Омский государственный технический университет

На правах рукописи

УДК ???.???

Фирдман Илья Александрович

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ БИФОРМ

(01.01.06 – алгебра, математическая логика и теория чисел)

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Л. А. Бокуть

Омск, 2007

Оглавление

Введение

Данная работа посвящена алгебраическим аспектам и приложениям принципа феноменологической симметрии. Дадим сначала его общее описание.

Первоначально понятие феноменологической симметрии было введено в 1960-х годах Ю. И. Кулаковым [7]–[10] как основная идея его теории физических структур. Его общее содержание можно выразить следующим образом. Пусть даны множества произвольной природы $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, R произвольной природы, связанные отображением $\langle , \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ (*репрезентатором*, или, как мы будем его называть, *биформой*), описывающим взаимодействие элементов множеств $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$. Задаются, кроме того, два натуральных числа m и n — позднее будет видно, что они описывают размерность (в некотором смысле) множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ над R. Введем два интуитивных понятия, которые будут конкретизироваться в зависимости от дополнительной структуры, определенной на множествах $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ и R, и постановки интересующей нас задачи. Это понятие полного подмножества (для топологических пространств речь может идти о всюду плотных подмножествах, для пространств матриц над телом — о множестве всех необратимых матриц, и т. п.; может требоваться и точное совпадение полного подмножества со всем множеством) и зависимого подмножества (например, нигде не плотного, для топологических пространств, или, для пространств вида R^k с произвольной структурой R, подмножества, являющегося графиком некоторой функции $R^{k-1} \to R$).

Для упорядоченных наборов элементов $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{M}^k$, $\mathfrak{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{N}^l$ обозначим через $\langle I, \mathfrak{A} \rangle$ матрицу размера $k \times l$, составленную из всевозможных элементов вида $\langle i_p, \alpha_q \rangle$, $p = 1, \ldots, k$, $q = 1, \ldots, l$. Таким образом, $\langle I, \mathfrak{A} \rangle \in R^{kl}$.

Принцип феноменологической симметрии для многоосновной алгебраической системы $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ можно теперь представить как требование выполнения следующих двух условий:

1. Для любых элементов Z и Ω, соответственно, некоторых полных в $\mathcal{M}^n$ и $\mathcal{N}^m$ множеств $\mathcal{B}_\mathcal{M} \in \mathcal{M}^n$, $\mathcal{B}_\mathcal{N} \in \mathcal{N}^m$ (в некоторых постановках, когда речь идет лишь о наличии какой-то координатной системы, достаточно требование их непустоты) множество $\langle Z, \mathcal{N} \rangle = \{\langle Z, \alpha \rangle : \alpha \in \mathcal{N}\} \subseteq R^n$ полно в R^n, а множество $\langle \mathcal{M}, \Omega \rangle \subseteq R^m$ полно в R^m.

2. Множество $P = \{\langle I, \mathfrak{A} \rangle : I \in \mathcal{M}^{n+1}, \mathfrak{A} \in \mathcal{N}^{m+1}\} \subseteq R^{(n+1)(m+1)}$ зависимо в $R^{(n+1)(m+1)}$.

Система $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$, удовлетворяющая двум приведенным условиям, называется *(бинарной) физической структурой ранга (n+1,m+1)*. Отметим, что имеется и содержательная теория унарных физических структур [9], [15], [11], [16], [19], [20], определяющихся на одном множестве $\mathcal{M}$ близким образом, тесно связанная с геометрией расстояний.

Первая интерпретация принципа феноменологической симметрии была дана Кулаковым [7] в контексте исследования и классификации некоторого, достаточно разнообразного по природе исследуемых явлений, класса физических законов (включающего, например, второй закон Ньютона и закон Ома для полной цепи). При этом $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ понимались как множества взаимодействующих физических объектов, репрезентатор $\langle , \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ — как функция, описывающая их взаимодействие, ее область значений R отождествлялась с множеством вещественных чисел (этим предполагалось, что взаимодействие между парой объектов из рассматриваемых множеств может быть описано вещественным числом и измерено экспериментально). Другая предложенная Кулаковым интерпретация относилась к геометрии, где $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ рассматривались как многообразия размерности m и n, соответственно связанные метрикой $\langle , \rangle$. При этом всюду, где в этом могла возникнуть необходимость, предполагалась аналитичность рассматриваемых функций. Математическая формулировка понятия физической структуры, соответствующая этим интерпретациям, была дана Кулаковым [7], [8], [10] и затем уточнялась и улучшалась его учеником Г. Г. Михайличенко [14], [17], [21]. Ее общая суть может быть выражена следующим образом.

Пусть $R = \mathbb{R}$, для репрезентатора выполняется условие невырожденности (см. основной текст данной статьи), и введена топология поточечной сходимости на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ (см. там же). Первое из условий феноменологической симметрии понимается как наличие на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ локальных координат, вводимых посредством невырожденных (в аналитическом смысле) отображений $\langle \cdot, \Omega \rangle : \mathcal{M} \to R^m$ и $\langle Z, \cdot \rangle : \mathcal{N} \to R^n$. Зависимость множества P понимается как существование такой достаточно гладкой функции $\Phi : R^{(n+1)(m+1)} \to R$ (с градиентом, отличным от нуля почти всюду), что

$$\Phi(P) = 0. \tag{0.0.1}$$

В этой постановке Михайличенко была доказана следующая классификационная теорема [14], [21]. Во введенных выше локальных координатах (обозначаем координаты рассматриваемого нами элемента $i \in \mathcal{M}$ как $(x_1, \ldots, x_m)$, элемента $\alpha \in \mathcal{N}$ как $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$) функция $\langle , \rangle$ представляется следующим образом:

1. для $n = m$: $\langle i, \alpha \rangle = \psi^{-1}(x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n)$ или $\langle i, \alpha \rangle = \psi^{-1}(x_1\xi_1 + \ldots + x_{n-1}\xi_{n-1} + x_n + \xi_n)$ (эти два варианта эквивалентны при $n = m = 2$);

2. для $n = m + 1$: $\langle i, \alpha \rangle = \psi^{-1}(x_1\xi_1 + \ldots + x_{n-1}\xi_{n-1} + x_n)$;

3. для $n = 3$, $m = 1$: $\langle i, \alpha \rangle = \psi^{-1}(\,(x_1\xi_1 + \xi_2)/(x_1 + \xi_3)\,)$,

где ψ — локальный диффеоморфизм R. При $n \leq m$ классификация аналогична, для остальных случаев $n \geq m$ физических структур не существует. Классификационная теорема Михайличенко указывает для каждого из описанных случаев и вид функции Φ (она представляется некоторыми определителями).

Собственно, возможность построения классификации и делает теорию физических структур содержательной, позволяя находить конкретный вид отображения $\langle , \rangle$ по достаточно общим структурным свойствам его действия на множествах $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$.

Аналитическая аксиоматика физических структур естественным образом распространяется и на случай $R = \mathbb{R}^k$ (*k-метрические физические структуры*), однако, их классификация значительно сложнее — так, уже для двуметрических физических структур полная классификация дана лишь в случае ранга (n+1,2) [18]. Для выше комплексных аналитических физических структур ($R = \mathbb{C}$) классификация получена лишь в частных случаях [12], [13], позволяющих предположить о совпадении этой классификации, с точностью до переобозначений, с классификацией вещественных однометрических структур.

Отметим, что в аналитической формулировке теории физических структур имеется большое число дополнительных ограничений (таких, как аналитичность Φ, соответствие R с аналитической и алгебраической структурами $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), не являющихся необходимыми для корректной и содержательной постановки задачи — в уравнении (0.0.1) не используется ни аналитичность функции Φ (кроме предположения ее невырожденности), ни операции сложения и умножения на R, которые, тем не менее, возникают в итоговом выражении $\langle , \rangle$.

Это подводит к мысли о содержательности исследования феноменологической симметрии в алгебраическом контексте. Первая алгебраическая аксиоматика теории физических структур была дана в 1990-м году В. К. Иониным в работе [5] (для физических структур ранга (2,2) с отождествлением $\mathcal{M} = R = \mathcal{N}$). Им было показано, для ранга (2,2), наличие на R бинарной операции, согласующейся некоторым естественным образом с $\langle , \rangle$ (и описывающей ее действие) и задающей на R структуру группы. Тем самым была, с одной стороны, дана аксиоматика абстрактной группы на основе феноменологической симметрии, с другой стороны, построена классификация алгебраических (абстрактных) физических структур ранга $(2, 2)$ (в предложенной аксиоматике). Позднее А. Н. Бородиным [1] была рассмотрена аксиоматика физической структуры ранга (2,2), близкая к [5] (но без явно заданного соответствия $\mathcal{M} = R = \mathcal{N}$), в которой он также показал наличие на R согласованной с действием $\langle , \rangle$ групповой структуры (а также еще более естественно задающейся структуры груды) и решил классификационную задачу.

В работе [6] Иониным была сформулирована аксиоматика теории физических структур в большой степени общности и указана возможность получения из нее, в частности, алгебраической аксиоматики.

Отталкиваясь от работ Ионина, А. А. Симонов [23], [24] построил алгебраическую аксиоматику бинарной физической структуры произвольного ранга, некоторым образом конкретизирующую аксиоматику [6]. На ее основе им было доказано (для структур ранга $(n+1, 2)$ при произвольном $n \geq 2$) существование согласованных с действием $\langle , \rangle$ бинарных операций $\cdot$ и $\oplus$ на R, определяющих на R, при дополнительных предположениях, структуру почти кольца, и указаны возможности применения соответствующего результата к классификации физических структур соответствующих рангов. В работе [25] идеи феноменологической симметрии структуры ранга $(3, 2)$ были использованы Симоновым для построения связи между точно дважды транзитивными группами и алгебраическими системами, близкими к почти области.

Некоторые алгебраические свойства полиметрических физических структур малых рангов рассматривались также Михайличенко [18] в связи с интерпретацией его классификационных результатов.

В настоящей работе исследуются алгебраические аспекты феноменологической симметрии для физических структур более высоких рангов, а также наделенных топологией. Рассматривается алгебраическая аксиоматика бинарной физической $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ структуры произвольного ранга $(n+1, m+1)$ $(n, m \geq 2)$, родственная аксиоматике Симонова. Для значительного ранга, отличного от $(3,3)$, проводится их полная классификация, что позволяет, в частности, дать основанную на принципе феноменологической симметрии аксиоматику пары векторных пространств над телом R, связанную невырожденной билинейной формой (не задавая при этом явным образом структуры тела на R). Построена также тополого алгебраическая аксиоматику, позволяющая провести классификацию непрерывных физических структур ранга $(n+1, m+1)$ как при $n, m \geq 2$, $(n+1, m+1) \neq (3,3)$ (в этом случае R оказывается топологическим телом, а $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — топологическими векторными пространствами строк над ним), так и для ранга $(n+1, 2)$ (в этом случае феноменологическая симметрия эквивалентна наличию согласованной с биформой точно n-транзитивной непрерывной группы преобразований топологического пространства R).

Методы исследования В работе используются методы универсальной алгебры, линейной алгебры над телами и топологической алгебры.

Основные результаты

1. Дана алгебраическая аксиоматика (абстрактной) физической структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ ранга $(n+1, m+1)$, $n, m \geq 2$, и проведена их классификация в случае ранга, отличного от $(3,3)$, дающая явный вид биформы и согласованную с ней структуру тела на R.

2. Построена аксиоматика пары линейных пространств над телом с заданной на них невырожденной билинейной формой, основанная на принципе феноменологической симметрии и не предполагающая предварительно введенных операций сложения и умножения.

3. Дана аксиоматика непрерывной физической структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ ранга $(n+1, m+1)$, $n, m \geq 2$, и проведена их классификация в случае ранга, отличного от $(3,3)$, дающая явный вид биформы и согласованную с ней структуру топологического тела на R. Для случая $R = \mathbb{R}$, $R = \mathbb{C}$ или $R = \mathbb{H}$ ($\mathbb{H}$ — топологическое тело кватернионов) указано соответствие биформы с операциями исходного тела.

4. Дана аксиоматика непрерывной физической структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ ранга $(n+1, 2)$, $n \geq 2$, и проведена их классификация в случае ранга, дающая явный вид биформы и указывающая эквивалентность таких структур точно n-транзитивным непрерывным группам преобразований топологического пространства R.

Апробация работы Результаты диссертации были представлены на Международной конференции "Мальцевские чтения – 2004"(Новосибирск, 2004), Международной конференции "Мальцевские чтения – 2005"(Новосибирск, 2005). Результаты также докладывались на семинаре им. А. И. Ширшова "Теория колец"ИМ СО РАН, и Омском алгебраическом семинаре.

Публикации Все основные результаты диссертации опубликованы в работах [30]-[33]. Работа [33] написана автором совместно с А. А. Симоновым при равном вкладе соавторов.

Структура и объем работы Диссертация изложена на 138 страницах и состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы, и списка литературы.

Содержание диссертации В первой главе дается аксиоматика (абстрактной) физической структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ ранга $(n+1, m+1)$, $n, m \geq 2$, и для ранга, отличного от $(3,3)$ проводится их классификация. В разделе 1.1 приводятся факты теории билинейных форм, заданных на линейных пространствах над телом, необходимые для дальнейшего изложения. В разделе

1.2 строится базовая система аксиом (аксиомы A1–A3) абстрактной физической структуры (подраздел 1.2.1), в подразделе 1.2.2 из них выводятся альтернативные аксиомы A4–A6, а затем в подразделе 1.2.3 формулируются классификационные теоремы в нескольких различных вариантах аксиоматики (могущих включать сформулированные в том же подразделе дополнительные аксиомы A0 (аксиома нулей) и A3'). Согласно классификационным теоремам, на R можно задать посредством биформы структуру тела так, чтобы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ были, соответственно, m-мерным левым и n-мерным правым линейными пространствами над этими телами, а $\langle,\rangle$ задавалась одной из формул (1.2.1)–(1.2.4). При выполнении аксиомы нулей $\langle,\rangle$ будет невырожденной билинейной формой, задающейся формулой (1.2.1).

В разделе 1.3 проводится доказательство классификационных теорем. В подразделе 1.3.1 доказываются простые предварительные леммы и устанавливается разбиение хода дальнейших рассуждений на три случая: случай выполнения аксиомы нулей (наличия нулей в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$), случай наличия нулей в $\mathcal{M}$ и отсутствия в $\mathcal{N}$ (ему симметричен случай наличия нулей в $\mathcal{N}$ и отсутствия в $\mathcal{M}$) и случай отсутствия нулей в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Первый из этих случаев разбирается в подразделе 1.3.2, второй — в подразделе 1.3.3, последний — в подразделе 1.3.4.

В главе 2 топологизуются результаты главы 1: дается аксиоматика непрерывной физической структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ ранга $(n+1, m+1)$, $n, m \geq 2$, и для ранга, отличного от $(3,3)$ проводится их классификация. В разделе 2.1 приводятся факты из топологической алгебры, необходимые для дальнейшего изложения. В разделе 2.2 дается аксиоматика непрерывной физической структуры и формулируются классификационные теоремы. Первая из них утверждает, что для непрерывной физической структурой ранга $(n+1, m+1)$, отличного от $(3,3)$ (при $n, m \geq 2$) на R можно задать посредством биформы структуру тела, согласованную с топологией. При этом $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ будут, соответственно, левым m-мерным и правым n-мерным топологическими векторными пространствами над R, а биформа будет задаваться одной из формул (1.2.1)–(1.2.4) главы 1. Вторая теорема дает выражение биформы в соответствии с уже заданной на R структурой топологического тела вещественных чисел, комплексных чисел или кватернионов.

В разделе 2.3 выводятся простые следствия из аксиом непрерывной физической структуры и показывается, что каждая такая структура будет (абстрактной) физической структурой в смысле главы 1, что дает возможность применить к ним соответствующую классификационную теорему. В разделе 2.4 приводятся результаты А. А. Симонова [24], связанные с введенной им концепцией обобщенного матричного умножения, и построенный им явный вид функции F из аксиомы T1 (близкая к которой была сформулирована им в [24]). В разделе 2.5 проводится топологизация результатов предыдущих двух разделов и завершается доказательство классификационных теорем.

В главе 3 дается аксиоматика непрерывной физической структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ ранга $(n+1, 2)$, строится соответствие между ними и точно n-транзитивными непрерывными группами преобразований топологического пространства R и дается вид соответствующих биформ. В разделе 3.1 приводятся известные классификационные результаты для n-транзитивных непрерывных групп преобразований, необходимые для дальнейшего изложения. В разделе 3.2 дается аксиоматика непрерывной физической структуры ранга $(n + 1, 2)$ (немного отличающаяся от аксиоматики структур больших рангов, данной в главе 2) и формулируется классификационная теорема, указывающая для них, в случае ранга, отличного от $(2, 2)$, вид биформы (случай ранга $(2, 2)$ разобран ранее В. К. Иониным [5], его топологизация тривиальна).

В разделе 3.3 доказываются предварительные леммы, являющиеся перенесением в рассматриваемую ситуацию нужных нам утверждений из глав 1 и 2. В разделе 3.4 заданной физической структуре приводится в соответствие точно n-транзитивная непрерывная группа U преобразований R.

Отметим, что алгебраическая часть этого результата (без предположения непрерывности физической структуры и вывода о непрерывности U; говоря более строго, результат, сформулированный в предположении дискретности топологии на R) принадлежит А. А. Симонову [33], в то время как все его топологические аспекты — автору настоящей работы. Симонову принадлежит, таким образом, предложение 3.1 и дискретная часть предложения 3.3, автору диссертации — предложение 3.2 и непрерывная часть предложения **??**. В разделе 3.5 выводится явное выражение для биформы. В подразделе 3.5.1 разбирается случай $n = 3$, в подразделе 3.5.2 — случай $n = 4$. Случай $n \geq 5$ невозможен.

В приложении 1 приводятся канонические примеры непрерывных физических структур больших рангов (согласно разделу 2.3 главы 2, являющиеся также и абстрактными) и доказывается выполнение для них всех требуемых аксиом. В приложении 2 для полноты изложения доказываются известные, как предполагает автор (ему не удалось найти соответствующих ссылок в литературе), леммы о всюду плотности подмножества обратимых матриц над топологических телом в топологическом пространстве всех квадратных матриц фиксированного размера, и о наличии в этом подмножестве некоторой открытой области того же пространства, необходимые, чтобы проверить для структур из приложения 1 аксиомы T2 и T3 главы 2.

Автор глубоко признателен Л. А. Бокутю, А. А. Симонову, Г. Г. Михайличенко, А. С. Штерну, В. М. Гичеву за плодотворные обсуждения и поддержку.

Глава 1

Алгебраическая классификация физических структур большого ранга

1.1 Некоторые факты из теории билинейных форм

Приведем для полноты изложения некоторые факты из теории билинейных форм, на которые мы будем опираться в этой главе. Все факты, даются по [3].

Далее в этом пункте F — тело, V — левое линейное пространство над F, W — правое линейное пространство над F, $\Phi : V \times W \to F$ — билинейная форма.

Определение 1.1. *Форма Φ называется вырожденной справа (соответственно слева), если существует отличный от нуля элемент $y_0 \in W$ ($x_0 \in V$) такой, что $\Phi(x, y_0) = 0$ для любого $x \in V$ (соответственно $\Phi(x_0, y) = 0$ для любого $y \in W$). Форма Φ называется вырожденной, если она вырождена справа или слева.*

Теорема 1.1. *Пусть V и W конечномерны над F. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Φ невырождена слева;*

2. *Φ невырождена справа;*

3. *Φ невырождена.*

Теорема 1.2. *Пусть V, W конечномерны над F, билинейная форма Φ, определенная над ними, невырождена. Тогда $\dim V = \dim W$, и для всякого базиса (e_k) пространства V существует такой базис (f_l) пространства W, что $\Phi(e_k, f_l) = \delta_{kl}$ ($k, l = 1, \ldots, \dim V$, δ_{kl} — символ Кронекера).*

Определение 1.2. *Базисы (e_k), (f_l), описанные в теореме 1.2, будем называть дуальными базисами пространств V, W.*

Лемма 1.1. *Пусть (e_k), (f_l) — дуальные базисы конечномерных пространств V, W, соответственно, форма Φ невырождена. Тогда для любых $x \in V$, $y \in W$*

$$\Phi(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \tag{1.1.1}$$

где $n = \dim V = \dim W$, $x_k = \Phi(x, f_k)$, $y_k = \Phi(e_k, y)$, $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть $x = \sum_{k=1}^{n} x'_k \cdot e_k$ — разложение x по базису e_k. Тогда для произвольного $k = 1, \ldots, n$ $x_k = \Phi(x, f_k) = \sum_{l=1}^{n} x'_l \cdot \Phi(e_l, f_k) = x'_k$. Таким образом, $x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k$, и аналогично $y = \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot y_k$. Теперь, расписывая $\Phi(x, y)$ по билинейности и пользуясь тождеством $\Phi(e_k, f_l) = \delta_{kl}$, сразу получаем (1.1.1). □

Определение 1.3. *Пусть L — линейное подпространство V. Обозначим*

$$L^{\perp} = \{y \in W \mid \Phi(x, y) = 0 \text{ для всех } x \in L\} \subseteq W.$$

$L^{\perp}$ является линейным подпространством в W и называется ортогональным к подпространству L. Аналогично определяются ортогональные подпространства к пространствам W.

Теорема 1.3. *Пусть пространства V, W конечномерны, билинейная форма Φ невырождена. Тогда для любого линейного подпространства L пространства V или W выполнено $L^{\perp\perp} = L$.*

1.2 Аксиоматика и формулировка теорем

1.2.1 Базовая система аксиом

Пусть дана (многоосновная) алгебраическая система $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$, где $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, R — произвольные множества (R содержит более одного элемента), $\langle,\rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ — некоторое отображение, называемое *биформой* и удовлетворяющее условию *невырожденности*:

$$\text{для любых } i, i' \in \mathcal{M},\ i \neq i',\ \text{найдется } \alpha \in \mathcal{N},\ \text{такой, что } \langle i, \alpha\rangle \neq \langle i', \alpha\rangle,$$

$$\text{для любых } \alpha, \alpha' \in \mathcal{N},\ \alpha \neq \alpha',\ \text{найдется } i \in \mathcal{M},\ \text{такой, что } \langle i, \alpha\rangle \neq \langle i, \alpha'\rangle.$$

(то есть элементы $\mathcal{M}$ и, соответственно, $\mathcal{N}$, считаются равными, если $\langle,\rangle$ действует на них одинаково).

Мы считаем заданными также целые положительные числа n и m; пару $(n+1, m+1)$ будем называть *рангом* данной системы.

В дальнейшем мы будем использовать следующую сокращенную форму записи: для $i_1, \ldots, i_k, i \in \mathcal{M}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \alpha \in \mathcal{N}$ мы можем обозначить $(i_1, \ldots, i_k) = I \in \mathcal{M}^k$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = \mathfrak{A} \in \mathcal{N}^l$. В этом случае будем под $\langle I, \alpha\rangle$ понимать вектор (здесь и далее мы, допуская некоторую вольность в употреблении терминов, называем так упорядоченные наборы элементов R, не подразумевая этим наличия линейной структуры) $(\langle i_1, \alpha\rangle, \ldots, \langle i_k, \alpha\rangle) \in R^k$, под $\langle i, \mathfrak{A}\rangle$ — вектор $(\langle i, \alpha_1\rangle, \ldots, \langle i, \alpha_l\rangle) \in R^l$, под $\langle I, \mathfrak{A}\rangle$ — матрицу

$$\langle I, \mathfrak{A}\rangle = \begin{pmatrix} \langle i_1, \alpha_1\rangle & \ldots & \langle i_1, \alpha_l\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle i_k, \alpha_1\rangle & \ldots & \langle i_k, \alpha_l\rangle \end{pmatrix} \in R^{kl}.$$

Мы будем часто иметь дело с отображениями $\langle I, \cdot\rangle : \mathcal{N} \to R^k$, $I \in \mathcal{M}^k$, определенными по правилу $\langle I, \cdot\rangle : \alpha \mapsto \langle I, \alpha\rangle$, $\alpha \in \mathcal{N}$. Будем, в случаях, когда сочтем это удобным, обозначать такие отображения как $\pi_I : \mathcal{N} \to R^k$. Аналогично определенные отображения $\langle \cdot, \mathfrak{A}\rangle : \mathcal{M} \to R^k$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{N}^k$, будем обозначать $\pi^{\mathfrak{A}} : \mathcal{M} \to R^k$.

Пусть заданы некоторые упорядоченные наборы $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{M}^n$ и $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \mathcal{N}^m$; мы будем далее называть их базами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, соответственно.

Пусть выполняются следующие аксиомы на $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ (будем называть их базовым набором аксиом).

Аксиома А1 Пусть $I' \in \mathcal{M}^n$, $i, i' \in \mathcal{M}$, $\mathfrak{A}' \in \mathcal{N}^m$, $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$. Пусть $\langle Z, \mathfrak{A}' \rangle = \langle I', \Omega \rangle$, $\langle i', \Omega \rangle = \langle i, \mathfrak{A}' \rangle$, $\langle Z, \alpha' \rangle = \langle I', \alpha \rangle$. Тогда $\langle i', \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$.

Аксиома А2 Для любого $r \in R^n$ найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle Z, \alpha \rangle = r$; для любого $r \in R^m$ найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \Omega \rangle = r$.

Введем на $\mathcal{M}$ следующее отношение *зависимости*. Будем говорить, что $i \in \mathcal{M}$ зависит от системы элементов $(i_1, \ldots, i_k) = I \in \mathcal{M}^k$, если для любых $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$

$$\langle I, \alpha \rangle = \langle I, \alpha' \rangle \text{ влечет } \langle i, \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle.$$

Совокупность всех элементов $\mathcal{M}$, зависящих от $i_1, \ldots, i_k \in \mathcal{M}$, будем обозначать $[i_1, \ldots, i_k]$. Будем называть систему элементов $i_1, \ldots, i_k \in \mathcal{M}$ *независимой*, если она не зависит ни от какой меньшей системы элементов $\mathcal{M}$, то есть не существует таких $i'_1, \ldots, i'_{k-1} \in \mathcal{M}$, что $i_1, \ldots, i_k \in [i'_1, \ldots, i'_{k-1}]$. В случае $k = 1$ независимость элемента i означает, что $i \notin [\emptyset]$. Значение зависимости такого рода будет детально рассмотрено позже.

Аналогично определяется отношение зависимости на $\mathcal{N}$ и вытекающие из него понятия.

Будем предполагать выполненной следующую аксиому.

Аксиома А3 Пусть $k \in \{1, 2, 3\}$, $(i_1, \ldots, i_k) = I \in \mathcal{M}^k$ независимы. Тогда для любого вектора $r \in R^k$ найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \alpha \rangle = r$. Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \mathfrak{A} \in \mathcal{N}^k$ независимы. Тогда для любого $r \in R^k$ найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \mathfrak{A} \rangle = r$.

