной группой преобразований. Теперь мы можем воспользоваться известной классификацией таких групп для получения явного вида биформы, что и делается в разделе 3.5.

В приложениях рассматриваются и изучаются канонические примеры непрерывных (а значит, и алгебраических) физических структур больших рангов для $m \geq n$: $A_n(R)$, $B_n(R)$, $C_n(R)$, для которых $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ заданы как пространства строк над некоторым топологическим телом $R$ (в алгебраическом случае топология $R$ дискретна). Теоремы 1.4 и 2.4 показывают сильную эквивалентность абстрактных и непрерывных физических структур больших рангов, соответственно, одной из структур $A_n(R)$, $B_n(R)$, $C_n(R)$ (при $m \geq n$).

Автор глубоко признателен Л. А. Бокутю, А. А. Симонову, Г. Г. Михайличенко, А. С. Штерну, В. М. Гичеву за плодотворные обсуждения и поддержку.

## РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Фирдман И. А. *Алгебраическая классификация физических структур с нулем. I.* // Сиб. журн. индустр. математики. 2005. т. 8, №4(24), с. 131–148

[2] Фирдман И. А. *Алгебраическая классификация физических структур с нулем. II. Топологические аспекты.* // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. т. 9, №1(25), с. 135–146

[3] Фирдман И. А. *Алгебраическая теория биформ. Случай больших рангов.* // Алгебраическая теория биформ. Случай больших рангов: Препринт №ВМ07-01. Омск, ОмГТУ, 2007 – 73 с.

[4] Симонов А. А., Фирдман И. А. *Алгебраическая теория биформ. Случай ранга* $(n+1, 2)$*.* // Алгебраическая теория биформ. Случай ранга (n+1,2): Препринт №ВМ07-02. Омск, ОмГТУ, 2007 – 17 с.

Отпечатано с оригинал-макета,
предоставленного автором

Подписано в печать 5.04.2007 г.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе.
Усл. печ. л. 1,0 Уч.-изд. л. 1,0
Тираж 90 экз. Заказ №

Отпечатано в "Полиграфическом центре КАН"
644050, г. Омск, пр. Мира, д. 11а
тел.: (3812) 65-23-73
Лицензия ПЛД №58-47 от 21.04.97 г.