Определение 1.4. *Многоосновную алгебраическую систему $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$, удовлетворяющую указанным выше условиям (R содержит более одного элемента, биформа невырождена, выполняются* *аксиомы A1, A2, A3) будем называть (абстрактной) физической структурой ранга* $(n+1, m+1)$.

Определение 1.5. *Две физические структуры* $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ *и* $(\mathcal{M}', \mathcal{N}', R', \langle,\rangle')$ *ранга* $(n+1, m+1)$ *будем называть сильно эквивалентными, если найдутся такие биективные отображения* $\mu : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, $\nu : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$, *что для любых* $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ *будет выполнено*

$$\langle \mu(i), \nu(\alpha)\rangle' = \langle i, \alpha\rangle.$$

1.2.2 Следствия базовых аксиом

В этом пункте мы получим некоторые следствия аксиом A1 и A2.

Предложение 1.1. *Если* $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, *то из* $\langle Z, \alpha\rangle = \langle Z, \alpha'\rangle$ *следует* $\alpha = \alpha'$. *Если* $i, i' \in \mathcal{M}$, *то из* $\langle i, \Omega\rangle = \langle i', \Omega\rangle$ *следует* $i = i'$.

Доказательство. Докажем, например, первое утверждение. Пусть $i = i'$ — произвольный элемент $\mathcal{M}$. Обозначим $\mathfrak{A}' = \Omega \in \mathcal{N}^m$. Тогда, в силу аксиомы A1, для любых $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, удовлетворяющих условием предложения, получаем $\langle i, \alpha\rangle = \langle i, \alpha'\rangle$, а поскольку это будет выполняться для любого $i \in \mathcal{M}$, то $\alpha = \alpha'$ из невырожденности биформы. $\square$

Нами получена, с учетом аксиомы A2, биективность отображений π_Z и π^Ω (будем называть их координатизующими отображениями). Для произвольного элемента $i \in \mathcal{M}$ будем теперь называть вектор $\langle i, \mathfrak{A}\rangle \in R^m$ дуальными координатами i (в базе Ω); аналогично для $\alpha \in \mathcal{N}$ будем называть $\langle I, \alpha\rangle \in R^n$ дуальными координатами α (в базе Z).

Определим для каждого элемента $i \in \mathcal{M}$ функцию $U[i] : R^n \to R$ следующим равенством:

$$U[i](\langle Z, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha\rangle \text{ для всех } \alpha \in \mathcal{N}.$$

Определение корректно в силу предложения 1.1; функции определены на всем R^n в силу аксиомы A2. Пусть теперь

$$U^n_{\mathcal{M}} = \{U[i] \mid i \in \mathcal{M}\}.$$

Для $k = 0, \ldots, n$ определим $U^k_{\mathcal{M}}$ как подмножество функций из $U^n_{\mathcal{M}}$, постоянных на последних $n - k$ координатах (и рассматриваемых лишь на первых k — элементы $U^k_{\mathcal{M}}$ являются функциями $R^k \to R$). Обозначим $U_{\mathcal{M}} = \bigsqcup_{k=0}^n U^k_{\mathcal{M}}$. Заметим, что оператор $U : \mathcal{M} \to U^n_{\mathcal{M}}$ не только сюръективен, но и инъективен. Действительно, пусть $i, i' \in \mathcal{M}$, $U[i] = U[i']$. Тогда $\langle i, \alpha \rangle = U[i](\langle Z, \alpha \rangle) = \langle i', \alpha \rangle$ для любого $\alpha \in \mathcal{N}$, откуда, ввиду невырожденности биформы, $i = i'$. Таким образом, оператор U обратим. Далее мы будем обозначать за $V : U^n_{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ обратный оператор, сопоставляющий каждой функции из $U^n_{\mathcal{M}}$ элемент $\mathcal{M}$, которым она задана.

Аналогично с помощью базы Ω определяется набор функций $U_{\mathcal{N}}$ и операторы $U : \mathcal{N} \to U^m_{\mathcal{N}}$ и $V : U^m_{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$.

Введем для удобства обозначений следующие операторы: $L_k : U^k_{\mathcal{M}} \to U^n_{\mathcal{M}}$, $P_k : U^n_{\mathcal{M}} \to U^k_{\mathcal{M}}$, $L^k_l : U^l_{\mathcal{M}} \to U^k_{\mathcal{M}}$, $P^k_l : U^k_{\mathcal{M}} \to U^l_{\mathcal{M}}$, $k, l = 0, \ldots, n$, $l \leq k$. P_k — это оператор, сопоставляющий функции из $U^n_{\mathcal{M}}$, постоянной на последних $n - k$ координатах, соответствующую функцию из $U^k_{\mathcal{M}}$ (ее ограничение на первые k координат). На других функциях из $U^n_{\mathcal{M}}$ P_k не определяется. L_k — это оператор, обратный к P_k. Он определен на всем $U^k_{\mathcal{M}}$, согласно определению $U^k_{\mathcal{M}}$. По определению полагаем $L^k_l = P_k \circ L_l$, $P^k_l = L_l \circ P_k$. Аналогично действующие операторы вводятся и для функций из $U_{\mathcal{N}}$. Обозначать мы их будем также — область определения всякий раз будет очевидна из контекста.

Отметим некоторые свойства $U_{\mathcal{M}}$, $U_{\mathcal{N}}$.

Предложение 1.2. *Множества функций $U_{\mathcal{M}}$, $U_{\mathcal{N}}$ замкнуты относительно взятия суперпозиции (в которой участвуют функции лишь из одного множества).*

Доказательство. Докажем утверждение для $U_{\mathcal{M}}$, для $U_{\mathcal{N}}$ оно получается так же. Рассматриваем произвольную суперпозицию $u(u_1, \ldots, u_k)$. Все функции $u_1, \ldots, u_k, u$ поднимаем с помощью оператора L_k до функций из $U^n_{\mathcal{M}}$ (при этом набор $u_1, \ldots, u_k$ для корректности записи можно дополнить произвольными функциями $u_{k+1}, \ldots, u_n \in U^n_{\mathcal{M}}$ — u все равно не зависит от последних $n-k$ координат). Таким образом, мы можем рассматривать только случай $k = n$. Пусть $i'_1 = V[u_1], \ldots, i'_n = V[u_n]$, $i = V[u]$. Фиксируем произвольный $\alpha \in \mathcal{N}$. Находим (пользуясь аксиомой A2) $\mathfrak{A}' \in \mathcal{N}^m : \langle Z, \mathfrak{A}' \rangle = \langle I', \Omega \rangle$, $\alpha' \in \mathcal{N} : \langle Z, \alpha' \rangle = \langle I', \alpha \rangle$, $i' \in \mathcal{M} : \langle i', \Omega \rangle = \langle i, \mathfrak{A}' \rangle$, тогда $\langle i', \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$ в силу аксиомы A1. Функция $U[i'] \in U_{\mathcal{M}}$ и будет тогда искомой суперпозицией. Действительно, $\langle i', \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle = u(\langle Z, \alpha' \rangle) = u(\langle I', \alpha \rangle) = u(u_1(\langle Z, \alpha \rangle), \ldots, u_n(\langle Z, \alpha \rangle))$, что и требовалось. $\square$

Предложение 1.3. *Пусть $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{M}^k$, $u \in U^k_{\mathcal{M}}$. Тогда найдется такой элемент $i \in [i_1, \ldots, i_k]$, что для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle i, \alpha \rangle = u(\langle I, \alpha \rangle)$. Аналогичное утверждение справедливо для $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{N}$, $u \in U^k_{\mathcal{N}}$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Возьмем суперпозицию $u' = u(U[i_1], \ldots, U[i_k]) \in U^n_{\mathcal{M}}$ (согласно предложению 1.2). Тогда можно построить элемент $i = V[u'] \in \mathcal{M}$. При этом для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ выполнено $\langle i, \alpha \rangle = u'(\langle Z, \alpha \rangle) = u(U[i_1](\langle Z, \alpha \rangle), \ldots, U[i_k](\langle Z, \alpha \rangle)) = u(\langle i_1, \alpha \rangle, \ldots, \langle i_k, \alpha \rangle)$, что и требовалось. $\square$

Мы можем теперь ввести для каждого набора $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{M}^k$ оператор $V_I[u] : U^k_{\mathcal{M}} \to [i_1, \ldots, i_k] \subseteq \mathcal{M}$, определенный на всем $U^k_{\mathcal{M}}$, следующим образом: для $u \in U^k_{\mathcal{M}}$ полагаем $V_I[u] = i \in [i_1, \ldots, i_k]$, такому, что для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle i, \alpha \rangle = u(\langle I, \alpha \rangle)$.

Мы определим также обратные операторы $U_I : [i_1, \ldots, i_k] \to R^{R^k}$, сопоставляющие каждому элементу $i \in [i_1, \ldots, i_k]$ функцию $u : R^k \to R$ (не обязательно лежащую в $U^k_{\mathcal{M}}$), такую, что для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle i, \alpha \rangle = u(\langle I, \alpha \rangle)$.

Аналогично вводятся операторы $V_{\mathfrak{A}}$, $U_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{N}^k$.

Замечание 1.1. Рассуждение доказательства предложения 1.3 можно обратить, то есть вывести утверждение предложения 1.2 из утверждения предложения 1.3, пользуясь лишь определением $U_{\mathcal{M}}$, $U_{\mathcal{N}}$.

Доказательство. Докажем замкнутость $U_{\mathcal{M}}$ относительно суперпозиции. Как и при доказательстве предложения 1.2, мы можем считать, что нам даны $u_1, \ldots, u_n, u \in U^n_{\mathcal{M}}$. Пусть $i_1 = V[u_1], \ldots, i_k = V[u_k]$. Обозначим $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{M}^k$. Пусть $i = V_I[u]$, $u' = U[i] \in U^k_{\mathcal{M}}$. Тогда для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ получаем $u'(\langle Z, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha\rangle = u(\langle i_1, \alpha\rangle, \ldots, \langle i_k, \alpha\rangle) = u(u_1(\langle Z, \alpha\rangle), \ldots, u_k(\langle Z, \alpha\rangle)$. Поскольку в силу аксиомы A2 $\{\langle Z, \alpha\rangle \mid \alpha \in \mathcal{N}\} = R^n$, получаем отсюда $u' = u(u_1, \ldots, u_n)$, то есть суперпозиция действительно лежит в $U_{\mathcal{M}}$. □

Будем далее рассматривать утверждения предложений 1.1–1.3 как дополнительные аксиомы. Назовем предложение 1.2 (замкнутость $U_{\mathcal{M}}$ и $U_{\mathcal{N}}$ относительно суперпозиции) аксиомой A4, предложение 1.3 (полнота $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ относительно зависимости) — аксиомой A5, предложение 1.1 (инъективность координатизующих отображений) — аксиомой A6. Вся совокупность аксиом A1–A6 при этом, конечно, будет зависима, и при формулировке основных теорем мы будем включать в условия лишь часть этого списка.

1.2.3 Формулировка теорем

Пусть F — произвольное тело. Далее нам понадобятся обозначения для следующих множеств функций n переменных над F.

$$L^l_n(F) = \{f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n \,|\, a_1, \ldots, a_n \in F\};$$
$$L^{l,a}_n(F) = \{f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n + a_{n+1} \,|\, a_1, \ldots, a_{n+1} \in F\};$$
$$L^{l,s}_n(F) = \{f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n \,|\, a_1, \ldots, a_n \in F,\ a_1 + \ldots a_n = e\};$$
$$L^{l,s,a}_n(F) = \{f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n + a_{n+1} \,|\, a_1, \ldots, a_{n+1} \in F,\ a_1 + \ldots a_n = e\}.$$

Аналогичным образом, но с домножением переменных $x_1, \dots, x_n$ на $a_1, \dots, a_n$ справа, определяются множества функций $L_n^r(F)$, $L_n^{r,a}(F)$, $L_n^{r,s}(F)$, $L_n^{r,s,a}$.

Теорема 1.4. *Пусть для системы $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ ранга $(n+1, m+1)$, такого, что $m, n \geq 2$, $(n+1, m+1) \neq (3,3)$, выполнена следующая совокупность аксиом: A2, A3, одно из следующих трех сочетаний: A1; A4 и A6; A5 и A6, а также невырожденность биформы и наличие в R более, чем одного элемента. Тогда*

1. *Мы можем выбрать элементы $O, e \in R$ (при этом в качестве e можно взять произвольный элемент R, не равный O) и задать на R бинарные операции $+$ и $\cdot$ так, что $(R, +, \cdot, O, e)$ будет телом.*

2. *$\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ являются, соответственно, левым m-мерным и правым n-мерным линейными пространствами над телом R, определенным в предыдущем пункте.*

3. *$m = n$, $m = n+1$ или $m = n-1$.*

4. *Можно выбрать такие наборы элементов $(z'_1, \dots, z'_n) = Z' \in \mathcal{M}^n$, $(\omega'_1, \dots, \omega'_m) = \Omega' \in \mathcal{N}^m$, что отображения $\langle Z', \cdot\rangle : \mathcal{N} \to R^n$ и $\langle \cdot, \Omega'\rangle : \mathcal{M} \to R^m$ биективны, и для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ биформа $\langle,\rangle$ представляется в одном из следующих видов (в первом и последнем случаях $m = n$, во втором — $m = n+1$, в третьем — $m = n-1$) :*

$$\langle i, \alpha\rangle = x_1 \cdot \xi_1 + \ldots + x_n \cdot \xi_n; \tag{1.2.1}$$

$$\langle i, \alpha\rangle = (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 + \ldots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n + x_{n+1}; \tag{1.2.2}$$

$$\langle i, \alpha\rangle = x_1 \cdot (\xi_1 - \xi_n) + \ldots + x_{n-1} \cdot (\xi_{n-1} - \xi_n) + \xi_n; \tag{1.2.3}$$

$$\langle i, \alpha\rangle = (x_1 - x_n) \cdot (\xi_1 - \xi_n) + \ldots + (x_{n-1} - x_n) \cdot (\xi_{n-1} - \xi_n) + x_n + \xi_n, \tag{1.2.4}$$

где $\langle i, \Omega'\rangle = (x_1, \dots, x_m)$, $\langle Z', \alpha\rangle = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $+$ и $\cdot$ — операции в теле R.

5. *Наборы функций $U^n_{\mathcal{M}}$ и $U^m_{\mathcal{N}}$, определенных в аксиомах A4 и A5, имеют следующий вид, в зависимости от того, какой из формул (1.2.1)–(1.2.4) задана* $\langle,\rangle$.

$$\begin{aligned}
&(1.2.1) \ : \ U^n_{\mathcal{M}} = L^l_n(R),\ U^m_{\mathcal{N}} = L^r_n(R);\\
&(1.2.2) \ : \ U^n_{\mathcal{M}} = L^{l,a}_n(R),\ U^m_{\mathcal{N}} = L^{r,s}_{n+1}(R);\\
&(1.2.3) \ : \ U^n_{\mathcal{M}} = L^{l,s}_n(R),\ U^m_{\mathcal{N}} = L^{r,a}_{n-1}(R);\\
&(1.2.4) \ : \ U^n_{\mathcal{M}} = L^{l,s,a}_n(R),\ U^m_{\mathcal{N}} = L^{r,s,a}_n(R).
\end{aligned}$$

Замечание 1.2. Из теоремы следует, что любая физическая структура соответствующего ранга (при условии $m > n$) сильно эквивалентна одной из структур $A_n(R)$, $B_n(R)$, $C_n(R)$, рассмотренных в приложении 1, если на R задана структура тела, определенная в доказательстве теоремы. В качестве задающих эквивалентность отображений для этого достаточно взять отображения $\mu = \pi^{\Omega'}$, $\nu = \pi_{Z'}$.

В приложении 1 показано также, что алгебраические системы $A_n(R)$, $B_n(R)$, $C_n(R)$ удовлетворяют всем аксиомам физической структуры и, значит, условиям теоремы, что делает ее содержательной.

Как было показано выше, вариант аксиоматики A2, A3, A4 (или A5), A6 является слабейшим из рассматривающихся в условии, поэтому нам достаточно доказать теорему только для него, причем мы можем считать выполненными сразу обе аксиомы A4, A5 как эквивалентные по модулю остальных.

Мы будем также доказывать более частную теорему. Рассмотрим следующую дополнительную аксиому.

Аксиома A0 В множестве $\mathcal{M}$ есть такой элемент z_0, что для любых $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$ выполнено $\langle z_0, \alpha\rangle = \langle z_0, \alpha'\rangle$. Существует такой элемент $\omega_0 \in \mathcal{N}$, что для любых $i, i' \in \mathcal{M}$ выполнено $\langle i, \omega_0\rangle = \langle i', \omega_0\rangle$.

Кроме того, мы будем называть утверждение аксиомы A3, берущееся только для $k = 1, 2$, *аксиомой A3'*.

Теорема 1.5. *Пусть для системы $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ ранга $(n+1, m+1)$, такого, что $m, n \geq 1$, $(n+1, m+1) \neq (2,2)$, выполнена следующая совокупность аксиом:A0, A2, A3', одно из следующих трех сочетаний: A1; A4 и A6; A5 и A6, а также невырожденность биформы и наличие в R более, чем одного элемента. Тогда*

1. *$m = n$.*

2. *Мы можем выбрать элементы $O, e \in R$ (при этом в качестве e можно взять произвольный элемент R, не равный O) и задать на R бинарные операции $+$ и $\cdot$ так, что $(R, +, \cdot, O, e)$ будет телом.*

3. *$\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ являются, соответственно, левым и правым n-мерными линейными пространствами над телом R, определенным в предыдущем пункте.*

4. *$\langle,\rangle$ является невырожденной билинейной формой на векторных пространствах $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$.*

5. *Можно выбрать такие дуальные базисы $(z'_1, \ldots, z'_n) = Z' \in \mathcal{M}^n$, $(\omega'_1, \ldots, \omega'_n) = \Omega' \in \mathcal{N}^n$, векторных пространств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, что отображения $\langle Z', \cdot\rangle : \mathcal{N} \to R^n$ и $\langle \cdot, \Omega'\rangle : \mathcal{M} \to R^n$ будут биективны.*

6. *Наборы функций $U^n_{\mathcal{M}}$ и $U^n_{\mathcal{N}}$, определенных в аксиомах A4 и A5, есть множества $L^l_n(R)$ и $L^r_n(R)$, соответственно.*

Как показано в приложении 1, для пары из n-мерных левого и правого, соответственно, линейных пространств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ над телом R, если принять за Z, Ω их дуальные базисы, выполняются все условия теоремы 1.5.

1.3 Доказательство теорем

Мы предполагаем далее выполненными утверждения аксиом A2, A3, A4, A5, A6 (которые выполняются в любом из вариантов аксиоматики теоремы 1.4). Аксиома A1 прямо использоваться не будет. Аксиома A0 будет использоваться только в одном из пунктов, что будет специально оговорено.

1.3.1 Предварительные леммы

Отметим, что пространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в условиях доказываемой теоремы симметричны. Поэтому, помимо каждого из сформулированных здесь утверждений, будет подразумеваться выполненным также и утверждение, получаемое из него перестановкой множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ ролями (мы не будем формулировать их отдельно). Иногда мы будем называть такие утверждения дуальными.

В этом пункте не будет использоваться аксиома A3.

Общие утверждения

Далее всюду, где не оговорено противного, k предполагается произвольным целым числом от 1 до n.

Покажем симметричность набора $U_{\mathcal{M}}$ относительно выбора порядка координат.

Лемма 1.2. *Набор $U^k_{\mathcal{M}}$ содержит все функции $u_t : R^k \to R$, такие, что $\rho_t(r_1, \dots, r_k) = r_t$ для любых $r_1, \dots, r_k \in R$, $t = 1, \dots, k$. Будем называть такие функции координатными.*

Доказательство. Легко видеть, $\rho_t = P_k(U[z_t]) \in U^k_{\mathcal{M}}$. □

Далее мы закрепим обозначение ρ_t (t —целое) для координатных функций $R^k \to R$ (всюду, где это будет неочевидно, мы будем явно указывать k).

Лемма 1.3. *Пусть $\tau : R^k \to R^k$ — некоторая перестановка координат в декартовом произведении: для любых $r_1, \dots, r_k \in R^k$ полагаем $\tau(r_1, \dots, r_k) = (r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(k)})$, где $\sigma \in S_k$. Пусть $u \in U^k_{\mathcal{M}}$. Тогда $u \circ \tau \in U^k_{\mathcal{M}}$.*

Доказательство. Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_k \in U^k_{\mathcal{M}}$ — координатные функции. Тогда, очевидно, $u \circ \tau = u(\rho_{\sigma(1)}, \ldots, \rho_{\sigma(k)}) \in U^k_{\mathcal{M}}$ по аксиоме A4. □

Следующее утверждение (формулирующееся несколько более общим образом) показывает, что функции из наборов $U_{\mathcal{M}}$ и $U_{\mathcal{N}}$ коммутируют между собой, при надлежащем понимании их суперпозиции.

Предложение 1.4. *Пусть выполнено одно из следующих двух условий.*

1. $(i_1, \ldots, i_k) = I \in \mathcal{M}^k$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = \mathfrak{A} \in \mathcal{N}^l$, $a_{pq} = \langle i_p, \alpha_q \rangle$, $p = 1, \ldots, k$, $q = 1, \ldots, l$, *и заданы некоторые функции:* $u^* \in U^l_{\mathcal{N}}$; $u : R^k \to R$, *определенная как* $u = U_I[i]$ *для некоторого* $i \in [i_1, \ldots, i_k]$.

2. a_{pq}, $p = 1, \ldots, k$, $q = 1, \ldots, l$ — *произвольные элементы* R, $u \in U^k_{\mathcal{M}}$, $u^* \in U^l_{\mathcal{N}}$.

Тогда

$$u(u^*(a_{11}, \ldots, a_{1l}), \ldots, u^*(a_{k1}, \ldots, a_{kl})) = \\ u^*(u(a_{11}, \ldots, a_{k1}), \ldots, u(a_{1l}, \ldots, a_{kl})).$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $\alpha = V_{\mathfrak{A}}[u^*]$. Тогда $u(u^*(a_{11}, \ldots, a_{1l}), \ldots, u^*(a_{k1}, \ldots, a_{kl})) = u(u^*(\langle i_1, \mathfrak{A} \rangle), \ldots, u^*(i_k, \mathfrak{A} \rangle)) = u(\langle i_1, \alpha \rangle, \ldots, \langle i_k, \alpha \rangle) = \langle i, \alpha \rangle$. С другой стороны, аналогично получаем $u^*(u(a_{11}, \ldots, a_{k1}), \ldots, u(a_{1l}, \ldots, a_{kl})) = u^*(\langle i, \mathfrak{A} \rangle) = \langle i, \alpha \rangle$.

Докажем второе утверждение. Положим $i_1 = z_1, \ldots, i_k = z_k$, обозначим $(i_1, \ldots, i_k) = I$. Тогда, согласно аксиоме A2, мы можем выбрать такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathcal{N}$, что $\langle i_k, \alpha_l \rangle = \langle z_k, \alpha_l \rangle = a_{pq}$, $p = 1, \ldots, k$, $q = 1, \ldots, l$. Положим теперь $i = V_I[u] \in [i_1, \ldots, i_k]$. Тогда $u = U_I[i]$, и мы попадаем в условия первого утверждения доказываемого предложения. □

Сформулируем еще следующие два тривиальных утверждения, связанных с понятием зависимости.

Лемма 1.4. *Если* $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{M}$, $i'_1, \dots, i'_l \in [i_1, \dots, i_k]$, *то* $[i'_1, \dots, i'_l] \subseteq [i_1, \dots, i_k]$.

Доказательство. Обозначим $(i_1, \dots, i_k) = I$, $(i'_1, \dots, i'_l) = I'$. Пусть $i \in [i'_1, \dots, i'_l]$. Покажем, что $i \in [i_1, \dots, i_k]$. Действительно, если $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, $\langle I, \alpha \rangle = \langle I, \alpha' \rangle$, то в силу определения зависимости имеем $\langle I', \alpha \rangle = \langle I', \alpha' \rangle$, откуда и следует нужное нам $\langle i, \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$. □

Лемма 1.5. $[z_1, \dots, z_n] = \mathcal{M}$.

Доказательство. Если $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, $\langle Z, \alpha \rangle = \langle Z, \alpha' \rangle$, то из аксиомы A6 получаем $\alpha = \alpha'$, откуда $\langle i, \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$ для всех $i \in \mathcal{M}$, что нам и требовалось. □

Следующие два утверждения связывают понятие зависимости с функциями из $U_{\mathcal{M}}$ на уровне дуальных координат.

Лемма 1.6. *Пусть элементы* $i_1, \dots, i_k, i \in \mathcal{M}$ *имеют в базе* Ω *дуальные координаты* $(a_1^1, \dots, a_1^m), \dots, (a_k^1, \dots, a_k^m)$, $(a^1, \dots, a^m)$, *соответственно, и существует такая* $u \in U_{\mathcal{M}}^k$, *что* $a^t = u(a_1^t, \dots, a_k^t)$, $t = 1, \dots, m$. *Тогда* $i = V_I[u] \in [i_1, \dots, i_k]$, *где* $I = (i_1, \dots, i_k)$.

Доказательство. Рассмотрим $i' = V_I[u] \in [i_1, \dots, i_k]$. Тогда для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle i', \alpha \rangle = u(\langle i_1, \alpha \rangle, \dots, \langle i_k, \alpha \rangle)$. Подставляя сюда на место α элементы $\omega_1, \dots, \omega_m$, получаем $\langle i', \Omega \rangle = (a^1, \dots, a^m) = \langle i, \Omega \rangle$, откуда, в силу аксиомы A6, $i = i'$. □

Отметим, что некоторые из исходных посылок следующих двух утверждений носят искусственный характер, но будут доказаны в дальнейшем при малых k.

Лемма 1.7. *Предположим, что для* $I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{M}^k$ *область значений оператора* U_I *лежит в* $U_{\mathcal{M}}^k$. *Пусть элементы* $i_1, \dots, i_k, i \in \mathcal{M}$ *имеют в базе* Ω *дуальные координаты* $(a_1^1, \dots, a_1^m), \dots, (a_k^1, \dots, a_k^m)$, $(a^1, \dots, a^m)$, *соответственно, и при этом* $i \in [i_1, \dots, i_k]$. *Тогда существует такая* $u \in U_{\mathcal{M}}^k$, *что* $a^t = u(a_1^t, \dots, a_k^t)$, $t = 1, \dots, m$ *(причем* $u = U_I[i]$*).*

Доказательство. Если $i \in [i_1, \dots, i_k]$, то для $u = U_I[i] \in U^k_{\mathcal{M}}$ выполнено $\langle i, \alpha\rangle = u(\langle i_1, \alpha\rangle, \dots, \langle i_k, \alpha\rangle)$ (для всех $\alpha \in \mathcal{N}$). Подставляя сюда $\alpha = \omega_1, \dots, \omega_m$, получаем требуемое. $\square$

Дополнительное предположение, при котором будет выполняться следующее предложение 1.5, удобно будет сформулировать отдельно. Отметим, что это будет, фактически, несколько различных, предположений, могущих быть сформулированными отдельно для каждого интересующего нас значения k.

Условие У1 Фиксируем k. Пусть $(i'_1, \dots, i'_k) = I' \in \mathcal{M}^k$, $i_1, \dots, i_k \in [i'_1, \dots, i'_k] \subseteq \mathcal{M}$ независимы, $u_1 = U_{I'}[i_1], \dots,\ u_k = U_{I'}[i_k]$. Тогда отображение $(u_1, \dots, u_k) : R^k \to R^k$ (декартово произведение k отображений $R^k \to R$) биективно, и найдутся такие $u'_1, \dots, u'_k \in U^k_{\mathcal{M}}$, что отображение $(u'_1, \dots, u'_k) : R^k \to R^k$ является обратным к отображению $(u_1, \dots, u_k)$.

Предложение 1.5. *Фиксируем k, для которого выполняется условие У1. Пусть $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{M}$ независимы, $i'_1, \dots, i'_k \in \mathcal{M}$, $i_1, \dots, i_k \in [i'_1, \dots, i'_k]$. Тогда $[i_1, \dots, i_k] = [i'_1, \dots, i'_k]$.*

Доказательство. Обозначим $(i'_1, \dots, i'_k) = I'$, $u_1 = U_{I'}[i_1], \dots,\ u_k = U_{I'}[i_k]$. Тогда по условию У1 найдутся такие $u'_1, \dots, u'_k \in U^k_{\mathcal{M}}$, что $(u_1, \dots, u_k) \circ (u'_1, \dots, u'_k) = \mathrm{id}$. Отсюда для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ получаем $\langle i'_p, \alpha\rangle = u'_p(u_1(\langle I', \alpha\rangle), \dots, u_k(\langle I', \alpha\rangle)) = u'_p(\langle i_1, \alpha\rangle, \dots, \langle i_k, \alpha\rangle)$, $p = 1, \dots, k$, что дает $i'_1, \dots, i'_k \in [i_1, \dots, i_k]$. Отсюда следует, согласно лемме 1.4, $[i'_1, \dots, i'_k] \subseteq [i_1, \dots, i_k]$, а из условия предложения и той же леммы — обратное включение. $\square$

Следствие 1.1. *Пусть для фиксированного k выполняется условие У1. Пусть $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{M}$ независимы, $i \in \mathcal{M}$, $i_1, \dots, i_k, i$ — зависимы. Тогда $i \in [i_1, \dots, i_k]$.*

Доказательство. Из зависимости $i_1, \ldots, i_k, i$ следует, что $i_1, \ldots, i_k, i \in [i'_1, \ldots, i'_k]$ для некоторых $i'_1, \ldots, i'_k \in \mathcal{M}$. Тогда ввиду предложения 1.5 $[i_1, \ldots, i_k] = [i'_1, \ldots, i'_k]$, откуда и следует $i \in [i_1, \ldots, i_k]$. $\square$

Утверждения, связанные с нулем

Для дальнейших рассуждений важным будет понятие нулей в множествах (далее для удобства восприятия мы будем также называть их пространствами, подразумевая этим наличие определяемой биформой структуры) $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Будем называть элемент $i \in \mathcal{M}$ нулевым, вырожденным, или же просто нулем пространства $\mathcal{M}$, если $i \in [\emptyset]$, то есть, если для любых $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$ $\langle i, \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$. Иными словами, нулевой элемент i пространства $\mathcal{M}$ — такой элемент, для которого функция $\langle i, \cdot \rangle : \mathcal{N} \to R$ постоянна (очевидно, постоянной в этом случае будет и функция $U[i]$). Аналогично определяются нулевые элементы пространства $\mathcal{N}$.

Отметим, что как в $\mathcal{M}$, так и в $\mathcal{N}$ может быть несколько различных нулевых элементов или не быть вовсе. Ненулевые элементы этих пространств будем называть также невырожденными. Заметим, что все элементы баз Z и Ω являются невырожденными - в противном случае утверждение аксиомы A2 очевидно не выполнялось бы.

Пусть далее z_0 — некоторый нулевой элемент пространства $\mathcal{M}$, такой, что для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ $\langle z_0, \alpha \rangle = O$, где O — некоторый элемент R. Условия утверждений, сформулированных далее в этом пункте, предполагают наличие такого элемента.

Очевидно из определения, что $U[z_0]$ есть функция, тождественно равная нулевому элементу R.

Отсюда легко вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.8. *Пусть $u \in U^k_{\mathcal{M}}$ (здесь и далее этой записью подразумевается $0 \leq k \leq n$). Определим функцию $u' : R^l \to R$, $l \leq k$, следующим равенством: $u'(r_1, \ldots, r_l) = u(r_1, \ldots, r_l, O, \ldots, O)$ для всех $r_1, \ldots, r_l \in R$. Тогда*

$u' \in U^l_{\mathcal{M}}$.

Доказательство. $u' = u(P_l(U[z_1]), \ldots, P_l(U[z_k]), P_l(U[z_0]), \ldots, P_l(U[z_0]))$. Таким образом, $u' \in U^l_{\mathcal{M}}$, ввиду аксиомы A4. $\square$

Мы можем теперь ввести операторы $O^k_l : U^k_{\mathcal{M}} \to U^l_{\mathcal{M}}$, $0 \le l \le k \le n$, сопоставляющие каждой $u \in U^k_{\mathcal{M}}$ функцию $u' \in U^l_{\mathcal{M}}$, определенную, как в лемме 1.8.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из определений нулевого элемента R и набора $U_{\mathcal{N}}$.

Лемма 1.9. *Пусть $u = U_{\mathfrak{A}}[a]$ для некоторых $\mathfrak{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathcal{N}^k$, $\alpha \in [\alpha_1, \ldots, \alpha_k]$ (в частности, $u \in U^k_{\mathcal{N}}$). Тогда $u(O, \ldots, O) = O$.*

Доказательство. По определению зависимости для всех $i \in \mathcal{M}$ выполняется $\langle i, \alpha \rangle = u(\langle i, \alpha_1 \rangle, \ldots, \langle i, \alpha_k \rangle)$. Подставляя сюда $i = z_0$, получаем требуемое. $\square$

Для дальнейшего хода доказательства имеет принципиальное значение наличие или отсутствие нулей в пространствах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Мы получаем, таким образом, следующие четыре случая: "в $\mathcal{M}$ и в $\mathcal{N}$ есть нули", "в $\mathcal{M}$ есть нуль, в $\mathcal{N}$ нет нулей", "в $\mathcal{M}$ нет нулей, в $\mathcal{N}$ есть нуль", "в $\mathcal{M}$ и в $\mathcal{N}$ нет нулей".

Отметим, что второй и третий из этих случаев получаются друг из друга, если поменять ролями пространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, поэтому нам далее достаточно будет подробно рассмотреть только один из них. Поэтому далее рассматриваем только три оставшихся случая.

1.3.2 В $\mathcal{M}$ есть нуль, в $\mathcal{N}$ есть нуль. Доказательство теоремы 1.5

Условие наличия нуля в $\mathcal{M}$ и в $\mathcal{N}$ совпадает с аксиомой A0. В этом пункте мы будем доказывать не теорему 1.4, а теорему 1.5, предполагающую, помимо выполнения аксиомы A0, более слабые требования на m и n и ослабленную версию аксиомы A3. В связи с этим все проводимые здесь рассуждения будут применимы также и к условиям теоремы 1.4, и дадут, как мы увидим из дальнейшего, исчерпывающий разбор того случая этой теоремы, когда в $\mathcal{M}$ и в $\mathcal{N}$ есть нуль, несмотря на ослабление других условий.

Интерполяция функций из $U_{\mathcal{M}}$, $U_{\mathcal{N}}$

$\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в дальнейших рассуждениях равноправны, поэтому мы будем доказывать все утверждения, рассматривая $\mathcal{M}$ как основное множество; при этом утверждения, в формулировке которых $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ меняются ролями, также будут верны.

Отметим прежде всего наличие в R выделенного ("нулевого") элемента.

Предложение 1.6. *В R можно найти такой элемент O, а в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — такие элементы z_0 и ω_0, соответственно, что $\langle z_0, \alpha\rangle = O$ для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ и $\langle i, \omega_0\rangle = O$ для всех $i \in \mathcal{M}$. Элементы $O \in R$, $z_0 \in \mathcal{M}$, $\omega_0 \in \mathcal{N}$, удовлетворяющие данным соотношениям, единственны.*

Доказательство. Пусть z_0, ω_0 — некоторые нулевые элементы множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, соответственно. Тогда для произвольных $i \in \mathcal{M}, \alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle z_0, \alpha\rangle = \langle z_0, \omega_0\rangle = \langle i, \omega_0\rangle$. Обозначив $\langle z_0, \omega_0\rangle = O$, получаем первую часть доказываемого утверждения. Предположим теперь, что некоторый $z_0' \in \mathcal{M}$ также удовлетворяет условию предложения. Но $\langle z_0', \omega_0\rangle = \langle z_0, \omega_0\rangle = O$, и тогда $\langle z_0', \alpha\rangle = O$ для всех $\alpha \in \mathcal{N}$. Из невырожденности $\langle , \rangle$ теперь следует $z_0' = z_0$. Аналогично доказывается единственность ω_0. □

Отметим, что элемент O имеет одинаковый смысл для пространств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, поэтому далее мы будем формулировать утверждения с участием нуля только для $\mathcal{M}$.

Будем далее обозначать нулевые элементы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ как z_0 и ω_0, соответственно. Будем обозначать $R \setminus \{O\} = R^*$. Мы видим теперь, что в $\mathcal{M}$

$[\emptyset] = \{z_0\}$, $U^0_{\mathcal{M}} = \{O\}$. Обозначим $\mathcal{M} \setminus \{z_0\} = \mathcal{M}^+$; вообще, если $L \subseteq \mathcal{M}$, обозначим $L \setminus \{z_0\} = L^+$.

В дальнейших рассуждениях фиксируем произвольный элемент $e \in R^*$.

Предложение 1.7. *Пусть $a, r \in R$, $a \neq O$. Тогда существует единственная функция $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, такая, что $u(a) = r$.*

Доказательство. Покажем существование. Пусть $a, r \in R$, $a \neq O$. Возьмем элемент $\alpha \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(a, O, \ldots, O)$. Поскольку $a \neq O$, α невырожден, и по аксиоме A3 найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \alpha \rangle = r$. Тогда $U[i](a, O, \ldots, O) = U[i](\langle Z, \alpha \rangle) = \langle i, \alpha \rangle = r$, и для $u = O^n_1(U[i])$ получаем требуемое $u(a) = r$.

Покажем единственность. Пусть $u, u' \in U^1_{\mathcal{M}}$ удовлетворяют условию предложения. Возьмем элемент $j \in \mathcal{M}$ с дуальными координатами $(a, O, \ldots, O)$. Обозначим $i = V_{(j)}[u]$, $i' = V_{(j)}[u']$. Тогда (мы пользуемся леммой 1.9) $\langle i, \Omega \rangle = (u(a), u(O), \ldots, u(O)) = (r, O, \ldots, O) = (u'(a), u(O), \ldots, u(O)) = \langle i', \Omega \rangle$, откуда, ввиду предложения 1.2, $i = i'$. Тогда $u(\langle j, \alpha \rangle) = \langle i, \alpha \rangle = \langle i', \alpha \rangle = u'(\langle j, \alpha \rangle)$ для любого $\alpha \in \mathcal{N}$. При этом, поскольку $\alpha \neq O$, j невырожден, и $\langle j, \alpha \rangle$ для различных $\alpha \in \mathcal{N}$ будет, ввиду аксиомы A3, принимать полный набор значений из R, откуда следует $u = u'$. □

Предложение 1.8. *Пусть $i \in \mathcal{M}$, $j \in [i]$. Тогда найдется такая $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, что для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle j, \alpha \rangle = u(\langle i, \alpha \rangle)$ Иными словами, $U_{(i)}[j]$ будет лежать в $U^1_{\mathcal{M}}$.*

Доказательство. Обозначим $\langle i, \Omega \rangle = (a_1, \ldots, a_m)$, $\langle j, \Omega \rangle = (b_1, \ldots, b_m)$. В силу леммы 1.6 нам достаточно найти функцию $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, такую, что $u(a_q) = b_q$, $q = 1, \ldots, m$. Случай вырожденного i нам не интересен (тогда j тоже вырожден, и за u берется тождественно нулевая функция $u = P_2(U[z_0]))$, поэтому далее мы можем считать, что не все a_q $(q = 1, \ldots, m)$ равны нулю. Без ограничения общности можем полагать $a_1 \neq O$. Тогда, согласно предложению 1.7 (точнее, дульному к нему утверждению), для $q = 2, \dots, m$ найдутся такие функции $u^q \in U^1_{\mathcal{N}}$, что $a_q = u^q(a_1)$. Если функция $v : R \to R$ такова, что $\langle j, \alpha \rangle = v(\langle i, \alpha \rangle)$, для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ (ее существование следует из $j \in [i]$, согласно определению зависимости; мы не предполагаем здесь $v \in U^1_{\mathcal{M}}$), то при подстановке на место α элементов $\omega_1, \dots, \omega_m$ получаем $b^t = v(a_t)$, $t = 1, \dots, m$. Тогда, пользуясь предложением 1.4, получаем $b_q = v(a_q) = v(u^q(a_1)) = u^q(v(a_1)) = u^q(b_1)$, $q = 2, \dots, m$. В качестве u возьмем (существующую, согласно предложению 1.7) функцию из $U^1_{\mathcal{M}}$, удовлетворяющую условию $u(a_1) = b_1$. Для $q = 2, \dots, m$ теперь имеем: $u(a_q) = u(u^q(a_1)) = u^q(u(a_1))) = u^q(b_1) = b_q$, что нам и требовалось.

□

Лемма 1.10. *Пусть $i' \in \mathcal{M}$, $i \in [i']$ невырождены, $u = U_{(i')}[i]$ ($u \in U^1_{\mathcal{M}}$ по предложению 1.8). Тогда отображение $u : R \to R$ биективно, и найдется такая $u' \in U^1_{\mathcal{M}}$, что отображение $u' : R \to R$ является обратным к отображению u. Иными словами, выполнено условие У1 для $k = 1$.*

Доказательство. Пусть $u(\langle i', \Omega \rangle) = (a_1, \dots, a_m)$. Тогда $(a_1, \dots, a_m) = (u(\langle i', \omega_1 \rangle), \dots, u(\langle i', \omega_m \rangle)) = (\langle i, \omega_1 \rangle, \dots, \langle i, \omega_m \rangle) = \langle i, \Omega \rangle$.

Поскольку i невырожден, не все элементы из m-ки $\langle i, \Omega \rangle$ равны O. Без ограничения общности мы можем считать $a_1 \neq O$. Зададим, пользуясь предложением 1.7 функцию $u' \in U^1_{\mathcal{M}}$ таким образом, чтобы $u'(a_1) = \langle i', \omega_1 \rangle$. Согласно предложению 1.2, $u \circ u' = v$ для некоторой $v \in U^1_{\mathcal{M}}$. При этом $v(a_1) = u(\langle i', \omega_1 \rangle) = a_1$, откуда, в силу утверждения единственности предложения 1.7, $v = \mathrm{id}$, что и требовалось. □

Следствие 1.2. *Пусть $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, и не является тождественной функцией. Тогда u обратима, и обратная ей функция также лежит в $U^1_{\mathcal{M}}$.*

Доказательство. Беря $i' = z_1$ (он невырожден, например, в силу аксиомы А2), $i = V_{(z_1)}[u]$, мы получаем, что $u = U_{(i)}[i']$, и элементы i, i' удовлетворяют условиям леммы. Требуемое нам утверждение теперь следует из утверждения леммы. □

Лемма 1.11. *В случае $m \geq 2$ элементы $i_1, i_2 \in \mathcal{M}$ с дуальными координатами $(e, O, \ldots, O)$, $(O, e, O, \ldots, O)$, соответственно, независимы.*

Доказательство. Если элементы i_1, i_2 зависимы, то, в силу невырожденности i_1 и следствия 1.1 предложения 1.5 (условие У1 выполняется для $k = 1$ ввиду леммы 1.10), $i_2 \in [i_1]$, откуда, в силу леммы 1.7 (применимой в нашем случае ввиду предложения 1.8), $u(e) = O$ и $u(O) = e$ для некоторой $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, что противоречит лемме 1.9. □

Отметим, что условие $m \geq 2$ необходимо в этой лемме для того, чтобы определение элементов i_1, i_2, заданных в ее условии, имело смысл.

Предложение 1.9. *$m, n \geq 2$.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ равноправны в условиях теоремы 1.5, мы можем без ограничения общности полагать $m \geq n$. Тогда из $m, n \geq 1$ и $(n+1, m+1) \neq (2, 2)$ вытекает $m \geq 2$. В этом случае элементы $i_1, i_2 \in \mathcal{M}$ с дуальными координатами $(e, O, \ldots, O)$, $(O, e, O, \ldots, O)$, соответственно, будут независимы, согласно лемме 1.11. Если теперь $n = 1$, то ввиду леммы 1.5 $\mathcal{M} = [z_1]$, откуда $i_1, i_2 \in [z_1]$. Но это приводит к противоречию с независимостью i_1, i_2, из которого вытекает, что $n \geq 2$. □

Предложение 1.10. *Для любых $r_1, r_2 \in R$ существует единственная функция $u \in U^2_{\mathcal{M}}$, такая, что $u(e, O) = r_1$, $u(O, e) = r_2$.*

Доказательство. Возьмем такие $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$, что $\langle Z, \alpha_1 \rangle = (e, O, \ldots, O)$, $\langle Z, \alpha_2 \rangle = (O, e, O, \ldots, O)$. Согласно лемме 1.11, α_1, α_2 независимы, и мы можем, пользуясь аксиомой А3, подобрать такой элемент $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \alpha_1 \rangle = r_1$, $\langle i, \alpha_2 \rangle = r_2$. Тогда $U[i](e, O, \ldots, O) = U[i](\langle Z, \alpha_1 \rangle) = \langle i, \alpha_1 \rangle = r_1$, $U[i](O, e, O, \ldots, O) = r_2$, и функция $u = O^n_2(U[i])$ удовлетворяет условиям предложения.

Пусть теперь две функции $u, u' \in U^2_{\mathcal{M}}$ удовлетворяют условию предложения. Возьмем $j_1, j_2 \in \mathcal{M}$ так, чтобы $\langle j_1, \Omega \rangle = (e, O, \ldots, O)$, $\langle j_2, \Omega \rangle = (O, e, O, \ldots, O)$. Согласно лемме 1.11 j_1, j_2 независимы. Обозначим $i =$

$V_{(j_1,j_2)}[u]$, $i' = V_{(j_1,j_2)}[u']$. Тогда $\langle i,\Omega\rangle = (r_1, r_2, O, \ldots, O) = \langle i',\Omega\rangle$, откуда $i = i'$. Тогда для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ $u(\langle j_1,\alpha\rangle, \langle j_2,\alpha\rangle) = \langle i,\alpha\rangle = \langle i',\alpha\rangle = u'(\langle j_1,\alpha\rangle, \langle j_2,\alpha\rangle)$. Поскольку j_1, j_2 независимы, $\{(\langle j_1,\alpha\rangle, \langle j_2,\alpha\rangle) \,|\, \alpha \in \mathcal{N}\} = R^2$ ввиду аксиомы А3, и $u = u'$. $\square$

Отметим, что выше нами было доказано выполнение условия У1 для $k = 1$ (лемма 1.10). Поэтому далее мы будем свободно ссылаться в соответствующих ситуациях на предложение 1.5 и его следствие 1.1.

Структура тела на R и вид $\langle,\rangle$

Введем на R операцию $\cdot$ (будем называть ее умножением) следующим образом. Пусть $a, b \in R$. В силу предложения 1.7, найдется единственная функция $\varphi_a \in U^1_{\mathcal{M}}$, такая, что $\varphi_a(e) = a$. Положим теперь по определению

$$a \cdot b := \varphi_a(b), \qquad \varphi_a \in U^1_{\mathcal{M}} : \varphi_a(e) = a.$$

Покажем, что умножение можно определить двойственным образом с помощью $U^1_{\mathcal{N}}$, а именно, если φ^b — такая (аналогично φ_a, существующая и единственная) функция из $U^1_{\mathcal{N}}$, что $\varphi^b(e) = b$, то для определенной выше операции умножения на R верно следующее:

$$a \cdot b = \varphi^b(a), \qquad \varphi^b \in U^1_{\mathcal{N}} : \varphi^b(e) = b. \tag{1.3.1}$$

Действительно, в силу предложения 1.4, $\varphi^b(a) = \varphi^b(\varphi_a(e)) = \varphi_a(\varphi^b(e)) = \varphi_a(b) = a \cdot b$.

Введем теперь на R операцию $+$ (будем называть ее сложением) следующим образом. Пусть $f \in U^2_{\mathcal{M}}$ такова, что $f(e, O) = e$, $f(O, e) = e$ (согласно предложению 1.10, она существует и единственна). Для $a, b \in R$ положим по определению

$$a + b := f(a, b).$$

Далее для произвольных $a, b \in R$ через φ_a, φ^b, f будут обозначаться определенные выше функции.

Предложение 1.11. $(R, +, \cdot, O, e)$ — *тело.*

Доказательство. Покажем, что для всех $a \in R$ верно $e \cdot a = a \cdot e = a$. Отметим, что, ввиду утверждения единственности предложения 1.7, φ_e совпадает с тождественной функцией (равной $P_1(U[z_1])$ и лежащей в $U^1_{\mathcal{M}}$), и потому $e \cdot a = \varphi_e(a) = a$. Аналогично, $\varphi^e \in U^1_{\mathcal{N}}$ является тождественной, и $a \cdot e = \varphi^e(e) = a$.

Покажем, что для любых $a, b, c \in R$ выполняется $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Действительно, $a \cdot (b \cdot c) = \varphi_a(b \cdot c) = \varphi_a(\varphi_b(c)) = \varphi(c)$, где $\varphi = \varphi_a \circ \varphi_b \in U^1_{\mathcal{M}}$. При этом $\varphi(e) = \varphi_a(\varphi_b(e)) = \varphi_a(b) = a \cdot b$, откуда $\varphi = \varphi_{a \cdot b}$ и, по определению умножения, $\varphi(c) = (a \cdot b) \cdot c$, что нам и требовалось.

Покажем, что для всех $a \in R^*$ найдется единственный элемент $b \in R$, такой, что $a \cdot b = b \cdot a = e$. Функция φ_a обратима в $U^1_{\mathcal{M}}$, по следствию 1.2 леммы 1.10. Пусть $\varphi_a^{-1} = \varphi \in U^1_{\mathcal{M}}$. Возьмем $b = \varphi(e)$. Тогда, ввиду предложения 1.7, $\varphi = \varphi_b$, и $b \cdot a = \varphi(a) = e$. Аналогично, с помощью (1.3.1) получаем, что существует $b' \in R$, для которого $a \cdot b' = e$. Равенство $b = b'$ и единственность обратного элемента следуют теперь из ранее доказанных ассоциативности и свойства единицы.

Покажем, что для любых $a, b \in R$ выполняется $a + b = b + a$. Пусть $\tau : R^2 \to R^2$ — перестановка координат. Согласно лемме 1.3, $f' = f \circ \tau \in U^2_{\mathcal{M}}$. Заметим, что $f'(e, O) = f(O, e) = e$, $f'(O, e) = e$. Тогда из предложения 1.10 следует $f' = f$. При этом, очевидно, $b + a = f(b, a) = f'(a, b)$, и потому $b + a = a + b$.

Покажем, что для всех $a \in R$ верно $a + O = a$. Обозначим $f' = O^2_1(f) \in U^1_{\mathcal{M}}$. Тогда $f'(e) = e$, и f' является, в силу предложения 1.7, тождественной функцией. Теперь $a + O = f(a, O) = f'(a) = a$.

Покажем, что для любых $a, b, c \in R$ выполняется $(a+b)+c = a+(b+c)$. Мы можем далее считать a отличным от O — в противном случае сразу получаем из уже доказанного $(O+b)+c = b+c = O+(b+c)$. Пусть $\beta \in \mathcal{N}$ таково, что $\langle z_1, \beta \rangle = a$, $\langle z_2, \beta \rangle = c$. Согласно предложению 1.7, найдется функция $\varphi \in U^1_{\mathcal{M}}$, такая, что $\varphi(a) = b$. Обозначим $j = V_{(z_1)}[\varphi] \in [z_1]$. Тогда $\langle j, \beta\rangle = \varphi(\langle z_1, \beta\rangle) = b$. Пусть $j_1 = V_{(z_1,j)}[f]$, $j_2 = V_{(j,z_2)}[f]$ — тогда $\langle j_1, \beta\rangle = f(\langle z_1, \beta\rangle, \langle j, \beta\rangle) = a + b$, $\langle j_2, \beta\rangle = b + c$. Наконец, пусть $i_1 = V_{(j_1,z_2)}[f]$, $i_2 = V_{(z_1,j_2)}[f]$. Тогда

$$\langle i_1, \beta\rangle = (a + b) + c\,, \quad \langle i_2, \beta\rangle = a + (b + c). \tag{1.3.2}$$

Отметим, что в силу леммы 1.4 и построения все элементы j, j_1, j_2, i_1, i_2 лежат в $[z_1, z_2]$. Рассмотрим элементы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathcal{E} \in \mathcal{N}^2$ с дуальными координатами $(e, O, \ldots, O)$, $(O, e, O, \ldots, O)$, соответственно, в базе Z. Обозначим $(\langle j, \mathcal{E}\rangle) = (x, y)$. По построению, $\langle i_1, \varepsilon_1\rangle = f(\langle j_1, \varepsilon_1\rangle, \langle z_2, \varepsilon_1\rangle) = f(f(\langle z_1, \varepsilon_1\rangle, \langle j, \varepsilon_1\rangle), \langle z_2, \varepsilon_1\rangle) = f(f(e, x), O) = f(e, x)$. Аналогично получаем $\langle i_1, \varepsilon_2\rangle = f(f(O, y), e) = f(y, e)$, $\langle i_2, \varepsilon_1\rangle = f(e, f(x, O)) = f(e, x)$, $\langle i_2, \varepsilon_2\rangle = f(O, f(y, e)) = f(y, e)$. Таким образом, $\langle i_1, \mathcal{E}\rangle = \langle i_2, \mathcal{E}\rangle$. Обозначим $u_1 = U_{(z_1,z_2)}[i_1]$, $u_2 = U_{(z_1,z_2)}[i_2]$. Тогда $u_1(e, O) = u_1(\langle z_1, \varepsilon_1\rangle, \langle z_2, \varepsilon_1\rangle) = \langle i_1, \varepsilon_1\rangle = \langle i_2, \varepsilon_1\rangle = u_2(e, O)$, и аналогично $u_1(O, e) = u_2(O, e)$. Тогда, в силу предложения 1.10, $u_1 = u_2$. Поэтому $\langle i_1, \beta\rangle = u_1(\langle z_1, \beta\rangle, \langle z_2, \beta\rangle) = u_2(\langle z_1, \beta\rangle, \langle z_2, \beta\rangle) = \langle i_2, \beta\rangle$, что, в силу равенств (1.3.2), и дает нам требуемую ассоциативность.

Покажем, что для каждого $a \in R$ найдется единственный элемент $b \in R$, для которого $a + b = O$. Пусть $z = V_{(z_1,z_2)}[f]$. Поскольку f не является тождественным нулем, z невырожден. z_1 невырожден ввиду аксиомы A2. Если бы выполнялось $z \in [z_1]$, то, ввиду леммы 1.7 и предложения 1.8, для элемента $\alpha \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(O, e, O, \ldots, O)$ должно было бы быть верно $\langle z, \alpha\rangle = u(\langle z_1, \alpha\rangle)$ для некоторой $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, тогда как в действительности $\langle z, \alpha\rangle = f(O, e) = e$, $\langle z_1, \alpha\rangle = O$ — противоречие с леммой 1.9. Отсюда, по следствию 1.1 предложения 1.5, z, z_1 независимы. Возьмем теперь, пользуясь аксиомой A3, такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle z, \alpha\rangle = O$, $\langle z_1, \alpha\rangle = a$. Обозначим $\langle z_2, \alpha\rangle = b$. Тогда $a + b = f(a, b) = f(\langle z_1, \alpha\rangle, \langle z_2, \alpha\rangle) = \langle z, \alpha\rangle = O$, что и требовалось. Единственность обратного элемента по сложению следует теперь из ассоциативности, доказанной ранее.

Нам осталось показать дистрибутивность. Пусть $a, b, c \in R$. $c \cdot (a+b) = \varphi_c(f(a,b))$. Обозначим $u = \varphi_c \circ f \in U^2_{\mathcal{M}}$. Тогда $u(e,O) = \varphi_c(e) = c$, $u(O,e) = c$. С другой стороны, $c \cdot a + c \cdot b = f(\varphi_c(a), \varphi_c(b)) = u'(a,b)$ для некоторой $u' \in U^2_{\mathcal{M}}$. При этом $u'(e,O) = f(c\,,O) = c$, $u'(O,e) = c$. Таким образом, в силу предложения 1.10, $u = u'$, что дает левую дистрибутивность.

Покажем теперь правую дистрибутивность. $(a+b) \cdot c = \varphi^c(f(a,b))$. Преобразуем далее, пользуясь предложением 1.4: $\varphi^c(f(a,b)) = f(\varphi^c(a), \varphi^c(b)) = a \cdot c + b \cdot c$ — правая дистрибутивность доказана. $\square$

Перейдем теперь к определению структуры векторного пространства на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 1.12. $f \in U^2_{\mathcal{N}}$.

Доказательство. Пусть $f^* \in U^2_{\mathcal{N}}$ такова, что $f^*(e,O) = e$, $f^*(O,e) = e$ (ее существование и единственность следуют из дуального утверждения предложения 1.10). Покажем, что $f^* = f$. Фиксируем произвольные $a, b \in R$. Равенства $f^*(a,O) = f^*(O,b) = O$ доказываются дословно так же, как аналогичное утверждение для f в предложении 1.11 (только все используемые при доказательстве функции будут теперь из $U_{\mathcal{N}}$). Пользуясь доказанными ранее свойствами сложения и предложением 1.4, получаем теперь $f^*(a,b) = f^*(f(a,O), f(O,b)) = f(f^*(a,O), f^*(O,b)) = f(a,b)$, что и требовалось. $\square$

Зададим теперь операции на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Пусть $i, j \in \mathcal{M}$. Положим по определению

$$i + j := V_{(i,j)}[f]; \qquad a \cdot i := V_{(i)}[\varphi_a].$$

Пусть теперь $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$, $a \in R$. Тогда положим

$$\alpha + \beta := V_{(\alpha,\beta)}[f]; \qquad \alpha \cdot a := V_{(\alpha)}[\varphi^a].$$

В качестве нулей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ (в смысле этих операций) будем рассматривать, соответственно, z_0 и ω_0.

Предложение 1.13. *$\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ с введенными операциями являются левым размерности m и правым размерности n, соответственно, линейными пространствами над телом R.*

Доказательство. Установим изоморфизм (биекцию, сохраняющую операции и нуль) $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ с левым и правым, соответственно, векторными пространствами строк длины m и n, соответственно, над R.

Согласно аксиомам A2 и A6, отображение $\langle\cdot\,,\Omega\rangle : \mathcal{M} \to R^m$ является биекцией. Очевидно, $\langle z_0, \Omega\rangle = (O, \ldots, O)$. Покажем, что $\langle\cdot\,,\Omega\rangle$ сохраняет операции. Для $i, j \in \mathcal{M}$ в силу определения оператора $V_{(i,j)}$ получим: $\langle(i + j), \Omega\rangle = \langle V_{(i,j)}[f], \Omega\rangle = (f(\langle i, \alpha_1\rangle, \langle j, \alpha_1\rangle), \ldots, f(\langle i, \alpha_n\rangle, \langle j, \alpha_n\rangle)) = \langle i, \Omega\rangle + \langle j, \Omega\rangle$, где сложение строк из R^m определено обычным образом. Далее, если $a \in R$, то $\langle a \cdot i, \Omega\rangle = (\varphi_a(\langle i, \alpha_1\rangle), \ldots, \varphi_a(\langle i, \alpha_n\rangle)) = a \cdot \langle i, \Omega\rangle$, что нам и требуется.

Докажем теперь соответствующее утверждение для множества $\mathcal{N}$. Будем рассматривать в качестве определения умножения на R равенство (1.3.1). тогда доказательство того, что отображение $\langle Z, \cdot\rangle : \mathcal{N} \to R^n$ изоморфно, проводится тогда точно так же, как и доказательство изоморфности отображения $\langle\cdot\,,\Omega\rangle : \mathcal{M} \to R^n$ выше, с использованием доказанного предложения 1.12 и заменой всюду пространства $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$ и функций из $U_{\mathcal{M}}$ на функции из $U_{\mathcal{N}}$. Умножение на скаляр перемещается при этом слева направо ввиду соответствующего отличия равенства (1.3.1) от определения умножения. □

Предложение 1.14. *При заданных операциях на $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, R отображение $\langle,\rangle$ является невырожденной билинейной формой.*

Доказательство. Пусть $i, j \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$, $a \in R$. Тогда $\langle i + j, \alpha\rangle = \langle V_{(i,j)}[f], \alpha\rangle = f(\langle i, \alpha\rangle, \langle j, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha\rangle + \langle j, \alpha\rangle$, и аналогично $\langle a \cdot i, \alpha\rangle = \varphi_a(\langle i, \alpha\rangle) = a \cdot \langle i, \alpha\rangle$. Связь с операциями для правого аргумента доказывается так же, с использованием предложения 1.12 и равенства (1.3.1). Если теперь $i \in \mathcal{M}$ таково, что $\langle i, \alpha\rangle = O$ при всех $\alpha \in \mathcal{M}$, то по предложению 1.6, например, $i = z_0$, откуда $\langle , \rangle$ невырождена слева. Тогда по теореме 1.1 $\langle , \rangle$ невырождена. □

Отсюда сразу следует, из теоремы 1.2, равенство размерностей n и m. Беря в качестве Z', Ω' дуальные базисы векторных пространств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно, получим из леммы 1.1, что $\langle , \rangle$ будет задаваться формулой (1.2.1).

Предложение 1.15. *Отображения* $\langle Z', \cdot \rangle : \mathcal{N} \to R^n$, $\langle \cdot, \Omega' \rangle : \mathcal{M} \to R^n$ *биективны.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что, согласно определению операций линейного пространства в $\mathcal{M}$, любая линейная комбинация элементов $z'_1, \ldots, z'_n$ лежит в $[z'_1, \ldots, z'_n]$, а, поскольку $z'_1, \ldots, z'_n$ — линейный базис $\mathcal{M}$, то $[z'_1, \ldots, z'_n] = \mathcal{M}$. Тогда если для $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$ $\langle Z', \alpha \rangle = \langle Z', \alpha' \rangle$, то и для любого $i \in \mathcal{M}$ $\langle i, \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$, откуда $\alpha = \alpha'$. Это означает инъективность отображения $\langle Z', \cdot \rangle$.

Поскольку биформа билинейна, то и отображение $\langle Z', \cdot \rangle$ (действующее из $\mathcal{N}$ в линейное пространство строк длины n) линейно. При этом образы элементов $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$, будучи строками вида $(e, O, \ldots, O), \ldots, (O, \ldots, O, e)$, соответственно, образуют базис пространства строк R^n, поэтому любая строка из R^n может быть получена как образ некоторой линейной комбинации этих элементов. Отсюда следует сюръективность $\langle Z', \cdot \rangle$.

Инъективность и сюръективность $\langle \cdot, \Omega' \rangle$ доказываются аналогично. □

Предложение 1.16. *Определенное нами в аксиоматике физической структуры понятие зависимости отвечает линейной зависимости (принадлежности линейной оболочке) в векторных пространствах* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$.

Доказательство. Действительно, если, например, $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{M}^n$, $i = a_1 \cdot i_1 + \ldots + a_k \cdot i_k \in \mathcal{M}$, $a_1, \ldots, a_k \in R$, то для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ имеем, ввиду билинейности, $\langle i, \alpha \rangle = a_1 \cdot \langle i_1, \alpha \rangle + \ldots + a_n \cdot \langle i_n, \alpha \rangle$, то есть $\langle i, \alpha \rangle$ однозначно определяется $\langle I, \alpha \rangle$, и $i \in [i_1, \ldots, i_k]$.

Обратно, пусть $i \in [i_1, \dots, i_k]$, $u = U_I[i]$. Обозначим через L линейную оболочку векторов $i_1, \dots, i_k$. Пусть $\alpha \in L^{\perp} \subseteq \mathcal{N}$ (ортогональность берется относительно билинейной формы $\langle , \rangle$). Из определения зависимости и леммы 1.9 следует, что

$$\langle i, \alpha \rangle = u(\langle i_1, \alpha \rangle, \dots, \langle i_k, \alpha \rangle) = u(O, \dots, O) = O.$$

Поскольку это равенство выполнено для всех $i \in [i_1, \dots, i_k]$ и $\alpha \in L^{\perp}$, получаем тогда, что $i \in L^{\perp\perp} = L$, что нам и требуется. □

Из доказанного утверждения о зависимости сразу следует однородная линейность функций из $U_{\mathcal{M}}$ и $U_{\mathcal{N}}$, откуда $U^n_{\mathcal{M}} = L^l_n(R)$, $U^m_{\mathcal{N}} = L^r_n(R)$.

Замечание 1.3. Из построения Z', Ω' следует, что для $k, l = 1, \dots, n$ $\langle z'_k, \omega'_l \rangle = e$, если $k = l$, и $\langle z'_k, \omega'_l \rangle = O$, если $k \neq l$.

1.3.3 В $\mathcal{M}$ есть нуль, в $\mathcal{N}$ нет нуля

Интерполяция функций из $U_{\mathcal{M}}$, $U_{\mathcal{N}}$

Обозначим нулевой элемент $\mathcal{M}$ как z_0, $\langle z_0, \Omega \rangle = (O, \dots, O)$. Согласно аксиоме A2, в $\mathcal{N}$ найдется такой элемент $\omega_0 \in \mathcal{N}$, что $\langle Z, \omega_0 \rangle = (O, \dots, O)$. Мы будем ссылаться на него в дальнейшем. Отметим, что, поскольку в $\mathcal{N}$ нет нулей, элемент ω_0 будет, в отличие от ситуации предыдущего случая, невырожденным.

В дальнейших рассуждениях фиксируем произвольный элемент $e \in R$, $e \neq O$.

Предложение 1.17. *Для любого $r \in R$ существует (очевидно, единственная) функция $u \in U^0_{\mathcal{M}}$, тождественно равная r.*

Доказательство. Фиксируем $r \in R$. Согласно аксиоме A3, существует элемент $i \in \mathcal{M}$, такой, что $\langle i, \omega_0 \rangle = r$. Возьмем $u = O^n_0(U[i])$. Поскольку $U[i](O, \dots, O) = U[i](\langle Z, \omega_0 \rangle) = \langle i, \omega_0 \rangle = r$, функция u будет тождественно равна r. □

Предложение 1.18. *Пусть* $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, $\alpha' \in [\alpha]$. *Тогда* $\alpha' = \alpha$.

Доказательство. Пусть функция $v : R \to R$ такова, что для любого $i \in \mathcal{M}$ $\langle i, \alpha' \rangle = v(\langle i, \alpha \rangle)$. Фиксируем i. Обозначим за u' постоянную функцию из $U^1_{\mathcal{M}}$, равную $\langle i, \alpha \rangle$ (мы можем поднять соответствующую функцию из $U^0_{\mathcal{M}}$ до функции из $U^1_{\mathcal{M}}$ оператором L^1_0). Тогда, в силу предложения 1.4, $\langle i, \alpha' \rangle = v(\langle i, \alpha \rangle) = v(u'(\langle i, \alpha \rangle)) = u'(\langle i, \alpha \rangle) = \langle i, \alpha \rangle$. Поскольку это выполняется для любого i, отсюда следует $\alpha = \alpha'$. □

Следствие 1.3. *Тождественная функция является единственной функцией, лежащей в* $U^1_{\mathcal{N}}$.

Доказательство. Согласно предложению 1.18, $[\omega_1] = \{\omega_1\}$. Требуемое утверждение получается теперь непосредственно из определения $U^1_{\mathcal{N}}$, □

Предложение 1.19. *Для любых* $a_1, a_2, r_1, r_2 \in R$, $a_1 \neq a_2$, *существует единственная* $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, *такая, что* $u(a_1) = r_1$, $u(a_2) = r_2$.

Доказательство. Покажем существование. Возьмем $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(a_1, O, \dots, O)$, $(a_2, O, \dots, O)$, соответственно. Ввиду предложения 1.18, если найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\alpha_1, \alpha_2 \in [\alpha]$, то $\alpha_1 = \alpha = \alpha_2$ — противоречие. Поэтому α_1, α_2 независимы. Возьмем, пользуясь аксиомой A3, $i \in \mathcal{M}$, такой, что $\langle i, \alpha_1 \rangle = r_1$, $\langle i, \alpha_2 \rangle = r_2$. Возьмем $u = O^n_1(U[i])$. Тогда $u(a_1) = U[i](a_1, O, \dots, O) = U[i](\langle Z, \alpha_1 \rangle) = \langle i, \alpha_1 \rangle = r_1$ и аналогично $u(a_2) = r_2$.

Пусть нашлись две функции $u, u' \in U^1_{\mathcal{M}}$, удовлетворяющие требованиям второго утверждения предложения. Возьмем $j \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(a_1, a_2, a_2, \dots, a_2)$. Поскольку $a_1 \neq a_2$, $\langle j, \omega_1 \rangle \neq \langle j, \omega_2 \rangle$, и j невырожден. Обозначим $i = V_{(j)}[u]$, $i' = V_{(j)}[u']$. Тогда $\langle i, \Omega \rangle = (r_1, r_2, r_2, \dots, r_2) = \langle i', \Omega \rangle$, откуда, ввиду предложения 1.2, $i = i'$. Теперь $u(\langle j, \alpha \rangle) = \langle i, \alpha \rangle = \langle i', \alpha \rangle = u'(\langle j, \alpha \rangle)$ для любого $\alpha \in \mathcal{N}$, и поскольку, ввиду аксиомы A3, $\langle j, \alpha \rangle$ может принимать любые значения из R, $u = u'$. □

Предложение 1.20. *Для любых $a_1, a_2, r \in R$, $a_1 \neq a_2$, существует единственная функция $u \in U^2_{\mathcal{N}}$, для которой $u(a_1, a_2) = r$.*

Доказательство. Докажем существование. Возьмем $i \in \mathcal{M}$ с дуальными координатами $(a_1, a_2, a_2, \ldots, a_2)$. Поскольку $a_1 \neq a_2$, он невырожден. Тогда найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle i, \alpha \rangle = r$. Пусть теперь $u = U[\alpha] \circ (\rho_1, \rho_2, \rho_2, \ldots, \rho_2)$, где $\rho_1, \rho_2 \in U^2_{\mathcal{N}}$ — координатные функции (см. предложение 1.7). Как суперпозиция функции из $U^m_{\mathcal{N}}$ с m функциями из $U^2_{\mathcal{N}}$, она будет, согласно предложению 1.2, принадлежать $U^2_{\mathcal{N}}$. При этом $u(a_1, a_2) = U[\alpha](a_1, a_2, \ldots, a_2) = \langle i, \alpha \rangle = r$, поэтому функция u удовлетворяет требуемым нами условиям.

Для доказательства единственности рассмотрим $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(a_1, \ldots, a_1)$, $(a_2, \ldots, a_2)$, соответственно. β_1, β_2 не равны, и значит, согласно предложению 1.18, независимы. Пусть $u, u' \in U^2_{\mathcal{N}}$ удовлетворяют условиям предложения. Обозначим $\alpha = V_{(\beta_1, \beta_2)}[u]$, $\alpha' = V_{(\beta_1, \beta_2)}[u']$. Тогда $\langle Z, \alpha \rangle = (r, \ldots, r) = \langle Z, \alpha' \rangle$, $\alpha = \alpha'$, откуда, как и раньше, когда мы доказывали единственность, $u = u'$. $\square$

Предложение 1.21. *Пусть $i \in \mathcal{M}$, $j \in [i]$. Тогда найдется такая $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, что $j = V_{(i)}[u]$.*

Доказательство. Обозначим $\langle i, \Omega \rangle = (a_1, \ldots, a_m)$, $\langle j, \Omega \rangle = (b_1, \ldots, b_m)$. В силу леммы 1.6 нам достаточно найти функцию $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, такую, что $u(a_q) = b_q$, $q = 1, \ldots, m$.

Предположим сначала, что i невырожден, то есть не все $a_1, \ldots, a_m$ равны друг другу. Пусть s таково, что $a_s \neq a_1$. Тогда, согласно предложению 1.20, для $q = 2, \ldots, \hat{s}, \ldots, m$ найдутся такие функции $u^q \in U^2_{\mathcal{N}}$, что $a_q = u^q(a_1, a_s)$. Пусть $v = U_{(i)}[j]$, то есть $\langle j, \alpha \rangle = v(\langle i, \alpha \rangle)$ для всех $\alpha \in \mathcal{N}$. Тогда при подстановке на место α элементов $\omega_1, \ldots, \omega_m$ получаем $b^t = v(a_t)$, $t = 1, \ldots, m$. Пользуясь предложением 1.4, получим теперь $b_q = v(a_q) = v(u^q(a_1, a_s)) = u^q(v(a_1), v(a_s)) = u^q(b_1, b_s)$, $q = 2, \ldots, \hat{s}, \ldots, m$.

В качестве u возьмем функцию из $U^1_{\mathcal{M}}$, удовлетворяющую условиям $u(a_1) = b_1$, $u(a_s) = b_s$. Для $q = 2, \dots, \hat{s}, \dots, m$ теперь имеем в силу ранее доказанного : $u(a_q) = u(u^q(a_1, a_s)) = u^q(u(a_1), u(a_s)) = u^q(b_1, b_s) = b_q$, что нам и требовалось.

В случае вырожденного i элемент $j \in [i]$, очевидно, тоже вырожден, и в качестве u можно взять постоянную функцию. □

Лемма 1.12. *Пусть* $i' \in \mathcal{M}$, $i \in [i'] \subseteq \mathcal{M}$ *невырожден, и* $u = U_{(i')}[i]$ *(*$u \in U^1_{\mathcal{M}}$ *по предложению 1.21). Тогда найдется такая* $u' \in U^1_{\mathcal{M}}$, *что* $u \circ u' = \mathrm{id} : R \to R$. *Иными словами, для* $k = 1$ *и пространства* $\mathcal{M}$ *выполняется условие У1.*

Доказательство. Обозначим $u(\langle i', \omega_q \rangle) = a_q$, $q = 1, \dots, m$. Тогда $(a_1, \dots, a_m) = (u(\langle i', \omega_1 \rangle, \dots, \langle i', \omega_m \rangle)) = \langle i, \Omega \rangle$. Поскольку i невырожден, найдется такой индекс s, что $a_s \neq a_1$. Тогда, согласно предложению 1.19, можно построить функцию $u' \in U^1_{\mathcal{M}}$, такую, что $u'(a_1) = \langle i', \omega_1 \rangle$, $u'(a_s) = \langle i', \omega_s \rangle$. Покажем, что u' удовлетворяет условиям леммы. Обозначим $u \circ u' = v$. Согласно предложению 1.2, $v \in U^1_{\mathcal{M}}$. При этом $v(a_1) = a_1$, $v(a_s) = a_s$, что, ввиду утверждения единственности предложения 1.19, дает требуемое $v = \mathrm{id}$. □

Следствие 1.4. *Пусть* $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, *и не является тождественной функцией. Тогда и обратима, и обратная ей функция также лежит в* $U^1_{\mathcal{M}}$.

Доказательство. Беря $i' = z_1$ (он невырожден, например, в силу аксиомы А2), $i = V_{(z_1)}[u]$, мы получаем, что $u = U_{(i')}[i]$, и элементы i, i' удовлетворяют условиям леммы. Требуемое нам утверждение теперь следует из утверждения леммы. □

Предложение 1.22. *Пусть* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. *Пусть* $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. *Тогда найдется такая* $u \in U^2_{\mathcal{N}}$, *что* $\alpha = V_{(\alpha_1, \alpha_2)}[u]$.

Доказательство. Обозначим $\langle Z, \alpha \rangle = (b_1, \dots, b_n)$, $\langle Z, \alpha_p \rangle = (a_{p1}, \dots, a_{pn})$, $p = 1, 2$. Поскольку $\alpha_1 \neq \alpha_2$, найдется такой индекс s, что $a_{1s} \neq a_{2s}$. Обозначим за $u_q \in U^1_{\mathcal{M}}$, $q = 1, \dots, \hat{s}, \dots, n$, функции, заданные следующими соотношениями: $u_q(a_{1s}) = a_{1q}$, $u_q(a_{2s}) = a_{2q}$. Если $v = U_{(\alpha_1,\alpha_2)}[\alpha]$, то есть $\langle i, \alpha\rangle = v(\langle i, \alpha_1\rangle, \langle i, \alpha_2\rangle)$, для всех $i \in \mathcal{M}$, то при подстановке на место i элементов $z_1, \dots, z_n$ получаем $b_t = v(a_{1t}, a_{2t})$, $t = 1, \dots, n$. Тогда $b_q = v((a_{1q}, a_{2q}) = v(u_q(a_{1s}), u_q(a_{2s})) = u_q(v(a_{1s}, a_{2s})) = u_q(b_s)$, $q = 1, \dots, \hat{s}, \dots, n$. Беря в качестве u функцию из $U^2_{\mathcal{N}}$, для которой $u(a_{1s}, a_{2s}) = b_s$, получаем теперь для $q \neq s$: $u(a_{1q}, a_{2q}) = u(u_q(a_{1s}), u_q(a_{2s})) = u_q(u(a_{1s}, a_{2s})) = u_q(b_s) = b_q$, что, с учетом, леммы 1.6, и дает нам требуемое. $\square$

Лемма 1.13. *Пусть* $(\alpha'_1, \alpha'_2) = \mathfrak{A}' \in \mathcal{N}^k$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [\alpha'_1, \alpha'_2] \subseteq \mathcal{N}$ *независимы,* $u_1 = U_{\mathfrak{A}'}[\alpha_1]$, $u_2 = U_{\mathfrak{A}'}[\alpha_2]$ *(*$u_1, u_2 \in U^2_{\mathcal{N}}$ *по предложению 1.22). Тогда отображение* $(u_1, u_2) : R^2 \to R^2$ *(декартово произведение двух отображений* $R^2 \to R$*) биективно, и найдутся такие* $u'_1, u'_2 \in U^2_{\mathcal{N}}$*, что отображение* $(u'_1, u'_2) : R^2 \to R^2$ *является обратным к отображению* (u_1, u_2)*. Иными словами, для* $k = 2$ *и пространства* $\mathcal{N}$ *выполняется условие У1.*

Доказательство. Обозначим $(u_1, u_2)(\langle z_q, \mathfrak{A}'\rangle) = (a_{1q}, a_{2q})$, $q = 1, \dots, n$. Тогда $(a_{p1}, \dots, a_{pn}) = (u_p(\langle z_1, \mathfrak{A}'\rangle), \dots, u_p(\langle z_n, \mathfrak{A}'\rangle)) = (\langle z_1, \alpha_p\rangle, \dots, \langle z_n, \alpha_p\rangle) = \langle Z, \alpha_p\rangle$, $p = 1, 2$.

Поскольку α_1, α_2 независимы, найдется такой индекс s, что $a_{1s} \neq a_{2s}$. Определим $u'_p \in U^2_{\mathcal{N}}$ равенством $u'_p(a_{1s}, a_{2s}) = \langle z_s, \alpha'_p\rangle$, $p = 1, 2$. Согласно предложению 1.2 $(u_1, u_2) \circ (u'_1, u'_2) = (v_1, v_2) : R^2 \to R^2$ для некоторых $v_1, v_2 \in U^2_{\mathcal{N}}$. Покажем, что v_1, v_2 являются координатными функциями. Действительно, $v_p(a_{1s}, a_{2s}) = u_p(u'_1(a_{1s}, a_{2s}), u'_2(a_{1s}, a_{2s})) = u_p(\langle z_s, \alpha'_\rangle, \langle z_s, \alpha'_2\rangle) = a_{ps}$, $p = 1, 2$, по построению функций v_p. Поскольку координатные функции лежат в $U^2_{\mathcal{N}}$, отсюда следует, в силу единственности, что функции v_1, v_2 являются координатными, и, значит, отображение (v_1, v_2) тождественно. $\square$

Лемма 1.14. *Пусть элементы* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$ *имеют дуальные координаты* $(e, O, \dots, O)$, $(O, e, O, \dots, O)$*, соответственно. Тогда система* $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ *независима.*

Доказательство. Покажем, что $\omega_0 \notin [\alpha_1, \alpha_2]$. Действительно, в противном случае согласно лемме 1.7 (условие У1 выполняется ввиду леммы 1.13) нашлась бы такая функция $u \in U^2_{\mathcal{N}}$, что $u(e, O) = O$, $u(O, e) = O$. Но из первого из этих условий, в силу утверждения единственности предложения 1.20, следует, что u совпадает со второй координатной функцией (поскольку координатные функции лежат в $U^2_{\mathcal{N}}$ и для второй координатной функции ρ_2 также выполнено $\rho_2(e, O) = O$). Аналогично, из условия $u(O, e) = O$ следует, что u совпадает с первой координатной функцией — противоречие. Поскольку, ввиду предложения 1.18, α_1 и α_2 независимы, отсюда следует, согласно следствию 1.1 предложения 1.5, что система элементов $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ независима. □

Предложение 1.23. *$m \geq 3$.*

Доказательство. Предположим противное — $m = 2$. Тогда, согласно предложению 1.5, $\mathcal{N} = [\omega_1, \omega_2]$. Рассмотрим элементы $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$, имеющие дуальные координаты $(e, O, \ldots, O)$, $(O, e, O, \ldots, O)$, соответственно. Согласно лемме 1.14, система $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ независима. Но $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0 \in [\omega_1, \omega_2]$ — противоречие. □

Предложение 1.24. *Для любых $r_1, r_2, r_3 \in R$ существует единственная функция $u \in U^2_{\mathcal{M}}$, такая, что $u(e, O) = r_1$, $u(O, e) = r_2$, $u(O, O) = r_3$.*

Доказательство. Покажем существование. Возьмем $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$, с дуальными координатами $(e, O, \ldots, O)$, $(O, e, O, \ldots, O)$, соответственно. Согласно лемме 1.14, система элементов $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ независима. Тогда мы можем выбрать $i \in \mathcal{M}$ так, чтобы $\langle i, \alpha_1 \rangle = r_1$, $\langle i, \alpha_2 \rangle = r_2$, $\langle i, \omega_0 \rangle = r_3$. Функция $u = O^n_2(U[i])$, легко видеть, будет удовлетворять нашим требованиям.

Для доказательства единственности возьмем $j_1, j_2 \in \mathcal{M}$ с дуальными координатами $(e, O, \ldots, O)$, $(O, e, O, \ldots, O)$, соответственно. Очевидно, j_2 невырожден. Заметим, что $j_1 \notin [j_2]$, так как в противном случае нашлась бы, согласно предложению 1.21 и лемме 1.7 (мы пользуемся также доказанным $m \geq 3$) , такая функция $v \in U^1_{\mathcal{M}}$, что $v(O) = e$, $v(e) = O$, $v(O) = O$ —

противоречие. Теперь ввиду следствия 1.1 предложения 1.5 (условие У1 выполнено по лемме 1.12), получаем, что j_1 и j_2 независимы. Если теперь $u, u' \in U^2_{\mathcal{M}}$ удовлетворяют условиям предложения, то для элементов $i = V_{(j_1,j_2)}[u]$, $i' = V_{(j_1,j_2)}[u']$ получаем $\langle i, \Omega\rangle = (r_1, r_2, r_3, \ldots, r_3) = \langle i', \Omega\rangle$, откуда $i = i'$, и, применяя для j_1, j_2, аксиому А3, как и в других доказательствах единственности, получаем $u = u'$. $\square$

Предложение 1.25. *Для любых $r_1, r_2 \in R$ существует единственная функция $u \in U^3_{\mathcal{N}}$, такая, что $u(e, O, O) = r_1$, $u(O, e, O) = r_2$.*

Доказательство. Докажем существование. Возьмем $i_1, i_2 \in \mathcal{M}$ так, чтобы $\langle i_1, \Omega\rangle = (e, O, \ldots, O)$, $\langle i_2, \Omega\rangle = (O, e, O, \ldots, O)$. Как мы показали при доказательстве предложения 1.24, они независимы. Тогда найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle i_1, \alpha\rangle = r_1$, $\langle i_2, \alpha\rangle = r_2$. Возьмем $u = U[\alpha] \circ (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_3, \ldots, \rho_3) \in U^3_{\mathcal{N}}$, где $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in U^3_{\mathcal{N}}$ — координатные функции. Как и в предыдущих случаях, легко проверяется, что она удовлетворяет нашим требованиям.

Для доказательства единственности рассмотрим элементы $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(e, O, \ldots, O)$, $(O, e, O, \ldots, O)$, соответственно. Для $u, u' \in U^3_{\mathcal{N}}$, удовлетворяющих условиям предложения, обозначаем $\alpha = V_{(\alpha_1,\alpha_2,\omega_0)}[u]$, $\alpha' = V_{(\alpha_1,\alpha_2,\omega_0)}[u']$, и, применяя обычные рассуждения, получаем, что $i = i'$ и, ввиду независимости $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ (лемма 1.14), $u = u'$. $\square$

Отметим, что выше нами было доказано выполнение условия У1 для пространства $\mathcal{M}$ при $k = 1$ (лемма 1.12) и для пространства $\mathcal{N}$ при $k = 1, 2$ (следствие 1.3, лемма 1.13). Поэтому далее мы будем свободно ссылаться в соответствующих ситуациях на предложение 1.5 и его следствие 1.1.

Структура тела на R и вид $\langle,\rangle$

Введем на R операцию умножения $\cdot$ следующим образом. Пусть $a, b \in R$. По предложению 1.19 найдется единственная функция $\varphi_a \in U^1_{\mathcal{M}}$, такая, что $\varphi_a(e) = a$, $\varphi_a(O) = O$. Умножение в R определяется по отношению к функции φ_a так же, как и в случае наличия нулей в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$:

$$a \cdot b := \varphi_a(b), \quad \varphi_a \in U^1_{\mathcal{M}} : \varphi_a(e) = a,\ \varphi_a(O) = O.$$

Введем на R операцию сложения следующим образом. Пусть $f \in U^2_{\mathcal{M}}$ — функция, существующая ввиду предложения 1.24, такая, что $f(e, O) = e$, $f(O, e) = e$, $f(O, O) = O$. Для $a, b \in R$ положим

$$a + b := f(a, b).$$

Покажем, что умножение на R можно ввести двойственным образом с помощью функций из $U_{\mathcal{N}}$. Пусть $a, b \in R$. По предложению 1.20 найдется единственная функция $\varphi^b \in U^2_{\mathcal{N}}$, такая, что $\varphi^b(e, O) = a$. Покажем, что

$$a \cdot b = \varphi^b(a, O).$$

Действительно, согласно предложению 1.4, $\varphi^b(a, O) = \varphi^b(\varphi_a(e), \varphi_a(O)) = \varphi_a(\varphi^b(e, O)) = \varphi_a(b) = a \cdot b$.

Далее для произвольных $a, b \in R$ через φ_a, φ^b, f будут обозначаться определенные выше функции.

Предложение 1.26. *Алгебраическая система* $(R, +\cdot, O, e)$ *является телом.*

Доказательство. Доказательство этого предложения почти полностью совпадает с доказательством предложения 1.11, нужно лишь проверять условие $\varphi(O) = O$ для различных функций $\varphi \in U^1_{\mathcal{M}}$.

Покажем, что для всех $a \in R$ верно $e \cdot a = a \cdot e = a$. Ввиду утверждения единственности предложения 1.19, φ_e совпадает с тождественной функцией (очевидно лежащей в $U^1_{\mathcal{M}}$), и потому $e \cdot a = \varphi_e(a) = a$. Что же касается функции $\varphi^e \in U^2_{\mathcal{N}}$, ввиду предложения 1.20 она совпадает с координатной функцией $\rho_1 \in U^2_{\mathcal{N}}$, для которой также $\rho_1(e, O) = e$, $\rho_1(O, O) = O$. Теперь, вследствие двойственного определения умножения $a \cdot e = \varphi^e(a, O) = \rho_1(a, O) = a$.

Покажем, что для любых $a, b, c \in R$ выполняется $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Действительно, $a \cdot (b \cdot c) = \varphi_a(b \cdot c) = \varphi_a(\varphi_b(c)) = \varphi(c)$, где $\varphi = \varphi_a \circ \varphi_b \in U^1_{\mathcal{M}}$. При этом $\varphi(e) = \varphi_a(\varphi_b(e)) = \varphi_a(b) = a \cdot b$, $\varphi(O) = \varphi_a(\varphi_b(O)) = O$, откуда $\varphi = \varphi_{a \cdot b}$ и, по определению умножения, $\varphi(c) = (a \cdot b) \cdot c$, что нам и требовалось.

Покажем, что для всех $a \in R^*$ найдется единственный элемент $b \in R$, такой, что $a \cdot b = b \cdot a = e$. Функция φ_a обратима в $U^1_{\mathcal{M}}$, по следствию 1.4 леммы 1.12. Обозначим $\varphi_a^{-1} = \varphi$. Возьмем $b = \varphi(e)$. $\varphi(O) = O$ по построению, и из предложения 1.19 получаем $\varphi = \varphi_b$. Тогда $b \cdot a = \varphi(a) = e$.

Рассмотрим теперь такую (существующую, согласно предложению 1.20) функцию $\varphi' \in U^2_{\mathcal{N}}$, что $\varphi(a, O) = e$, $\varphi(O, O) = O$. Обозначим $\varphi(e, O) = b'$. тогда, по предложению 1.20, $\varphi = \varphi^{b'}$, и $a \cdot b' = \varphi(a, O) = e$. Равенство $b = b'$ и единственность обратного элемента следуют теперь из ранее доказанных ассоциативности и свойства единицы.

Покажем, что для любых $a, b \in R$ выполняется $a + b = b + a$. Пусть $\tau : R^2 \to R^2$ — перестановка координат. Согласно лемме 1.3, $f' = f \circ \tau \in U^2_{\mathcal{M}}$. При этом $f'(e, O) = f(O, e) = e$, $f'(O, e) = e$, $f'(O, O) = O$. Тогда в силу предложения 1.24 $f' = f$. При этом $b + a = f(b, a) = f'(a, b)$, и потому $b + a = a + b$.

Покажем, что для всех $a \in R$ верно $a + O = a$. Обозначим $f' = O^2_1(f) \in U^1_{\mathcal{M}}$. Тогда $f'(e) = e$, $f'(O) = O$, и f' является тождественной функцией. Теперь $a + O = f(a, O) = f'(a) = a$.

Покажем, что для любых $a, b, c \in R$ выполняется $(a+b)+c = a+(b+c)$. Мы можем далее считать a отличным от O — в противном случае сразу получаем из уже доказанного $(O + b) + c = b + c = O + (b + c)$. Пусть $\beta \in \mathcal{N}$ таково, что $\langle z_1, \beta \rangle = a$, $\langle z_2, \beta \rangle = c$. Рассмотрим функцию $\varphi \in U^1_{\mathcal{M}}$, такую, что $\varphi(a) = b$, $\varphi(O) = O$. Обозначим $j = V_{(z_1)}[\varphi] \in [z_1]$. Тогда $\langle j, \beta \rangle = \varphi(\langle z_1, \beta \rangle) = b$, $\langle j, \omega_0 \rangle = \varphi(\langle z_1, \omega_0 \rangle) = O$. Пусть $j_1 = V_{(z_1, j)}[f]$, $j_2 = V_{(j, z_2)}[f]$ — тогда $\langle j_1, \beta \rangle = a + b$, $\langle j_2, \beta \rangle = b + c$, $\langle j_1, \omega_0 \rangle = f(O, O) = O$, $\langle j_2, \omega_0 \rangle = O$.

Наконец, пусть $i_1 = V_{(j_1,z_2)}[f]$, $i_2 = V_{(z_1,j_2)}[f]$. Тогда $\langle i_1, \omega_0\rangle = \langle i_2, \omega_0\rangle = O$,

$$\langle i_1, \beta\rangle = (a+b)+c\,, \quad \langle i_2, \beta\rangle = a+(b+c). \tag{1.3.3}$$

Отметим, что в силу леммы 1.4 и построения все элементы j, j_1, j_2, i_1, i_2 лежат в $[z_1, z_2]$. Рассмотрим элементы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathcal{E} \in \mathcal{N}^2$ с дуальными координатами $(e, O, \ldots, O)$, $(O, e, O, \ldots, O)$, соответственно. Обозначим $(\langle j, \mathcal{E}\rangle) = (x, y)$. По построению, $\langle i_1, \varepsilon_1\rangle = f(\langle j_1, \varepsilon_1\rangle, \langle z_2, \varepsilon_1\rangle) = f(f(\langle z_1, \varepsilon_1\rangle, \langle j, \varepsilon_1\rangle), \langle z_2, \varepsilon_1\rangle) = f(f(e,x), O) = f(e,x)$. Аналогично получаем $\langle i_1, \varepsilon_2\rangle = f(f(O,y), e) = f(y,e)$, $\langle i_2, \varepsilon_1\rangle = f(e, f(x,O)) = f(e,x)$, $\langle i_2, \varepsilon_2\rangle = f(O, f(y,e)) = f(y,e)$. Таким образом, $\langle i_1, \mathcal{E}\rangle = \langle i_2, \mathcal{E}\rangle$. Обозначим $u_1 = U_{(z_1,z_2)}[i_1]$, $u_2 = U_{(z_1,z_2)}[i_2]$. Тогда $u_1(e,O) = u_1(\langle z_1, \varepsilon_1\rangle, \langle z_2, \varepsilon_1\rangle) = \langle i_1, \varepsilon_1\rangle = \langle i_2, \varepsilon_1\rangle = u_2(e,O)$, и аналогично $u_1(O,e) = u_2(O,e)$. Кроме того, $u_1(O,O) = u_1(\langle z_1, \omega_0\rangle, \langle z_2, \omega_0\rangle = \langle i_1, \omega_0\rangle = O$, и аналогично $u_2(O,O) = O$. Тогда, в силу предложения 1.24, $u_1 = u_2$. Поэтому $\langle i_1, \beta\rangle = u_1(\langle z_1, \beta\rangle, \langle z_2, \beta\rangle) = u_2(\langle z_1, \beta\rangle, \langle z_2, \beta\rangle) = \langle i_2, \beta\rangle$, что, в силу равенств (1.3.3), и дает нам требуемую ассоциативность.

Покажем, то для каждого $a \in R$ найдется элемент $b \in R$, для которого $a + b = O$ (его единственность известным образом следует из ассоциативности и коммутативности сложения). Обозначим $z = V_{(z_1,z_2)}[f]$ Заметим, что z и z_1 независимы. Действительно, в противном случае, согласно следствию 1.1 предложения 1.5 , либо $z \in [z_1]$, либо z_1 вырожден. Последняя возможность очевидно исключена (например, ввиду аксиомы A2). Пусть $z \in [z_1]$. Возьмем такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle z_1, \alpha\rangle = O$, $\langle z_2, \alpha\rangle = e$. Тогда $\langle z_1, \alpha\rangle = \langle z_1, \omega_0\rangle$, откуда, согласно определению зависимости, $\langle z, \alpha\rangle = \langle z, \omega_0\rangle$, и $e = f(O,e) = \langle z, \alpha\rangle = \langle z, \omega_0\rangle = f(O,O) = O$ — противоречие, из которого следует, что z, z_1 независимы. Возьмем теперь такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle z_1, \alpha\rangle = a$, $\langle z, \alpha\rangle = O$. Обозначим $\langle z_2, \alpha\rangle = b$. Тогда $a + b = f(a,b) = f(\langle z_1, \alpha\rangle, \langle z_2, \alpha\rangle) = \langle z, \alpha\rangle = O$, что нам и требовалось.

Покажем левую дистрибутивность. Пусть $a, b, c \in R$. $c \cdot (a+b) = \varphi_c(f(a,b))$. Обозначим $u = \varphi_c \circ f \in U^2_{\mathcal{M}}$. Тогда $u(e,O) = \varphi_c(e) = c$, $u(O,e) =$

c, $u(O,O) = O$. С другой стороны, $c \cdot a + c \cdot b = f(\varphi_c(a), \varphi_c(b)) = u'(a,b)$ для некоторой $u' \in U^2_{\mathcal{M}}$. При этом $u'(e,O) = f(c,O) = c$, $u'(O,e) = c$, $u'(O,O) = O$. Таким образом, в силу предложения 1.24, $u = u'$, что дает левую дистрибутивность.

Покажем правую дистрибутивность. $(a + b) \cdot c = \varphi^c(f(a,b), O)$. Преобразуем далее, пользуясь предложением 1.4: $\varphi^c(f(a,b), O) = \varphi^c(f(a,b), f(O,O)) = f(\varphi^c(a,O), \varphi^c(b,O)) = a \cdot c + b \cdot c$ — правая дистрибутивность доказана. $\square$

Пусть $f^* \in U^3_{\mathcal{N}}$ — функция, существующая по предложению 1.25, такая, что $f^*(e,O,O) = e$, $f^*(O,e,O) = e$. Покажем, что для любых $a, b \in R$

$$a + b = f^*(a,b,O).$$

Прежде всего покажем, что $f^*(a,O,O) = a$. Пусть $f' = f \circ (\rho_1, \rho_2, \rho_2) \in U^2_{\mathcal{N}}$, где $\rho_1, \rho_2 \in U^2_{\mathcal{N}}$ — координатные функции. Тогда $f'(e,O) = f^*(e,O,O) = e$, и $f' = \varphi^e$ ввиду предложения 1.20. Отсюда $f^*(a,O,O) = \varphi^e(a,O) = a \cdot e = a$. Аналогично, с помощью функции $f'' = f \circ (\rho_2, \rho_1, \rho_2)$, показывается $f^*(O,b,O) = b$. Теперь, согласно предложению 1.4, $f^*(a,b,O) = f^*(f(a,O), f(O,b), f(O,O)) = f(f^*(a,O,O), f^*(O,b,O)) = f(a,b) = a + b$.

Зададим на $\mathcal{M}$ операции сложения и домножения на элемент из R. Пусть $i, j \in \mathcal{M}$. Положим по определению

$$i + j := V_{(i,j)}[f]; \qquad a \cdot i := V_{(i)}[\varphi_a].$$

В качестве нуля $\mathcal{M}$ (в смысле заданной структуры) возьмем z_0.

Для доказательства того, что введенные операции задают на $\mathcal{M}$ структуру векторного пространства, установим его изоморфизм (биекцию, сохраняющую операции и ноль) с левым векторным пространством строк длины m над R. Согласно аксиомам A2 и A6, отображение $\pi^\Omega : \mathcal{M} \to R^m$ является биекцией. Очевидно, $\pi^\Omega(z_0) = (O, \dots, O)$. Покажем, что π^W сохраняет операции. Для $i, j \in \mathcal{M}$ имеем в силу определения оператора

$V_{(i,j)}$: $\langle (i+j), \Omega\rangle = \langle V_{(i,j)}[f], \Omega\rangle = (f(\langle i, \alpha_1\rangle, \langle j, \alpha_1\rangle), \ldots, f(\langle i, \alpha_n\rangle, \langle j, \alpha_n\rangle)) = \langle i, \Omega\rangle + \langle j, \Omega\rangle$. Далее, если $a \in R$, то $\langle a \cdot i, \Omega\rangle = (\varphi_a(\langle i, \alpha_1\rangle), \ldots, \varphi_a(\langle i, \alpha_n\rangle)) = a \cdot \langle i, \Omega\rangle$, что нам и требуется.

Зададим теперь операции сложения и умножения на скаляр в $\mathcal{N}$ следующим образом. Пусть $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$, $a \in R$, $\varphi^a \in U^1_{\mathcal{N}}$ определена, как раньше. Положим

$$\alpha + \beta := V_{(\alpha,\beta,\omega_0)}[f]; \quad \alpha \cdot a := V_{(\alpha,\omega_0)}[\varphi^a]. \tag{1.3.4}$$

В качестве нуля $\mathcal{N}$ в смысле заданной структуры возьмем ω_0. Тогда биективное отображение $\pi^Z : \mathcal{N} \to R^n$ на векторное пространство строк длины n будет сохранять нуль и операции сложения и домножения на скаляр, задавая тем самым изоморфизм векторных пространств. Покажем это. Для $\alpha, \beta \in R$ имеем $\pi^Z(\alpha + \beta) = \langle Z, V_{(a,\beta,\omega_0)}[f]\rangle = (f(\langle z_1, \alpha\rangle, \langle z_1, \beta\rangle, \langle z_1, \omega_0\rangle, \ldots, f(\langle z_n, \alpha\rangle, \langle z_n, \beta\rangle, \langle z_n, \omega_0\rangle) = \langle Z, \alpha\rangle + \langle Z, \beta\rangle$ по определению сложения и поскольку $\langle Z, \omega_0\rangle = (O, \ldots, O)$. Аналогично, для $a \in R$ получаем $\pi^Z(\alpha \cdot a) = (\varphi^a(\langle z_1, \alpha\rangle, O), \ldots, \varphi^a(\langle z_n, \alpha\rangle, O)) = \langle Z, \alpha\rangle \cdot a$. Сохранение нуля очевидно. Таким образом, доказано следующее.

Предложение 1.27. *$\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ с введенными операциями являются левым размерности m и правым размерности n, соответственно, линейными пространствами над телом R (с нулями z_0 и ω_0, соответственно).*

Лемма 1.15. *Биформа $\langle , \rangle$ линейна слева на $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.*

Доказательство. Пусть $i, j \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$, $a \in R$, $\varphi_a \in U^1_{\mathcal{M}}$ такова, что $\varphi_a(e) = a$. Тогда $\langle i + j, \alpha\rangle = \langle V_{(i,j)}[f], \alpha\rangle = f(\langle i, \alpha\rangle, \langle j, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha\rangle + \langle j, \alpha\rangle$, и аналогично $\langle a \cdot i, \alpha\rangle = \varphi_a(\langle i, \alpha\rangle) = a \cdot \langle i, \alpha\rangle$. $\square$

Определим подмножество $\overline{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$ следующим образом:

$$\overline{\mathcal{M}} = \{i \in \mathcal{M} : \langle i, \omega_0\rangle = O\}.$$

Лемма 1.16. *$\overline{\mathcal{M}}$ является линейным подпространством коразмерности 1 в $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $i, j \in \overline{\mathcal{M}}$, $a \in R$. Тогда, согласно определению операций на $\mathcal{M}$ и определению зависимости, а также доказанной нами линейности биформы по первому аргументу $\langle a \cdot i, \omega_0 \rangle = \varphi_a(\langle i, \omega_0 \rangle) = \varphi_a(O) = O$, $\langle i + j, \omega_0 \rangle = f(\langle i, \omega_0 \rangle, \langle j, \omega_0 \rangle) = O$, откуда, соответственно, $a \cdot i \in \overline{\mathcal{M}}$ и $i + j \in \overline{\mathcal{M}}$. Мы показали, что $\overline{\mathcal{M}}$ является линейным подпространством.

Обозначим за z любой элемент $\mathcal{M}$, для которого $\langle z, \omega_0 \rangle = e$ (он найдется по аксиоме A3). Тогда $R \cdot z + \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$. Действительно, пусть $i \in \mathcal{M}$. Обозначим $\langle i, \omega_0 \rangle = r$. Тогда $\langle i - r \cdot z, \omega_0 \rangle = \langle i, \omega_0 \rangle - r \cdot \langle z, \omega_0 \rangle = O$, откуда $i - r \cdot z \in \overline{\mathcal{M}}$, что и требовалось. Отсюда следует утверждение о коразмерности. □

Лемма 1.17. *Биформа билинейна и невырождена на множестве аргументов* $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$.

Доказательство. Левая линейность доказана леммой 1.15. Покажем правую линейность. Пусть $i \in \overline{\mathcal{M}}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$. Тогда $\langle i, \alpha + \beta \rangle = \langle i, V_{(\alpha, \beta, \omega_0)}[f] \rangle = f(\langle i, \alpha \rangle, \langle i, \beta \rangle, \langle i, \omega_0 \rangle) = f(\langle i, \alpha \rangle, \langle i, \beta \rangle, O) = \langle i, \alpha \rangle + \langle i, \beta \rangle$, и аналогично с домножением на элемент из R.

Невырожденность биформы на $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$ слева тривиально следует из аксиомы невырожденности. Согласно теореме 1.1, это дает ее (двустороннюю) невырожденность. □

Невырожденность биформы на $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$ доказана, и мы получаем из теоремы 1.2, что размерности $\overline{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{N}$ равны, то есть $m - 1 = n$.

Выберем теперь в $\overline{\mathcal{M}}$ и N дуальные базисы $z'_1, \dots, z'_n$ и $\omega'_1, \dots, \omega'_n$, соответственно. Рассмотрим также элемент $z_e \in \mathcal{M} \setminus \overline{\mathcal{M}}$, такой, что $\langle z_e, \alpha \rangle = e$ для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ (такой элемент найдется в силу предложения 1.17: $z_e = V[u]$ для функции $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, тождественно равной e). Обозначим $(z'_1, \dots, z'_n) = Z'$, $(\omega'_1, \dots, \omega'_n, w_0) = \Omega'$. (Обозначаем также $\omega_0 = \omega'_{n+1}$).

Докажем выполнение формулы 1.2.2. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$. Обозначим $\langle Z', \alpha \rangle = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\langle i, \Omega' \rangle = (x_1, \dots, x_{n+1})$. Заметим, что

$$i = x_{n+1} \cdot z_e + i', \tag{1.3.5}$$

где $i' \in \overline{\mathcal{M}}$. Действительно, формула 1.3.5 означает просто, что $i' = i - x_{n+1} \cdot z_e$, и тогда $\langle i', \omega_0 \rangle = \langle i, \omega_0 \rangle - \langle x_{n+1} \cdot z_e, \omega_0 \rangle = x_{n+1} - x_{n+1} \cdot e = O$, откуда получаем нужное нам $i' \in \mathcal{M}$. Заметим, что для $k = 1, \ldots, n$ $\langle i', \omega'_k \rangle = \langle i, \omega'_k \rangle - \langle x_{n+1} \cdot z_e, \omega'_k \rangle = x_k - x_{n+1}$. Поскольку $\langle , \rangle$ билинейна на $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, мы получаем из леммы 1.1 $\langle i', \alpha \rangle = \langle i', \omega'_1 \rangle \cdot \langle z'_1, \alpha \rangle + \ldots + \langle i', \omega'_n \rangle \cdot \langle z'_n, \alpha \rangle = (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 +, \ldots, +(x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n$.

Теперь получаем, пользуясь левой линейностью биформы: $\langle i, \alpha \rangle = \langle x_{n+1} \cdot z_e, \alpha \rangle + \langle i', \alpha \rangle = x_{n+1} + (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 + \ldots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n$, что и требовалось.

Покажем оставшиеся утверждения доказываемой теоремы для рассматриваемого случая.

Предложение 1.28. *Отображения $\langle Z', \cdot \rangle : \mathcal{N} \to R^n$, $\langle \cdot, \Omega' \rangle : \mathcal{M} \to R^{n+1}$ биективны.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что, согласно определению операций линейного пространства в $\mathcal{M}$, любая линейная комбинация элементов $z'_1, \ldots, z'_n$ лежит в $[z'_1, \ldots, z'_n]$, а поскольку $z'_1, \ldots, z'_n$ — линейный базис $\mathcal{M}$, то $[z'_1, \ldots, z'_n] = \mathcal{M}$. Тогда если для $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$ $\langle Z', \alpha \rangle = \langle Z', \alpha' \rangle$, то и для любого $i \in \mathcal{M}$ $\langle i, \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$, откуда $\alpha = \alpha'$. Это означает инъективность отображения $\langle Z', \cdot \rangle$. Аналогично, $[\omega'_1, \ldots, \omega'_n, \omega_0] = \mathcal{N}$, что дает инъективность отображения $\langle \cdot, \Omega' \rangle$.

Поскольку биформа линейна слева, то и отображение $\langle \cdot, \Omega' \rangle$ (действующее из $\mathcal{M}$ в линейное пространство строк длины $n+1$) линейно. При этом образы элементов $z'_1, \ldots, z'_n, z_e$, будучи строками вида $(e, O, \ldots, O), \ldots, (O, \ldots, O, e, O), (e, \ldots, e)$, соответственно, образуют базис пространства строк R^{n+1}, поэтому любая строка из R^{n+1} может быть получена как образ некоторой линейной комбинации этих элементов. Отсюда следует сюръективность $\langle \cdot, \Omega' \rangle$.

Поскольку биформа линейна справа на $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$, а все $z'_1, \ldots, z'_n$ лежат в $\overline{\mathcal{M}}$, то и отображение $\langle Z', \cdot \rangle$ линейно. При этом образы элементов $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$

образуют канонический базис пространства строк R^n, поэтому любая строка из R^n может быть получена как образ некоторой линейной комбинации этих элементов. Отсюда следует сюръективность $\langle Z', \cdot\rangle$. $\square$

Предложение 1.29. *$U^n_{\mathcal{M}} = L^{l,a}_n(R)$, $U^m_{\mathcal{N}} = L^{r,s}_{n+1}(R)$.*

Доказательство. Рассмотрим множества $\bar{U}^n_{\mathcal{M}} = \{U_{Z'}[i] \,|\, i \in \mathcal{M}\}$, $\bar{U}^n_{\mathcal{M}} = \{U_{Z'}[i] \,|\, i \in \mathcal{M}\}$. Из аксиомы A5 следует $U^n_{\mathcal{M}} \subseteq \bar{U}^n_{\mathcal{M}}$, $U^m_{\mathcal{N}} \subseteq \bar{U}^m_{\mathcal{N}}$. Равенство $\bar{U}^n_{\mathcal{M}} = L^{l,a}_n(R)$ следует непосредственно из формулы 1.2.2 (в качестве коэффициентов функции $U_{Z'}[i]$ берутся $(x_1 - x_{n+1}), \ldots, (x_n - x_{n+1}), x_{n+1})$. Покажем, что $\bar{U}^m_{\mathcal{N}} = L^{r,s}_{n+1}(R)$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$, $\langle i, \Omega'\rangle = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, $\langle Z', \alpha\rangle = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Тогда $U_{\Omega'}[\alpha](x_1, \ldots, x_{n+1}) = \langle i, \alpha\rangle = (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 + \ldots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n + x_{n+1} = x_1 \cdot \xi_1 + \ldots + x_n \cdot \xi_n + x_{n+1}(-\xi_1 - \ldots - \xi_n + e)$. При этом коэффициенты $\xi_1, \ldots, \xi_n, (-\xi_1 - \ldots - \xi_n + e)$ могут принимать любые значения, в сумме дающие e, откуда следует требуемое.

Мы получили $U^n_{\mathcal{M}} \subseteq L^{l,a}_n(R)$, $U^m_{\mathcal{N}} \subseteq L^{r,s}_{n+1}(R)$. Покажем, что справедливы обратные включения. Пусть $u \in L^{r,s}_{n+1}(R)$, $u(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1 \cdot a_1 + \ldots + x_{n+1} \cdot a_{n+1}$. Рассмотрим элемент $\alpha \in \mathcal{N}$, такой, что $\langle Z', \alpha\rangle = (\sum_{k=1}^{n+1} \langle z'_1, \omega_k\rangle \cdot a_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n+1} \langle z'_n, \omega_k\rangle \cdot a_k)$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, обозначим $\langle i, \Omega'\rangle = (x_1, \ldots, x_{n+1})$. Тогда, с учетом равенства $a_1 + \ldots + a_{n+1} = e$, получаем

$$\langle i, \alpha\rangle =$$

$$(x_1 - x_{n+1}) \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \langle z'_1, \omega_k\rangle \cdot a_k + \ldots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \langle z'_n, \omega_k\rangle \cdot a_k + x_{n+1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (\sum_{l=1}^{n} (x_l - x_{n+1}) \cdot \langle z'_l, \omega_k\rangle + x_{n+1}) \cdot a_k - \sum_{k=1}^{n+1} x_{n+1} \cdot a_k + x_{n+1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \langle i, \omega_k\rangle \cdot a_k + O = u(\langle i, \Omega\rangle),$$

и мы получили, что $V[u] = \alpha$, что означает $u \in U^m_{\mathcal{N}}$. Таким образом, мы показали, что $L^{r,s}_{n+1}(R) \subseteq U^m_{\mathcal{N}}$.

Покажем теперь включение $L^{l,a}_n(R) \subseteq U^n_{\mathcal{M}}$ Пусть $u \in L^{l,a}_n(R)$, $u(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n + a_{n+1}$. Рассмотрим элемент $i \in \mathcal{M}$, такой, что

$$\langle i, \Omega' \rangle = (\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega_1' \rangle + a_{n+1}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega_{n+1}' \rangle + a_{n+1}).$$

Пусть $\alpha \in \mathcal{N}$, обозначим $\langle Z', \alpha \rangle = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Тогда

$$\langle i, \alpha \rangle = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega_1' \rangle + a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega_{n+1}' \rangle - a_{n+1} \right) \cdot \xi_1 + \ldots +$$
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega_n' \rangle + a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega_{n+1}' \rangle - a_{n+1} \right) \cdot \xi_n +$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega_{n+1}' \rangle + a_{n+1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (\langle z_k, \omega_1' \rangle - \langle z_k, \omega_{n+1}' \rangle) \cdot \xi_1 + \ldots +$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (\langle z_k, \omega_n' \rangle - \langle z_k, \omega_{n+1}' \rangle) \cdot \xi_n + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \omega_{n+1}' \rangle + a_{n+1} =$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (\sum_{l=1}^{n} (\langle z_k, \omega_l' - \langle z_k, \omega_{n+1}' \rangle) \cdot \xi_l + \langle z_k, \omega_{n+1}' \rangle)) + a_{n+1} =$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \langle z_k, \alpha \rangle + a_{n+1} = u(\langle Z, \alpha \rangle),$$

и мы получаем, что $u \in U_{\mathcal{M}}^n$, как нам и требовалось. $\square$

Таким образом, все утверждения теоремы 1.4 в рассматриваемом случае доказаны.

Замечание 1.4. Из построения Z', Ω' следует, что для $k, l = 1, \ldots, n$ $\langle z_k', \omega_l' \rangle = e$, если $k = l$, и $\langle z_k', \omega_l' \rangle = O$, если $k \neq l$. Кроме того, $\langle Z', \omega_{n+1}' \rangle = \langle Z', \omega_0 \rangle = (O, \ldots, O)$.

Отметим теперь, что случай наличия нуля в $\mathcal{N}$ и отсутствия в $\mathcal{M}$ получается из только что рассмотренного лишь перестановкой пространств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ ролями. Тогда равенство $m = n + 1$ переходит в $n = m + 1$, формула 1.2.2 — в формулу 1.2.3, а множества $U_{\mathcal{M}}^n$ и $U_{\mathcal{N}}^m$ переходят друг в друга.

1.3.4 В $\mathcal{M}$ нет нуля, в $\mathcal{N}$ нет нуля

Интерполяция функций из $U_{\mathcal{M}}$, $U_{\mathcal{N}}$

Как и в предыдущем случае, отсутствие нулей в $\mathcal{M}$ и в $\mathcal{N}$ означает, что все элементы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ невырождены. Фиксируем произвольный элемент $O \in R$. Обозначим $R^* = R \setminus \{O\}$. Согласно аксиоме A2, в $\mathcal{M}$ найдется такой элемент z_0, что $\langle z_0, \Omega\rangle = (O, \dots, O)$, а в $\mathcal{N}$ найдется такой элемент ω_0, что $\langle Z, \omega_0\rangle = (O, \dots, O)$. Мы будем ссылаться на них в дальнейшем.

В дальнейших рассуждениях фиксируем произвольный элемент $e \in R^*$.

$\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в дальнейших рассуждениях равноправны, поэтому мы будем, как и в случае наличия нулей в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, доказывать все утверждения, рассматривая $\mathcal{M}$ как основное множество; при этом утверждения, получаемые из них перестановкой $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ ролями, также будут верны и подразумеваются доказываемыми вместе с ними.

Предложение 1.30. *Для любых $a, r \in R$ существует единственная функция $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, такая, что $u(a) = r$.*

Доказательство. Покажем существование. Возьмем такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle Z, \alpha\rangle = (a, \dots, a)$. Поскольку все элементы $\mathcal{N}$ невырождены, мы можем взять, пользуясь аксиомой A3, $i \in \mathcal{M}$, такой, что $\langle i, \alpha\rangle = r$. Пусть $u = U[i] \circ (\mathrm{id}, \dots, \mathrm{id})$, где $\mathrm{id} \in U^1_{\mathcal{M}}$ — тождественная функция одной переменной, и $(\mathrm{id}, \dots, \mathrm{id})$ — отображение $R \to R^n$, сопоставляющее каждому элементу строку из n его копий. Тогда $u(a) = U[i](a, \dots, a) = U[i](\langle Z, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha\rangle = r$, что и требовалось.

Пусть теперь нашлись две функции $u, u' \in U^2_{\mathcal{M}}$, удовлетворяющие требованиям условию предложения. Возьмем, пользуясь аксиомой A2, $j \in \mathcal{N}$, такой, что $\langle j, \Omega\rangle = (a, \dots, a)$. Обозначим $i = V_{(j)}[u]$, $i' = V_{(j)}[u']$. Тогда $\langle i, \Omega\rangle = (r, \dots, r) = \langle i', \Omega\rangle$, откуда $i = i'$. Поэтому $u(\langle j, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha\rangle = \langle i', \alpha\rangle = u'(\langle j, \alpha\rangle)$ для любого $\alpha \in \mathcal{N}$. Поскольку j, как и любой элемент $\mathcal{M}$, невырожден, $\langle j, \alpha\rangle$ может, ввиду аксиомы A3, принимать любые значения из R, откуда следует $u = u'$. $\square$

Предложение 1.31. *Пусть $i \in \mathcal{M}$, $j \in [i]$. Тогда найдется такая $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, что $j = V_{(i)}[u]$.*

Доказательство. Обозначим $\langle i, \Omega \rangle = (a_1, \ldots, a_m)$, $\langle j, \Omega \rangle = (b_1, \ldots, b_m)$. В силу леммы 1.6 нам достаточно найти функцию $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, такую, что $u(a_q) = b_q$, $q = 1, \ldots, m$. Согласно предложению 1.30, для $q = 2, \ldots, m$ найдутся такие функции $u^q \in U^2_{\mathcal{N}}$, что $a_q = u^q(a_1)$. Если $v = U_{(i)}[j]$, то есть $\langle j, \alpha \rangle = v(\langle i, \alpha \rangle)$, для всех $\alpha \in \mathcal{N}$, то при подстановке на место α элементов $\omega_1, \ldots, \omega_m$ получаем $b_t = v(a_t)$, $t = 1, \ldots, m$. Тогда, пользуясь предложением 1.4, получаем $b_q = v(a_q) = v(u^q(a_1)) = u^q(v(a_1)) = u^q(b_1)$, $q = 2, \ldots, m$. В качестве u возьмем функцию из $U^1_{\mathcal{M}}$, удовлетворяющую условию $u(a_1) = b_1$. Для $q = 2, \ldots, m$ теперь имеем: $u(a_q) = u(u^q(a_1)) = u^q(u(a_1))) = u^q(b_1) = b_q$, что нам и требовалось. □

Лемма 1.18. *Пусть $i' \in \mathcal{M}$, $i \in [i']$ невырождены, $u = U_{(i')}[i]$ ($u \in U^1_{\mathcal{M}}$ по предложению 1.31). Тогда отображение $u : R \to R$ биективно, и найдется такая $u' \in U^1_{\mathcal{M}}$, что отображение $u' : R \to R$ является обратным к отображению u. Иными словами, выполнено условие У1 для $k = 1$.*

Доказательство. Обозначим $u(\langle i', \Omega \rangle) = (a_1, \ldots, a_m)$. Тогда $(a_1, \ldots, a_m) = (u(\langle I', \omega_1 \rangle), \ldots, u(\langle I', \omega_m \rangle)) = (\langle i, \omega_1 \rangle, \ldots, \langle i, \omega_m \rangle) = \langle i, \Omega \rangle$.

Зададим функцию $u'_1 \in U^1_{\mathcal{M}}$ таким образом, чтобы $u'_1(a_1) = \langle i', \omega_1 \rangle$. Согласно предложению 1.2, $u_1 \circ u'_1 = v$ для некоторой $v \in U^1_{\mathcal{M}}$. При этом $v(a_1) = u_1(\langle i', \omega_1 \rangle) = a_1$, что, в силу утверждения единственности предложения 1.30 и в силу того, что $\mathrm{id} \in U^1_{\mathcal{M}}$, дает требуемое $v = \mathrm{id}$. □

Следствие 1.5. *Пусть $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, u не является тождественной функцией. Тогда u обратима, и обратная ей функция также лежит в $U^1_{\mathcal{M}}$.*

Доказательство. Беря $i' = z_1$, $i = V_{(z_1)}[u]$, мы получаем, что $u = U_{(i)}[i']$, и элементы i, i' удовлетворяют условиям леммы. Требуемое нам утверждение теперь следует из утверждения леммы. □

Лемма 1.19. *Пусть* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$, $u \in U^1_{\mathcal{M}}$ *таковы, что* $u(a_1) = b_1$, $u(a_2) = b_2$. *Тогда существует* $v \in U^1_{\mathcal{N}}$, *такая, что* $v(a_1) = a_2$, $v(b_1) = b_2$.

Доказательство. Согласно предложению 1.30, будет существовать такая функция $v \in U^1_{\mathcal{N}}$, что $v(a_1) = a_2$. При этом, согласно предложению 1.4, $v(b_1) = v(u(a_1)) = u(v(a_1)) = u(a_2) = b_2$, что нам и требуется. □

Отметим, что в условиях леммы утверждения о существовании функции $u \in U^1_{\mathcal{M}}$ и функции $v \in U^1_{\mathcal{N}}$ оказываются, в действительности, эквивалентными, поскольку, поменяв ролями $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ (а также a_2 и b_1), мы получаем уже, что из существования v следует существование u.

Предложение 1.32. *Пусть* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$ *таковы, что* $a_1 \neq a_2$. *Полагаем также, что выполнено какое-нибудь из следующих двух условий.*

1. $b_1 = b_2 = O$,

2. *не существует такой функции* $v \in U^1_{\mathcal{N}}$, *что* $v(a_1) = a_2$, $v(b_1) = b_2$.

Тогда для любых $r_1, r_2 \in R$ *существует единственная функция* $u \in U^2_{\mathcal{M}}$, *такая, что* $u(a_1, b_1) = r_1$, $u(a_2, b_2) = r_2$.

Доказательство. Покажем существование. Прежде всего отметим, что условие $b_1 = b_2 = O$, в действительности, влечет за собой условие отсутствия функции $v \in U^1_{\mathcal{N}}$ со свойством $v(a_1) = a_2$, $v(b_1) = b_2$. Действительно, предположим наличие такой функции и применим для функций из $U^1_{\mathcal{N}}$ утверждение единственности первой части доказываемого предложения, учитывая $\mathrm{id} \in U^1_{\mathcal{N}}$. Получаем, что из $v(O) = O$ следует $v = \mathrm{id}$, а это противоречит условию $v(a_1) = a_2$ — то есть функции v с нужным свойством не существует.

Возьмем теперь $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(a_1, b_1, \ldots, b_1)$, $(a_2, b_2, \ldots, b_2)$, соответственно. Покажем, что α_1, α_2 независимы.. Действительно, в противном случае, согласно следствию 1.1 предложения 1.5 (условие У1 выполнено в силу леммы 1.18), выполнялось бы $\alpha_2 \in [\alpha_1]$ (α_1

невырожден, как и любой другой элемент $\mathcal{N}$ в рассматриваемом случае). Тогда, согласно лемме 1.6, найдется такая функция $v \in U^1_{\mathcal{N}}$, что $v(a_1) = a_2$, $v(b_1) = b_2$ — противоречие. Теперь мы можем выбрать $i \in \mathcal{M}$ так, чтобы $\langle i, \alpha_1 \rangle = r_1$, $\langle i, \alpha_2 \rangle = r_2$. Обозначим за $\rho_1, \rho_2 \in U^2_{\mathcal{M}}$ координатные функции, и пусть $u = U[i] \circ (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_2) \in U^2_{\mathcal{M}}$. Тогда $u(a_1, b_1) = U[i](\rho_1(a_1, b_1), \rho_2(a_1, b_1), \dots, \rho_2(a_1, b_1)) = U[i](a_1, b_1, \dots, b_1) = U[i](\langle Z, \alpha_1 \rangle) = \langle i, \alpha_1 \rangle = r_1$, и аналогично $u(a_2, b_2) = r_2$.

Для доказательства единственности возьмем $j_1, j_2 \in \mathcal{M}$, такие, что $\langle j_1, \Omega \rangle = (a_1, a_2, \dots, a_2)$, $\langle j_2, \Omega \rangle = (b_1, b_2, \dots, b_2)$. Если j_1, j_2 зависимы, то либо $j_2 \in [j_1]$ (j_1 невырожден). Но это невозможно, так как в этом случае найдется, согласно лемме 1.6, функция $w \in U^1_{\mathcal{M}}$, такая, что $w(a_1) = b_1$, $w(a_2) = b_2$, а значит, в силу леммы 1.19, и функция $v \in U^1_{\mathcal{N}}$ со свойством $v(a_1) = a_2$, $v(b_1) = b_2$ — противоречие. Итак, j_1 и j_2 независимы. Если теперь $u, u' \in U^2_{\mathcal{M}}$ удовлетворяют условиям предложения, то для элементов $i = V_{(j_1,j_2)}[u]$, $i' = V_{(j_1,j_2)}[u']$ получаем $\langle i, \Omega \rangle = (r_1, r_2, \dots, r_2) = \langle i', \Omega \rangle$, откуда $i = i'$, и, применяя для j_1, j_2 аксиому А3, как и в других доказательствах единственности, получаем $u = u'$. □

Предложение 1.33. *Пусть $i_1, i_2 \in \mathcal{M}$. Пусть $i \in [i_1, i_2]$. Тогда найдется такая $u \in U^2_{\mathcal{M}}$, что $i = V_{(i_1,i_2)}[u]$.*

Доказательство. Предположим сначала, что i_1 и i_2 зависимы. Тогда из предложения 1.5 и его следствия 1.1 тривиально следует, что $[i_1] = [i_2]$, и тогда в силу леммы 1.4 $[i_1, i_2] = [i_1]$, и утверждение предложения сводится к утверждению предложения 1.31. Поэтому далее считаем i_1 и i_2 независимыми.

Обозначим $\langle i, \Omega \rangle = (b_1, \dots, b_m)$, $\langle i_p, \Omega \rangle = (a_{p1}, \dots, a_{pn})$, $p = 1, 2$. Обозначим за w единственную, согласно предложению 1.30 функцию из $U^1_{\mathcal{M}}$ со свойством $w(a_{11}) = a_{21}$. Поскольку $i_2 \notin [i_1]$, найдется такой индекс s, что $w(a_{1s}) \neq a_{2s}$. Из единственности w следует, что не найдется никакой функции $w' \in U^1_{\mathcal{M}}$, для которой $w'(a_{11}) = a_{21}$, $w'(a_{1s}) = a_{2s}$ — то есть, выполнено условие предложения 1.32. Применяя его, обозначим за $u^q \in U^2_{\mathcal{N}}$, $q = 2, \dots, \hat{s}, \dots, m$, функции, заданные следующими соотношениями: $u_q(a_{11}, a_{1s}) = a_{1q}$, $u_q(a_{21}, a_{2s}) = a_{2q}$. Если функция $v = U_{(i_1,i_2)}[i]$, то есть $\langle i, \alpha\rangle = v(\langle i_1, \alpha\rangle, \langle i_2, \alpha\rangle)$, для всех $\alpha \in \mathcal{N}$, то при подстановке на место α элементов $\omega_1, \dots, \omega_m$ получаем $b_t = v(a_{1t}, a_{2t})$, $t = 1, \dots, m$. Тогда $b_q = v(a_{1q}, a_{2q}) = v(u_q(a_{11}, a_{1s}), u_q(a_{21}, a_{2s})) = u_q(v(a_{11}, a_{21}), v(a_{1s}, a_{2s})) = u_q(b_1, b_s)$, $q = 2, \dots, \hat{s}, \dots, m$. Возьмем в качестве u функцию из $U^2_{\mathcal{M}}$, для которой $u(a_{11}, a_{21}) = b_1$, $u(a_{1s}, a_{2s}) = b_s$ (она существует в силу предложения 1.32, показанного ранее отсутствия функции $w' \in U^1_{\mathcal{M}}$, для которой $w'(a_{11}) = a_{21}$, $w'(a_{1s}) = a_{2s}$, и леммы 1.19). Тогда получаем для $q = 2, \dots, \hat{s}, \dots, m$: $u(a_{1q}, a_{2q}) = u(u_q(a_{11}, a_{1s}), u_q(a_{21}, a_{2s})) = u_q(u(a_{11}, a_{21}), u(a_{1s}, a_{2s})) = u_q(b_1, b_s) = b_q$, что, с учетом леммы 1.6, и дает нам требуемое. $\square$

Лемма 1.20. *Пусть* $(i'_1, i'_2) = I' \in \mathcal{M}^k$, $i_1, i_2 \in [i'_1, i'_2] \subseteq \mathcal{M}$ *независимы,* $u_1 = U_{I'}[i_1]$, $u_2 = U_{I'}[i_2]$ *(*$u_1, u_2 \in U^2_{\mathcal{M}}$ *по предложению 1.33). Тогда отображение* $(u_1, u_2) : R^2 \to R^2$ *(декартово произведение двух отображений* $R^2 \to R$*) биективно, и найдутся такие* $u'_1, u'_2 \in U^2_{\mathcal{M}}$*, что отображение* $(u'_1, u'_2) : R^2 \to R^2$ *является обратным к отображению* (u_1, u_2)*. Иными словами, при* $k = 2$ *выполнено условие У1.*

Доказательство. Обозначим $(u_1, u_2)(\langle I', \omega_q\rangle) = (a_{1q}, a_{2q})$, $q = 1, \dots, m$. Тогда $(a_{p1}, \dots, a_{pm}) = (u_p(\langle I', \omega_1\rangle), \dots, u_p(\langle I', \omega_m\rangle)) = (\langle i_p, \omega_1\rangle, \dots, \langle i_p, \omega_m\rangle) = \langle i_p, \Omega\rangle$, $p = 1, 2$.

Поскольку i_1, i_2 независимы, мы можем, как и при доказательстве предложения 1.33, указать такой индекс s, что ни для какой функции $w \in U^1_{\mathcal{M}}$ не будет выполняться $w(a_{11}) = a_{21}$, $w(a_{1s}) = a_{2s}$. Согласно предложению 1.7 и лемме 1.19, мы можем теперь задать функции $u'_p \in U^2_{\mathcal{M}}$, такие, что $u'_p(a_{11}, a_{21}) = \langle i', \omega_1\rangle$, $u'_p(a_{1s}, a_{2s}) = \langle i', \omega_s\rangle$, $p = 1, 2$. Согласно предложению 1.2, $(u_1, u_2) \circ (u'_1, u'_2) = (v_1, v_2) : R^2 \to R^2$ для некоторых $v_1, v_2 \in U^2_{\mathcal{M}}$. Покажем, что v_1, v_2 являются координатными функциями. Действительно, для индексов $p = 1, 2$, $t = 1, s$ $v_p(a_{1t}, a_{2t}) = u_p(u'_1(a_{1t}, a_{2t}), u'_2(a_{1t}, a_{2t})) = a_{pt}$, по построению функций v_p. Поскольку координатные функции лежат в $U^2_{\mathcal{N}}$, отсюда следует, в силу единственности, что функции v_1, v_2 являются координатными, и, значит, отображение (v_1, v_2) тождественно. □

Лемма 1.21. *Пусть $m \geq 3$, $i_1, i_2 \in \mathcal{M}$ — элементы с дуальными координатами $(e, O, \dots, O)$, $(O, e, O, \dots, O)$, соответственно. Тогда система i_1, i_2, z_0 независима.*

Доказательство. Покажем сначала, что i_1, z_0 независимы. Действительно, в противном случае, согласно следствию 1.1 предложения 1.5, $i_1 \in [z_0]$ (z_0 невырожден, условие У1 выполнено в силу леммы 1.18), и нашлась бы, согласно лемме 1.31, такая функция $u \in U^1_{\mathcal{N}}$, что $u(O) = e$, $u(O) = O$ — противоречие. Теперь, согласно следствию 1.1 предложения 1.5 (условие У1 выполнено в силу леммы 1.20), нам достаточно показать, что $i_2 \notin [i_1, z_0]$. Предположим противное. Тогда найдется, по лемме 1.33, $u \in U^2_{\mathcal{M}}$, такая, что $u(e, O) = O$, $u(O, O) = e$, $u(O, O) = O$ — но последние два условия на u противоречат друг другу. □

Предложение 1.34. *$m, n \geq 3$.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ равноправны в условиях теоремы 1.4, мы можем без ограничения общности полагать $m \geq n$. Отсюда и из $(n+1, m+1) \neq (3, 3)$ следует $m \geq 3$. Тогда, согласно лемме 1.21, для элементов $i_1, i_2 \in \mathcal{M}$ с дуальными координатами $(e, O, \dots, O)$, $(O, e, O, \dots, O)$, соответственно, система i_1, i_2, z_0 будет независима. Если теперь $n = 2$, то $\mathcal{M} = [z_1, z_2]$, $i_1, i_2, z_0 \in [z_1, z_2]$, и мы приходим к противоречию. Отсюда следует, что $n \geq 3$. □

Предложение 1.35. *Для любых $r_1, r_2, r_3 \in R$ существует единственная функция $u \in U^3_{\mathcal{M}}$, такая, что $u(e, O, O) = r_1$, $u(O, e, O) = r_2$, $u(O, O, O) = r_3$.*

Доказательство. Покажем существование. Возьмем $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(e, O, \dots, O)$, $(O, e, O, \dots, O)$, соответственно. Согласно лемме 1.21, $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ независимы. Мы можем выбрать тогда $i \in \mathcal{M}$, такой, что $\langle i, \alpha_1 \rangle = r_1$, $\langle i, \alpha_2 \rangle = r_2$, $\langle , \omega_0 \rangle = r_3$. Рассуждениями, аналогичными проделанным для меньшего числа переменных, получаем тогда, что функция $u = U[i] \circ (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_3)$, где $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in U^3_{\mathcal{M}}$ — координатные функции, будет удовлетворять условиям предложения.

Пусть теперь нашлись две функции $u, u' \in U^3_{\mathcal{M}}$, удовлетворяющие условию предложения. Возьмем такие $j_1, j_2 \in \mathcal{M}$ с дуальными координатами $\langle j_1, \Omega \rangle = (e, O, \dots, O)$, $\langle j_2, \Omega \rangle = (O, e, O, \dots, O)$, соответственно. Согласно лемме 1.21, j_1, j_2, z_0 независимы. Для элементов $i = V_{(j_1, j_2, z_0)}$ и $i' = V_{(j_1, j_2, z_0)}$ имеем $\langle i, \Omega \rangle = (r_1, r_2, r_3, \dots, r_3) = \langle i', \Omega \rangle$, откуда $i = i'$, и, применяя обычное рассуждение с использованием независимости j_1, j_2, z_0, получаем $u = u'$ на всей их области определения R^3. □

Отметим, что выше нами было доказано выполнение условия У1 при $k = 1, 2$ (леммы 1.18, 1.20). Поэтому далее мы будем свободно ссылаться в соответствующих ситуациях на предложение 1.5 и его следствие 1.1.

Структура тела на R и вид $\langle , \rangle$

Введем на R операцию умножения $\cdot$ следующим образом. Пусть $a, b \in R$. По предложению 1.32 найдется единственная функция $\varphi_a \in U^2_{\mathcal{M}}$, такая, что $\varphi_a(e, O) = a$, $\varphi_a(O, O) = O$. Умножение в R по отношению к этой функции определяется следующим образом :

$$a \cdot b := \varphi_a(b), \quad \varphi_a \in U^1_{\mathcal{M}} : \varphi_a(e, O) = a, \ \varphi_a(O, O) = O.$$

Введем на R операцию сложения следующим образом. Пусть $f \in U^3_{\mathcal{M}}$ — функция, существующая и единственная по предложению 1.35, такая, что $f(e, O, O) = e$, $f(O, e, O) = e$, $f(O, O, O) = O$. Для $a, b \in R$ положим

$$a + b := f(a, b).$$

Дадим теперь двойственные определения сложения и умножения.

Пусть $a, b \in R$. По предложению 1.32 найдется единственная функция $\varphi^b \in U^2_{\mathcal{N}}$, такая, что $\varphi^b(e, O) = a$, $f^b(O, O) = O$. Покажем, что

$$a \cdot b = \varphi^b(a, O). \tag{1.3.6}$$

Согласно предложению 1.4, $\varphi^b(a, O) = \varphi^b(\varphi_a(e, O), \varphi_a(O, O)) = \varphi_a(\varphi^b(e, O), \varphi^b(O, O)) = \varphi_a(b, O) = a \cdot b$.

По предложению 1.35 найдется единственная функция $f^* \in U^3_{\mathcal{N}}$, такая, что $f^*(e, O, O) = e$, $f^*(O, e, O) = e$, $f^*(O, O, O) = O$. Покажем, что для любых $a, b \in R$

$$a + b = f^*(a, b, O). \tag{1.3.7}$$

Лемма 1.22. *Для любого $a \in R$ верны равенства $f(a, O, O) = f(O, a, O) = a$, $f^*(a, O, O) = f^*(O, a, O) = a$.*

Доказательство. Обозначим $f' = f \circ (\rho_1, \rho_2, \rho_2) \in U^2_{\mathcal{M}}$, где $\rho_1, \rho_2 \in U^2_{\mathcal{M}}$ — координатные функции. Тогда $f'(e, O) = f(e, O, O) = O$, $f'(O, O) = O$, и из утверждения единственности предложения 1.35 следует, что f' совпадает с координатной функцией $\rho_1 \in U^2_{\mathcal{M}}$. Теперь получаем $f(a, O, O) = \varphi_e(a, O) = a$. Равенство $f(O, a, O) = a$ получается аналогично, с использованием функции $f'' = f \circ (\rho_1, \rho_2, \rho_1)$.

Равенства для функции f^* получаются дословно так же, как и равенства для функции f, с заменой множества функций $U_{\mathcal{M}}$ на множество $U_{\mathcal{N}}$. $\square$

Теперь $f^*(a, b, O) = f^*(f(a, O, O), f(O, b, O), f(O, O, O)) = f(f^*(a, O, O), f^*(O, b, O), f^*(O, O, O)) = f(a, b, O) = a + b$, и формула (1.3.7) доказана.

Далее для произвольных $a, b \in R$ через $\varphi_a, \varphi^b, f, f^*$ будут обозначаться определенные выше функции.

Предложение 1.36. *Алгебраическая система $(R, +, \cdot, O, e)$ является телом.*

Доказательство. Покажем, что для всех $a \in R$ верно $e \cdot a = a \cdot e = a$. Ввиду утверждения единственности предложения 1.30, φ_e совпадает с координатной функцией $\rho_1 \in U^2_{\mathcal{M}}$, и потому $e \cdot a = \varphi_e(a, O) = a$. Аналогично, $\varphi^e \in U^1_{\mathcal{N}}$ является координатной функцией $\rho_1 \in U^2_{\mathcal{N}}$, и $a \cdot e = \varphi^e(e) = a$.

Покажем, что для любых $a, b, c \in R$ выполняется $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Обозначим за $\rho_2 \in U^2_{\mathcal{M}}$ координатную функцию, дающую вторую координату. Тогда $a \cdot (b \cdot c) = \varphi_a(b \cdot c, O) = \varphi_a(\varphi_b(c, O), O) = \varphi(c, O)$, где $\varphi = \varphi_a \circ (\varphi_b, \rho_2) \in U^2_{\mathcal{M}}$. При этом $\varphi(e, O) = \varphi_a(\varphi_b(e, O), \rho_2(e, O)) = \varphi_a(b, O) = a \cdot b$, $\varphi(O, O) = \varphi_a(\varphi_b(O, O), \rho_2(O, O)) = \varphi_a(O, O) = O$, откуда, по определению, $\varphi(c) = (a \cdot b) \cdot c$, что нам и требовалось.

Покажем, что для всех $a \in R^*$ найдется единственный элемент $b \in R$, такой, что $a \cdot b = b \cdot a = e$. Пусть $\varphi \in U^2_{\mathcal{M}}$ такова, что $\varphi(a, O) = e$, $\varphi(O, O) = O$. Возьмем $b = \varphi(e, O)$. Тогда $b \cdot a = \varphi(a, O) = e$. Аналогично, с помощью (1.3.6) получаем, что существует $b' \in R$, для которого $a \cdot b' = e$. Равенство $b = b'$ и единственность обратного элемента следуют теперь из ранее доказанных ассоциативности и свойства единицы.

Покажем, что для любых $a, b \in R$ выполняется $a + b = b + a$. Пусть $\tau : R^3 \to R^3$ — перестановка первой и второй координат. Согласно лемме 1.3, $f' = f \circ \tau \in U^3_{\mathcal{M}}$. При этом $f'(e, O, O) = f(O, e, O) = e$, аналогично $f'(O, e, O) = e$, $f'(O, O, O) = O$. Тогда в силу предложения 1.35 $f' = f$. При этом, очевидно, $b + a = f(b, a) = f'(a, b)$, и потому $b + a = a + b$.

Покажем, что для всех $a \in R$ верно $a + O = a$. Обозначим $f' = f \circ (\rho_1, \rho_2, \rho_2) \in U^2_{\mathcal{M}}$, где $\rho_1, \rho_2 \in U^2_{\mathcal{M}}$ — координатные функции. Тогда $f'(e, O) = f(e, O, O) = O$, $f'(O, O) = O$, и $\varphi' = \varphi_e$. Отсюда получаем требуемое $a + O = f(a, O, O) = \varphi_e(a, O) = e \cdot a = a$.

Покажем, что для любых $a, b, c \in R$ выполняется $(a+b)+c = a+(b+c)$. Докажем несколько более общую формулу, которая будет использоваться нами в дальнейшем: для любых $a, b, c, d \in R$

$$f(f(a, b, d), c, d) = f(a, f(b, c, d), d). \tag{1.3.8}$$

Пусть $\beta \in \mathcal{N}$ таков, что $\langle Z, \beta \rangle = (a, c, d, \dots, d)$. Возьмем функцию $\varphi \in U^1_{\mathcal{M}}$ так, чтобы $\varphi(a) = b$. Обозначим $j = V_{(z_1)}[\varphi]$. Тогда $\langle j, \beta \rangle = b$. Пусть $j_1 = V_{(z_1, j, z_3)}[f]$, $j_2 = V_{(j, z_2, z_3)}[f]$ — тогда $\langle j_1, \beta \rangle = f(a, b, d)$, $\langle j_2, \beta \rangle = f(b, c, d)$. Наконец, пусть $i_1 = V_{(j_1, z_2, z_3)}[f]$, $i_2 = V_{(z_1, j_2, z_3)}[f]$. Тогда

$$\langle i_1, \beta \rangle = f(f(a, b, d), c, d), \quad \langle i_2, \beta \rangle = f(a, f(b, c, d), d). \tag{1.3.9}$$

Отметим, что в силу леммы 1.4 и построения все элементы j, j_1, j_2, i_1, i_2 лежат в $[z_1, z_2, z_3]$. Рассмотрим элементы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathcal{E} \in \mathcal{N}^3$ с дуальными координатами $(e, O, \dots, O)$, $(O, e, O, \dots, O)$, $(O, \dots, O)$, соответственно. Обозначим $(\langle j, \varepsilon_1 \rangle) = r$. Очевидно, $\langle j, \varepsilon_2 \rangle = \langle j, \varepsilon_3 \rangle = O$. По построению, $\langle i_1, \varepsilon_1 \rangle = f(\langle j_1, \varepsilon_1 \rangle, \langle z_2, \varepsilon_1 \rangle, \langle z_3, \varepsilon_1 \rangle) = f(f(\langle z_1, \varepsilon_1 \rangle, \langle j, \varepsilon_1 \rangle, \langle z_3, \varepsilon_1 \rangle), \langle z_2, \varepsilon_1 \rangle, \langle z_3, \varepsilon_1 \rangle) = f(f(e, r, O), O, O) = f(e, r, O) = e + r$. Аналогично получаем $\langle i_1, \varepsilon_2 \rangle = f(f(O, O, O), e, O) = e$, $\langle i_1, \varepsilon_3 \rangle = f(f(O, O, O), O, O) = O$, $\langle i_2, \varepsilon_1 \rangle = f(r, f(O, e, O), O) = r + e$, $\langle i_2, \varepsilon_2 \rangle = f(O, f(O, \varepsilon, O), O) = e$, $\langle i_2, \varepsilon_3 \rangle = O$. Таким образом, $\langle i_1, \mathcal{E} \rangle = \langle i_2, \mathcal{E} \rangle$. Обозначим $u_1 = U_{(z_1, z_2, z_3)}[i_1]$, $u_2 = U_{(z_1, z_2, z_3)}[i_2]$. Тогда $u_1(e, O, O) = \langle i_1, \varepsilon_1 \rangle = \langle i_2, \varepsilon_1 \rangle = u_2(e, O, O)$, и аналогично $u_1(O, e, O) = u_2(O, e, O)$, $u_1(O, O, O) = u_2(O, O, O)$. Тогда, в силу предложения 1.35, $u_1 = u_2$. Поэтому $\langle i_1, \beta \rangle = u_1(\langle z_1, \beta \rangle, \langle z_2, \beta \rangle, \langle z_3, \beta \rangle) = u_2(\langle z_1, \beta \rangle, \langle z_2, \beta \rangle, \langle z_3, \beta \rangle) = \langle i_2, \beta \rangle$, что, в силу равенств (1.3.9), и дает нам выполнение формулы (1.3.8).

Подставляя теперь в формулу (1.3.8) на место a, b, c произвольные элементы R при $d = O$, получаем $(a + b) + c = f(f(a, b, O), c, O) = f(a, f(b, c, O), O) = a + (b + c)$ — ассоциативность сложения доказана.

Покажем, то для каждого $a \in R$ найдется элемент $b \in R$, для которого $a + b = O$ (его единственность тривиальным образом следует из ассоциативности и коммутативности сложения). Обозначим $z = V_{(z_1, z_2, z_3)}[f]$ Заметим, что z, z_1, z_3 независимы. Действительно, z_1, z_3 независимы, иначе выполнялось бы $z_3 \in [z_1]$, и мы пришли бы к противоречию с аксиомой A2: элементы $\mathcal{N}$ с дуальными координатами $(e, O, O, O, \dots, O)$ и

$(e, O, e, O, \ldots, O)$ не могли бы существовать одновременно. Если теперь $z \in [z_1, z_3]$, то для $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(O, e, O, O, \ldots, O)$, $(O, O, O, O, \ldots, O)$, соответственно, должно выполняться $\langle z, \alpha \rangle = \langle z, \alpha' \rangle$, но $\langle z, \alpha \rangle = f(O, e, O) = e$, а $\langle z, \alpha' \rangle = f(O, O, O) = O$ — противоречие. Тогда из следствия 1.1 предложения 1.5 следует независимость z, z_1, z_3.

Возьмем теперь такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle z_1, \alpha \rangle = a$, $\langle z, \alpha \rangle = O$, $\langle z_3, \alpha \rangle = O$. Обозначим $\langle z_2, \alpha \rangle = b$. Тогда $a + b = f(a, b, O) = f(\langle z_1, \alpha \rangle, \langle z_2, \alpha \rangle, \langle z_3, \alpha \rangle) = \langle z, \alpha \rangle = O$, что нам и требовалось.

Покажем теперь левую дистрибутивность. Для произвольных $a, b, c \in R$ $(a + b) \cdot c = \varphi^c(f(a, b, O), O)$. Преобразуем далее, пользуясь предложением 1.4: $\varphi^c(f(a, b, O), O) = f(\varphi^c(a, b, O), \varphi^c(O, O, O)) = f(\varphi^c(a, O), \varphi^c(b, O), f^c(O, O)) = a \cdot c + b \cdot c$ — левая дистрибутивность доказана.

Определяя умножение равенством 1.3.6, а сложение — функцией f^*, и проводя те же рассуждения, что при доказательстве левой дистрибутивности в предыдущем абзаце, мы получаем правую дистрибутивность. $\square$

Зададим операции сложения и умножения на скаляр в $\mathcal{N}$ следующим образом. Пусть $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$, $a \in R$. Положим

$$\alpha + \beta := V_{(\alpha, \beta, \omega_0)}[f^*]; \quad \alpha \cdot a := V_{(\alpha, \omega_0)}[\varphi^a]. \tag{1.3.10}$$

В качестве нуля $\mathcal{N}$ (в смысле операций) возьмем ω_0. Тогда биективное отображение $\pi^Z : \mathcal{N} \to R^n$ на векторное пространство строк длины n будет сохранять нуль и операции сложения и домножения на скаляр, задавая тем самым изоморфизм векторных пространств. Это доказывается дословно так же, как доказывалось в случае наличия нуля в $\mathcal{N}$. Таким образом, $\mathcal{N}$ являются правым линейным пространством размерности n над телом R.

Операции сложения и умножения на скаляр в $\mathcal{M}$ будут задаваться сложнее. Пусть $i, j \in \mathcal{M}$, $a \in R$, $\varphi_a \in U^2_{\mathcal{M}}$ определена, как раньше. Положим

$$i + j := V_{(i, j, z_n)}[f]; \quad a \cdot i := V_{(i, z_n)}[\varphi_a]. \tag{1.3.11}$$

В качестве нуля $\mathcal{M}$ (в смысле операций) возьмем z_n.

Предложение 1.37. *Множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ с заданными операциями сложения, умножения на скаляр и нулями будут, соответственно, левым линейным пространством размерности m и правым линейным пространством размерности n над телом R.*

Доказательство. Для $\mathcal{N}$ утверждение было доказано выше. Далее доказываем его для $\mathcal{M}$.

Проверим свойства линейного пространства — сперва покажем, что $\mathcal{M}$ является абелевой группой по сложению с нулем z_n, затем проверим свойства домножения на скаляр.

Пусть $i, j \in \mathcal{M}$. Покажем, что $i + j = j + i$. Пусть $\tau : R^3 \to R^3$ — перестановка первой и второй координат. Как и при доказательстве предложения 1.36, обозначив, $f' = f \circ \tau \in U^3_{\mathcal{M}}$, будем иметь $f' = f$. Пусть теперь $\alpha \in \mathcal{N}$. Из определения имеем $\langle i + j, \alpha\rangle = f(\langle i, \alpha\rangle, \langle j, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle)$, $\langle j + i, \alpha\rangle = f(\langle j, \alpha\rangle, \langle i, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle) = f'(\langle i, \alpha\rangle, \langle j, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle)$. Поскольку $f = f'$, отсюда следует, что для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ $\langle i + j, \alpha\rangle = \langle j + i, \alpha\rangle$, и, ввиду невырожденности биформы, $i + j = j + i$.

Пусть $i \in \mathcal{M}$. Покажем, что $i + z_n = i$. Покажем сначала, что для любых $a, b \in R$ $f(a, b, b) = a$. Действительно, пусть $\rho_1, \rho_2 \in U^2_{\mathcal{M}}$ — координатные функции, $f' = f \circ (\rho_1, \rho_2, \rho_2) \in U^2_{\mathcal{M}}$. Тогда $f'(e, O) = f(e, O, O) = e$, $f'(O, O) = f(O, O, O) = O$, откуда $f' = u_1$. Отсюда $f(a, b, b) = f'(a, b) = a$. Пусть теперь $\alpha \in \mathcal{N}$. $\langle i + z_n, \alpha\rangle = f(\langle i, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha\rangle$, откуда $i + z_n = i$.

Пусть $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{M}$. Покажем, что $(h_1 + h_2) + h_3 = h_1 + (h_2 + h_3)$. Отметим, что для любых $\alpha \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned}
\langle (h_1 + h_2) + h_3, \alpha\rangle &= f(f(\langle h_1, \alpha\rangle, \langle h_2, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle), \langle h_3, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle), \\
\langle h_1 + (h_2 + h_3), \alpha\rangle &= f(\langle h_1, \alpha\rangle, f(\langle h_2, \alpha\rangle, \langle h_3, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle), \langle z_n, \alpha\rangle).
\end{aligned}$$

Правые части последних двух равенств равны между собой в силу формулы 1.3.8, откуда следует требуемая ассоциативность.

Пусть $i \in \mathcal{M}$. Покажем, что $O \cdot i = z_n$. Действительно, пусть $\alpha \in \mathcal{N}$. Тогда $\langle O \cdot i, \alpha\rangle = \varphi_O(\langle i, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle) = \langle z_n, \alpha\rangle$, поскольку φ_O, как легко видеть из ее определения и предложения 1.32, совпадает с координатной функцией $\rho_2 \in U^2_{\mathcal{M}}$.

Пусть $i \in \mathcal{M}$. Покажем, что $e \cdot i = i$. Действительно, пусть $\alpha \in \mathcal{N}$. Тогда $\langle e \cdot i, \alpha\rangle = \varphi_e(\langle i, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha\rangle$, поскольку φ_e, как легко видеть из предложения 1.32, совпадает с координатной функцией $\rho_1 \in U^2_{\mathcal{M}}$.

Пусть $i \in \mathcal{M}$, $a, b \in R$. Покажем, что $a \cdot (b \cdot i) = (a \cdot b) \cdot i$. Пусть $\rho_2 \in U^2_{\mathcal{M}}$ — координатная функция, $\varphi = \varphi_a \circ (\varphi_b, \rho_2) \in U^2_{\mathcal{M}}$. При доказательстве предложения 1.36 было показано, что $\varphi = \varphi_{a \cdot b}$. Пусть теперь $\alpha \in \mathcal{N}$. Тогда $\langle a \cdot (b \cdot i), \alpha\rangle = \varphi_a(\varphi_b(\langle i, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle)) = \varphi(\langle i, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle)$, $\langle (a \cdot b) \cdot i, \alpha\rangle = \varphi_{a \cdot b}(\langle i, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle)$. Равенство $\varphi = \varphi_{a \cdot b}$ теперь дает нам требуемое.

Пусть $i \in \mathcal{M}$, $a, b \in R$. Покажем, что $(a + b) \cdot i = a \cdot i + b \cdot i$. Обозначим $u = f \circ (\varphi_a, \varphi_b) \in U^2_{\mathcal{M}}$. Тогда $u(e, O) = a \cdot e + b \cdot e = a + b$, $u(O, O) = O$, откуда $u = \varphi_{a+b}$. Пусть $\alpha \in R$. Получаем $\langle a \cdot i + b \cdot i, \alpha\rangle = f(\varphi_a(\langle i, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle), \varphi_b(\langle i, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle), \langle z_n, \alpha\rangle) = u(\langle i, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle) = \varphi_{a+b}(\langle i, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle) = \langle (a + b) \cdot i, \alpha\rangle$, откуда следует требуемое.

Пусть $i, j \in \mathcal{M}$, $a \in R$. Покажем, что $a \cdot (i + j) = a \cdot i + a \cdot j$. Обозначим $u' = \varphi_a \circ (f, \rho_3) \in U^3_{\mathcal{M}}$, $u'' = f \circ (\varphi_a \circ (\rho_1, \rho_3), \varphi_a \circ (\rho_2, \rho_3), \rho_3) \in U^3_{\mathcal{M}}$, где $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in U^3_{\mathcal{M}}$ — координатные. При этом $u'(e, O, O) = a \cdot (e + O) = a \cdot e = a$, $u''(e, O, O) = a \cdot e + a \cdot O = a + O = a$, аналогичными вычислениями получаем, что $u'(O, e, O) = u''(O, e, O) = a$ и $u'(O, O, O) = u''(O, O, O) = O$. Теперь из предложения 1.35 следует, что $u' = u''$. Пусть $\alpha \in \mathcal{N}$. Тогда $\langle a \cdot (i + j), \alpha\rangle = u'(\langle i, \alpha\rangle, \langle j, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle) = u''(\langle i, \alpha\rangle, \langle j, \alpha\rangle, \langle z_n, \alpha\rangle) = \langle a \cdot i + a \cdot j\rangle$, откуда следует требуемое.

Пусть $i \in \mathcal{M}$. Покажем, что найдется такой $j \in \mathcal{M}$, что $i + j = z_n$. Пусть $e' \in R$ таков, что $e + e' = O$. Возьмем $j = e' \cdot i$. Тогда по ранее доказанному $i + j = e \cdot i + e' \cdot i = (e + e') \cdot i = O \cdot i = z_n$, что и требовалось. $\square$

Определим подмножества $\overline{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$, $\overline{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}} &= \{i \in \mathcal{M} : \langle i, \omega_0 \rangle = O\},\\ \overline{\mathcal{N}} &= \{\alpha \in \mathcal{N} : \langle z_n, \alpha \rangle = O\}.\end{aligned}$$

Лемма 1.23. *Биформа $\langle , \rangle$ линейна справа на множестве аргументов $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$. Биформа $\langle , \rangle$ линейна слева на множестве аргументов $\mathcal{M} \times \overline{\mathcal{N}}$.*

Доказательство. Пусть $i \in \overline{\mathcal{M}}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$. Тогда $\langle i, \alpha + \beta \rangle = \langle i, V_{(\alpha,\beta,\omega_0)}[f] \rangle = f(\langle i, \alpha \rangle, \langle i, \beta \rangle, \langle i, \omega_0 \rangle) = f(\langle i, \alpha \rangle, \langle i, \beta \rangle, O) = \langle i, \alpha \rangle + \langle i, \beta \rangle$, и аналогично с домножением на элемент из R.

Пусть $i, j \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \overline{\mathcal{N}}$. Тогда $\langle i + j, \alpha \rangle = \langle V_{(i,j,z_n)}[f], \alpha \rangle = f(\langle i, \alpha \rangle, \langle j, \alpha \rangle, \langle z_n, \alpha \rangle) = \langle i, \alpha \rangle + \langle j, \alpha \rangle$, и аналогично с домножением на элемент R. □

Следствие 1.6. *Биформа $\langle , \rangle$ билинейна на множестве $\overline{\mathcal{M}} \times \overline{\mathcal{N}}$.*

Лемма 1.24. *$\overline{\mathcal{M}}$ является линейным подпространством коразмерности 1 в $\mathcal{M}$. $\overline{\mathcal{N}}$ является линейным подпространством коразмерности 1 в $\mathcal{N}$.*

Доказательство. Пусть $i, j \in \overline{\mathcal{M}}$, $a \in R$. Тогда, согласно определению операций на $\mathcal{M}$ и определению зависимости, $\langle a \cdot i, \omega_0 \rangle = \varphi_a(\langle i, \omega_0 \rangle, \langle z_n, \omega_0 \rangle) = \varphi_a(O, O) = O$, $\langle i + j, \omega_0 \rangle = f(\langle i, \omega_0 \rangle, \langle j, \omega_0 \rangle, \langle z_n, \omega_0 \rangle) = O$, откуда, соответственно, $a \cdot i \in \overline{\mathcal{M}}$ и $i + j \in \overline{\mathcal{M}}$. Следовательно, $\overline{\mathcal{M}}$ — линейное подпространство. Утверждение о коразмерности доказывается дословно так же, как и в случае наличия нуля в $\mathcal{N}$ (с учетом доказанной линейности биформы на $\mathcal{M} \times \overline{\mathcal{N}}$ слева).

Второе утверждение леммы доказывается полностью аналогично. □

Покажем невырожденность (в смысле линейной алгебры) биформы на $\overline{\mathcal{M}} \times \overline{\mathcal{N}}$ справа. Действительно, пусть $\alpha \in \overline{\mathcal{N}}$ таков, что для любого $i \in \overline{\mathcal{M}}$ выполнено $\langle i, \alpha \rangle = O$. Но все z_k, $k = 1, \ldots, n$, принадлежат $\overline{\mathcal{M}}$, поскольку $\langle Z, \omega_0 \rangle = (O, \ldots, O)$. Отсюда следует, что и $\langle Z, \alpha \rangle = (O, \ldots, O)$, и $\alpha = \omega_0$, что и требовалось. Теперь из теоремы 1.1 билинейная форма $\langle , \rangle$ (двусторонне) невырождена на $\overline{\mathcal{M}} \times \overline{\mathcal{N}}$, и из теоремы 1.2 $\dim(\overline{\mathcal{N}}) = \dim(\overline{\mathcal{M}})$, то есть $n-1 = m-1$, и $n = m$.

Мы можем теперь выбрать в $\overline{\mathcal{M}}$ и $\overline{\mathcal{N}}$ дуальные базисы $z'_1, \ldots, z'_{n-1}$ и $\omega'_1, \ldots, \omega'_{n-1}$, соответственно. Обозначим $Z' = (z'_1, \ldots, z'_{n-1}, z_n)$, $\Omega' = (\omega'_1, \ldots, \omega'_{n-1}, \omega_0)$. (Обозначаем также $z_n = z'_n$, $\omega_0 = \omega'_n$). Обозначим $(z'_1, \ldots, z'_{n-1}) = \overline{Z}'$.

Лемма 1.25. *Для произвольных $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \overline{\mathcal{N}}$ выполнено*

$$\langle i, \alpha \rangle = (\langle i, \omega'_1 \rangle - \langle i, \omega_0 \rangle) \cdot \langle z'_1, \alpha \rangle + \ldots + (\langle i, \omega'_{n-1} \rangle - \langle i, \omega_0 \rangle) \cdot \langle z'_{n-1}, \alpha \rangle + \langle i, \omega_0 \rangle, \tag{1.3.12}$$

причем отображения $\langle \cdot, \Omega' \rangle : \mathcal{M} \to R^n$, $\langle \overline{Z}', \cdot \rangle : \mathcal{N} \to R^{n-1}$ сюрьективны.

Доказательство. Пусть $\varphi \in U^1_{\mathcal{M}}$ такова, что $\varphi(O) = e$. Обозначим $z_e = V_{(z_n)}[\varphi]$. Тогда для любого $\alpha \in \overline{\mathcal{N}}$ $\langle z_e, \alpha \rangle = \varphi(\langle z_n, \alpha \rangle) = e$.

Докажем выполнение формулы (1.3.12). Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \overline{\mathcal{N}}$. Обозначим $(\langle \overline{Z}', \alpha \rangle) = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, $\langle i, \Omega' \rangle = (x_1, \ldots, x_n)$. Заметим, что

$$i = x_n \cdot z_e + i', \tag{1.3.13}$$

где $i' \in \overline{\mathcal{M}}$. Действительно, формула (1.3.13) означает просто, что $i' = i - x_n \cdot z_e$, и тогда $\langle i', \omega_0 \rangle = \langle i, \omega_0 \rangle - \langle x_n \cdot z_e, \omega_0 \rangle = x_n - x_n \cdot e = O$, откуда получаем нужное нам $i' \in \mathcal{M}$. Заметим, что для $k = 1, \ldots, n-1$ $\langle i', \omega'_k \rangle = \langle i, \omega'_k \rangle - \langle x_n \cdot z_e, \omega'_k \rangle = x_k - x_n$. Теперь получаем, ввиду билинейности и невырожденности биформы на $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$: $\langle i, \alpha \rangle = \langle x_n \cdot z_e, \alpha \rangle + \langle i', \alpha \rangle = x_n + (x_1 - x_n) \cdot \xi_1 +, \ldots, +(x_{n-1} - x_n) \cdot \xi_{n-1}$ (слагаемое $\langle i', \alpha \rangle$ расписывается по лемме 1.1, поскольку $i' \in \overline{\mathcal{M}}$).

Покажем сюрьективность $\langle \cdot, \Omega' \rangle$. Поскольку биформа линейна слева, то и отображение $\langle \cdot, \Omega' \rangle$ (действующее из $\mathcal{M}$ в линейное пространство строк длины $n+1$) линейно. При этом образы элементов $z'_1, \ldots, z'_n, z_e$, с помощью формулы 1.3.12 легко вычисляемые непосредственно, как и при доказательстве предложения 1.28, образуют базис пространства строк R^{n+1}, поэтому любая строка из R^{n+1} может быть получена как образ некоторой линейной комбинации этих элементов. Отсюда следует сюръективность $\langle \cdot, \Omega' \rangle$.

Поскольку биформа линейна справа на $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$, а все $z'_1, \ldots, z'_n$ лежат в $\overline{\mathcal{M}}$, то и отображение $\langle Z', \cdot \rangle$ линейно. При этом образы элементов $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$, образуют канонический базис пространства строк R^n, поэтому любая строка из R^n может быть получена как образ некоторой линейной комбинации этих элементов. Отсюда следует сюръективность $\langle Z', \cdot \rangle$. $\square$

Лемма 1.26. *Любая функция ψ из $U^1_{\mathcal{M}}$ или $U^1_{\mathcal{N}}$ представима в виде $\psi(x) = x + b$ для некоторого $b \in R$.*

Доказательство. Нам достаточно доказать утверждение для функций из $U^1_{\mathcal{M}}$ — для функций из $U^1_{\mathcal{N}}$ оно будет получаться ввиду симметрии $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ и формулы (1.3.7), делающей определение сложения в R инвариантным относительно этой симметрии.

Рассмотрим ограничение биформы на $\mathcal{M} \times \overline{\mathcal{N}}$ и следующее соответствующее ему ограничение понятия зависимости на $\mathcal{M} \times \overline{\mathcal{N}}$: для элемента $j \in \mathcal{M}$ будем говорить, что $j \in L(z'_1)$, если для любых $\alpha, \alpha' \in \overline{\mathcal{N}}$ из $\langle z'_1, \alpha \rangle = \langle z'_1, \alpha' \rangle$ следует $\langle j, \alpha \rangle = \langle j, \alpha' \rangle$. Для каждого элемента $j \in L(z'_1)$ найдется такая функция $u : R \to R$, что для любого $\alpha \in \overline{\mathcal{N}}$ $\langle j, \alpha \rangle = u(\langle z'_1, \alpha \rangle)$. Множество, состоящее из всех таких функций для всех таких элементов из $L(z'_1)$ обозначим за $\overline{U}$. Понятно, что $[z'_1] \subseteq L(z'_1)$, и $U^1_{\mathcal{M}} \subseteq \overline{U}$.

Исследуем теперь состав множеств $L(z'_1)$ и $\overline{U}$, пользуясь выражением (1.3.12). Пусть $j \in L(z'_1)$. Предположим, что для некоторого $k = 2, \ldots, n-1$ $\langle j, \omega'_k \rangle - \langle j, \omega_0 \rangle = r \neq O$. Согласно лемме 1.25, мы можем выбрать элемент $\alpha \in \mathcal{N}$ такой, что $\langle \overline{Z}', \alpha \rangle = (O, \ldots, O, e, O, \ldots, O)$ (e стоит на k-ом месте). Тогда получим $\langle z'_1, \alpha \rangle = \langle z'_1, \omega_0 \rangle = O$, но $\langle j, \alpha \rangle = r$ и $\langle j, \omega_0 \rangle = O$, то есть $\langle j, \alpha \rangle \neq \langle j, \omega_0 \rangle$. Отсюда следует, согласно определению зависимости, что $j \notin L(z'_1)$. Таким образом, $L(z'_1)$ может содержать только такие элементы j, для которых $\langle j, \Omega' \rangle = (a, b, \ldots, b)$, где $a, b \in R$. Обратно, любой элемент $j \in \mathcal{M}$ с таким свойством будет лежать в $L(z'_1)$, так как если для некоторого $\alpha \in \overline{\mathcal{N}}$ $\langle z_1', \alpha\rangle = x$, то, как сразу следует из равенства (1.3.12), $\langle j, \alpha\rangle = (a-b)\cdot x + b$, то есть $\langle j, \alpha\rangle$ однозначно выражается через $\langle z_1', \alpha\rangle$, и потому $j \in L(z_1')$. Мы также получили, что $\overline{U}$ состоит из всевозможных функций вида $u(x) = r\cdot x + b$ для произвольных $r, b \in R$ $(r = a - b)$.

Нам осталось понять, какие из найденных элементов $\overline{U}$ будут лежать в $U^1_{\mathcal{M}}$. Для этого отметим, что если $u \in U^1_{\mathcal{M}}$ и для некоторого $x \in R$ $u(x) = x$, то, согласно утверждению единственности предложения 1.30, $u = \mathrm{id}$. Поэтому для всех функций $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, отличных от тождественной, уравнение $u(x) = x$ не может иметь корней. Но уравнение $r\cdot x + b = x$ не имеет корней в теле R, очевидно, лишь в том случае, если $r = e$, $b \neq O$. Таким образом, мы получаем, что в $U^1_{\mathcal{M}}$ могут входить только функции вида $u(x) = x + b$, $b \in R$. Но поскольку, согласно предложению 1.30, для каждого $a \in R$ найдется такая $u \in U^1_{\mathcal{M}}$, что $u(O) = a$, а для функции $u(x) = x+b$ это получается лишь при $b = a$, мы получаем, что для каждого $b \in R$ функция $u(x) = x + b$ входит в $U^1_{\mathcal{M}}$. □

Покажем теперь, что биформа задается формулой 1.2.4. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$. Обозначим $\langle i, \Omega'\rangle = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\langle Z', \alpha\rangle = (x_1, \ldots, x_n)$. Рассмотрим следующие функции $\varphi(x) \in U^1_{\mathcal{M}}$, $\psi(x) \in U^1_{\mathcal{N}}$: $\varphi(x) = x - x_n$, $\psi(x) = x - \xi_n$. Обозначим $i' = V_{(i)}[\varphi]$, $\alpha' = V_{(\alpha)}[\psi]$. По построению, $\langle i', \Omega'\rangle = (x_1 - x_n, \ldots, x_{n-1} - x_n, O)$, $\langle Z', \alpha'\rangle = (\xi_1 - \xi_n, \ldots, \xi_{n-1} - \xi_n, O)$. Отсюда $i' \in \overline{\mathcal{M}}$, $\alpha' \in \overline{\mathcal{N}}$. Теперь получаем, согласно лемме 1.1:

$$\langle i', \alpha'\rangle = (x_1 - x_n)\cdot(\xi_1 - \xi_n) + \ldots + (x_{n-1} - x_n)\cdot(\xi_{n-1} - \xi_n).$$

С другой стороны, по построению i' и α':

$$\langle i', \alpha'\rangle = \varphi(\langle i, \alpha'\rangle) = \varphi(\psi(\langle i, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha\rangle - x_n - \xi_n.$$

Приравнивая правые части, получаем требуемое

$$\langle i, \alpha\rangle = (x_1 - x_n)\cdot(\xi_1 - \xi_n) + \ldots + (x_{n-1} - x_n)\cdot(\xi_{n-1} - \xi_n) + x_n + \xi_n.$$

Установим оставшиеся утверждения теоремы для рассматриваемого случая.

Предложение 1.38. *Отображения* $\langle Z', \cdot\rangle : \mathcal{N} \to R^n$, $\langle \cdot, \Omega'\rangle : \mathcal{M} \to R^n$ *биективны.*

Доказательство. Любая линейная комбинация элементов $z'_1, \ldots, z'_n$, как сразу следует из определения, лежит в $[z'_1, \ldots, z'_n]$ (так как набор $z'_1, \ldots, z'_n$ включает в себя z_n). Тогда поскольку $z'_1, \ldots, z'_n$ — линейный базис $\mathcal{M}$, то $[z'_1, \ldots, z'_n] = \mathcal{M}$. Теперь если для $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$ $\langle Z', \alpha\rangle = \langle Z', \alpha'\rangle$, то и для любого $i \in \mathcal{M}$ $\langle i, \alpha\rangle = \langle i, \alpha'\rangle$, откуда $\alpha = \alpha'$. Это означает инъективность отображения $\langle Z', \cdot\rangle$. Аналогично, инъективно отображение $\langle \cdot, \Omega'\rangle$.

Поскольку биформа линейна справа на $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$, а все $z'_1, \ldots, z'_n$ лежат в $\overline{\mathcal{M}}$, то и отображение $\langle Z', \cdot\rangle$ линейно. Пусть $\varphi \in U^1_{\mathcal{N}}$ такова, что $\varphi(O) = e$. Обозначим $\omega_e = V_{(\omega'_n)}[\varphi]$. Тогда, поскольку $\langle Z', \omega'_n\rangle = (O, \ldots, O)$, $\langle Z', \omega_e\rangle = (e, \ldots, e)$. Образы элементов $\omega'_1, \ldots, \omega'_{n-1}, \omega_e$ образуют тогда базис пространства строк R^n, поэтому любая строка из R^n может быть получена как образ некоторой линейной комбинации этих элементов. Отсюда следует сюръективность $\langle Z', \cdot\rangle$. Аналогично, сюръективно и $\langle \cdot, \Omega'\rangle$. □

Предложение 1.39. $U^n_{\mathcal{M}} = L^{l,s,a}_n(R)$, $U^m_{\mathcal{N}} = L^{r,s,a}_n(R)$.

Доказательство. Нам осталось установить вид функций из множества $U^n_{\mathcal{M}}$. Рассмотрим множество $\bar{U}^n_{\mathcal{M}} = \{U_{Z'}[i] \,|\, i \in \mathcal{M}\}$. Из аксиомы A5 следует $U^n_{\mathcal{M}} \subseteq \bar{U}^n_{\mathcal{M}}$. Покажем, что $\bar{U}^n_{\mathcal{M}} = L^{l,s,a}_n(R)$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$, $\langle i, \Omega'\rangle = (x_1, \ldots, x_n)$, $\langle Z', \alpha\rangle = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Тогда $U_{Z'}[i](\xi_1, \ldots, \xi_n) = \langle i, \alpha\rangle = (x_1 - x_n)\cdot(\xi_1 - \xi_n) + \ldots + (x_{n-1} - x_n)\cdot(\xi_{n-1} - \xi_n) + x_n + \xi_n = (x_1 - x_n)\cdot\xi_1 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)\cdot\xi_{n-1} + (-(x_1 - x_n) - \ldots - (x_{n-1} - x_n) + e)\cdot\xi_n + x_n$. При этом коэффициенты $(x_1 - x_n), \ldots, (x_{n-1} - x_n), (-(x_1 - x_n) - \ldots - (x_{n-1} - x_n) + e), x_n$ могут, очевидно, принимать всевозможные значения, сумма первых $n-1$ из которых дает e, откуда следует требуемое.

Мы получили $U^n_{\mathcal{M}} \subseteq L^{l,s,a}_n(R)$. Покажем, что справедливо обратное включение. Пусть $u \in L^{l,s,a}_n(R)$, $u(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_{n-1}\cdot x_{n-1} + a_n$.

Рассмотрим элемент $i \in \mathcal{M}$, такой, что

$$\langle i, \Omega' \rangle = (\sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_1 \rangle + a_n, \ldots, \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_n \rangle + a_n).$$

Пусть $\alpha \in \mathcal{N}$, обозначим $\langle Z', \alpha \rangle = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Тогда, с учетом равенства $a_1 + \ldots + a_{n-1} = e$, получаем

$$\langle i, \alpha \rangle = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_1 \rangle + a_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_n \rangle - a_n \right) \cdot (\xi_1 - \xi_n) + \ldots +$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_n \rangle + a_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_n \rangle - a_n \right) \cdot (\xi_{n-1} - \xi_n) +$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_n \rangle + a_n + \xi_n =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot (\langle z_k, \omega'_1 \rangle - \langle z_k, \omega'_n \rangle) \cdot (\xi_1 - \xi_n) + \ldots +$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot (\langle z_k, \omega'_{n-1} \rangle - \langle z_k, \omega'_n \rangle) \cdot (\xi_{n-1} - \xi_n) +$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \langle z_k, \omega'_n \rangle + a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \xi_n =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot (\sum_{l=1}^{n-1} (\langle z_k, \omega'_l \rangle - \langle z_k, \omega'_n \rangle) \cdot \xi_l + \langle z_k, \omega'_n \rangle + \xi_n) + a_n =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \langle z_k, \alpha \rangle + a_n = u(\langle Z, \alpha \rangle),$$

и мы получаем, что $u \in U^n_{\mathcal{M}}$, как нам и требовалось.

Отметим теперь, что вид множеств $U^n_{\mathcal{M}}$, $U^m_{\mathcal{N}}$ зависит только от условий теоремы, в которых $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ можно менять ролями. При перемене $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ ролями функции φ_a, $a \in R$, переходят, в силу их определения, в функции φ^a, функция f — в f^*, поэтому, согласно формулам 1.3.7 и 1.3.6, сложение в R остается неизменным, а порядок умножения меняется на противоположный. Тогда множество функций $L^{l,s,a}_n(R)$ перейдет в множество $L^{r,s,a}_n(R)$, и из доказанного равенства $U^n_{\mathcal{M}} = L^{l,s,a}_n(R)$ будет следовать, при замене $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$ в левой части, $U^m_{\mathcal{N}} = L^{r,s,a}_n(R)$. $\square$

Все утверждения теоремы в рассматриваемом случае теперь доказаны, а значит, доказана сама теорема.

Замечание 1.5. Из построения Z', Ω' следует, что для $k, l = 1, \ldots, n-1$ $\langle z'_k, \omega'_l \rangle = e$, если $k = l$, и $\langle z'_k, \omega'_l \rangle = O$, если $k \neq l$. Кроме того, $\langle Z', \omega'_n \rangle = (O, \ldots, O)$, $\langle z'_n, \Omega' \rangle = (O, \ldots, O)$, $\langle z'_n, \omega'_n \rangle = O$.

Глава 2

Тополого-алгебраическая классификация физических структур больших рангов

2.1 Предварительные сведения из топологической алгебры

Ниже приведем используемые нами в этой главе и далее определения и результаты, содержащиеся в [22], [26] (теорема 2.2) и [4] (определение 2.3)
.

Определение 2.1. *Пусть на множестве G заданы структура топологического пространства и групповая структура с умножением $\cdot$. G называется топологической группой, если бинарное отображение $\cdot : G \times G \to G$ и унарное отображение, сопоставляющее каждому элементу из G обратный ему по умножению, непрерывны.*

Определение 2.2. *Пусть на множестве F заданы структура топологического пространства и структура тела с сложением $+$ и умножением $\cdot$. F называется топологическим телом, если бинарные отображения $+ : F \times F \to F$, $\cdot : F \times F \to F$ и унарные отображения, сопоставляющие элементу из F обратный ему по сложению или по умножению, непрерывны на области своего определения. Коммутативное топологическое* *тело называется также топологическим полем.*

Замечание 2.1. Вместо указанных требований на бинарные и унарные операции достаточно потребовать непрерывность бинарных операций деления, сопоставляющей паре элементов $a, b \in F$, $b \neq 0$, элемент $a \cdot b^{-1}$, и вычитания, сопоставляющей паре $a, b \in F$ элемент $a - b$.

Теорема 2.1. *Всякое связное локально компактное топологическое тело изоморфно топологическому полю действительных чисел, топологическому полю комплексных чисел или топологическому телу кватернионов.*

Топология на множествах вещественных чисел $\mathbb{R}$, комплексных чисел $\mathbb{C}$ и кватернионов $\mathbb{H}$ задается при этом как обычная борелевская топология пространств $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^4$, соответственно.

Теорема 2.2. *Пусть m, n — не равные друг другу натуральные числа. Тогда топологические пространства R^m и R^n не гомеоморфны.*

Теорема 2.3. *На топологическом пространстве p-адических чисел $\mathbb{R}_p$ можно ввести две неизоморфные (в алгебраическом смысле) структуры тела.*

Определение 2.3. *Пусть на множестве V заданы структура топологического пространства и структура левого (правого) линейного пространства над топологическим телом F. V называется топологическим векторным пространством, если непрерывны отображение $V \times V \to V$, соответствующее операции сложения в V, и отображение $F \times V \to V$ ($V \times F \to V$), соответствующее операции левого (правого) домножения элементов V на скаляр из F.*

2.2 Аксиоматика и формулировки теорем

Как и в главе 1, рассматриваем алгебраическую систему $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$, где $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, R — произвольные множества (R содержит более одного элемента,

$\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ непусты), а биформа $\langle , \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ удовлетворяет условию невырожденности. Ранг $(n+1, m+1)$ также считается заданным.

Мы будем полагать, в дополнение к этому, что на R задана структура хаусдорфова топологического пространства.

Соглашения на обозначения (типа $\langle I, \mathfrak{A} \rangle \in R^{kl}$, $\pi_I : \mathcal{N} \to R^n$ и т. п.) остаются прежними.

Пусть заданы непустые подмножества $\mathcal{B}_\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^n$ и $\mathcal{B}_\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}^m$; их элементы мы будем называть базами. Так, если $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{B}_\mathcal{M}$, то $i_1, \ldots, i_n$ — база $\mathcal{M}$.

Пусть выполняются следующие аксиомы на $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$.

Аксиома T1 Существует такая функция $F : R^m \times R^{nm} \times R^n \to R$, определенная и непрерывная на подмножестве $R^m \times \langle \mathcal{B}_\mathcal{M}, \mathcal{B}_\mathcal{N} \rangle \times R^n$, что для всех $I \in \mathcal{B}_\mathcal{M},\ i \in \mathcal{M},\ \mathfrak{A} \in \mathcal{B}_\mathcal{N},\ \alpha \in \mathcal{N}$ выполнено

$$\langle i, \alpha \rangle = F(\langle i, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \alpha \rangle).$$

Аксиома T2 Для любой базы $I \in \mathcal{B}_\mathcal{M}$ подмножество $\langle I, \mathcal{B}_\mathcal{N} \rangle = \pi_I \times \cdots \times \pi_I(\mathcal{B}_\mathcal{N}) \subseteq R^{nm}$ всюду плотно в R^{nm}. Для любой базы $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_\mathcal{N}$ подмножество $\langle \mathcal{B}_\mathcal{M}, \mathfrak{A} \rangle$ всюду плотно в R^{nm}.

Аксиома T3 Множество $\langle \mathcal{B}_\mathcal{M}, \mathcal{B}_\mathcal{N} \rangle$ содержит некоторое открытое подмножество пространства R^{nm}.

Мы будем предполагать выполненными также часть аксиом алгебраической аксиоматики. Зависимость и независимость на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ определим так же, как раньше.

Аксиома A3 Пусть $k \in \{1, 2, 3\}$, $(i_1, \ldots, i_k) = I \in \mathcal{M}^k$ независимы. Тогда для любого вектора $r \in R^k$ найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \alpha \rangle = r$. Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \mathfrak{A} \in \mathcal{N}^k$ независимы. Тогда для любого $r \in R^k$ найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \mathfrak{A} \rangle = r$.

Аксиому А2 будем предполагать выполненной для произвольных баз:

Аксиома А2' Для любых $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $r \in R^n$ найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \alpha \rangle = r$; для любых $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, $r \in R^m$ найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \mathfrak{A} \rangle = r$.

Элементы $\mathcal{M}$ могут, ввиду невырожденности биформы, рассматриваться как различные функции на $\mathcal{N}$ со значениями в R: $\mathcal{M} \subseteq R^{\mathcal{N}}$, и аналогично $\mathcal{N} \subseteq R^{\mathcal{M}}$. Введем теперь на $\mathcal{M}$ (и на $\mathcal{N}$) топологию, индуцированную топологией прямого произведения. Она, очевидно, представляет собой минимальную топологию на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, в которой функция $\langle , \rangle$ раздельно непрерывна.

Определение 2.4. *Многоосновную алгебраическую систему $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$, удовлетворяющую указанным выше условиям и аксиомам будем называть непрерывной физической структурой ранга $(n+1, m+1)$, если $n, m \geq 2$.*

Определение 2.5. *Две непрерывные физические структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ и $(\mathcal{M}', \mathcal{N}', R', \langle , \rangle')$ ранга $(n+1, m+1)$ будем называть сильно эквивалентными, если найдутся такие гомеоморфные биекции $\mu : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, $\nu : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$, что для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ будет выполнено*

$$\langle \mu(i), \nu(\alpha) \rangle' = \langle i, \alpha \rangle.$$

Поскольку множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в всех условиях симметричны, далее мы можем без ограничения общности рассматривать лишь случай $m \geq n$.

Теорема 2.4. *Пусть $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ — непрерывная физическая структура ранга $(n+1, m+1)$, $m \geq n \geq 2$, $(m, n) \neq (3, 3)$. Тогда*

1. *$m = n$ или $m = n + 1$.*

2. *Мы можем выбрать элементы $O, e \in R$ (при этом в качестве e можно взять произвольный элемент R, не равный O) и задать на R бинарные операции $+$ и $\cdot$ так, что $(R, +, \cdot, O, e)$ будет топологическим телом.*

3. *$\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ с введенной выше топологией являются, соответственно, m-мерным топологическим левым и n-мерным топологическим правым векторными пространствами над телом R.*

4. *Найдутся такие $Z' \in \mathcal{M}^n$ и $\Omega' \in \mathcal{N}^m$, что отображения $\langle Z', \cdot\rangle : \mathcal{N} \to R^n$ и $\langle \cdot, \Omega'\rangle : \mathcal{M} \to R^n$ являются (топологическими) изоморфизмами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ на топологическое левое и топологическое правое, соответственно, векторные пространства строк длины m и n, соответственно, над R.*

5. *$\langle , \rangle$ совместно непрерывна и задается одной из формул (1.2.1), (1.2.3) или (1.2.4):*

$$\begin{aligned}
\langle i, \alpha\rangle &= x_1 \cdot \xi_1 + \ldots + x_n \cdot \xi_n \quad (m = n);\\
\langle i, \alpha\rangle &= (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 + \ldots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n + x_{n+1} \quad (m = n+1);\\
\langle i, \alpha\rangle &= (x_1 - x_n) \cdot (\xi_1 - \xi_n) + \ldots + (x_{n-1} - x_n) \cdot (\xi_{n-1} - \xi_n) + x_n + \xi_n\\
&\qquad (m = n),
\end{aligned}$$

где $\langle i, \Omega'\rangle = (x_1, \ldots, x_m)$, $\langle Z', \alpha\rangle = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $+$ и $\cdot$ — операции в теле R.

Замечание 2.2. Из теоремы следует, что любая непрерывная физическая структура соответствующего ранга (при условии $m > n$) сильно эквивалентна одной из структур $A_n(R)$, $B_n(R)$, $C_n(R)$, рассмотренных в приложении 1, если на R задана структура тела, определенная в доказательстве теоремы. В качестве задающих эквивалентность отображений для этого достаточно взять отображения $\mu = \pi^{\Omega'}$, $\nu = \pi_{Z'}$.

В приложении 1 показано также, что алгебраические системы $A_n(R)$, $B_n(R)$, $C_n(R)$ удовлетворяют всем аксиомам непрерывной физической структуры и, значит, условиям теоремы, что делает ее содержательной.

Замечание 2.3. Аксиома Т3 будет использована при доказательстве теоремы 2.4 лишь для того, чтобы показать непрерывность операции взятия обратного по умножению в теле или группе R, и не требуется для доказательства утверждений этой теоремы, явно эту непрерывность не подразумевающих.

Следующая теорема будет получена из теоремы 2.4 как следствие.

Теорема 2.5. *Пусть $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ — непрерывная физическая структура ранга $(n+1, m+1)$, такого, что $m \geq n \geq 2$, $(n+1, m+1) \neq (3,3)$, причем R — поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$, с заданной на них классической топологией. Тогда $m = n$ или $m = n+1$, и найдутся такие $I \in \mathcal{M}^n$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{N}^n$ и такой гомеоморфизм $\varphi : R \to R$, что выполняется одна из следующих трех формул, справедливая для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ (в первом и третьем случае $m = n$, во втором — $m = n+1$).*

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}(\varphi(x_1)\varphi(\xi_1) + \ldots + \varphi(x_n)\varphi(\xi_n)); \tag{2.2.1}$$

$$\begin{aligned} \langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}((\varphi(x_1) - \varphi(x_n))\varphi(\xi_1) + \ldots + \\ (\varphi(x_1) - \varphi(x_n))\varphi(\xi_n)) + \varphi(x_{n+1}); \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

$$\begin{aligned} \langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}((\varphi(x_1) - \varphi(x_{n-1}))(\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_n)) + \ldots + \\ (\varphi(x_1) - \varphi(x_n))(\varphi(\xi_{n-1}) - \varphi(\xi_n)) + \varphi(x_n) + \varphi(\xi_n)), \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

где $(x_1, \ldots, x_n) = \langle i, \mathfrak{A} \rangle$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \langle I, \alpha \rangle$.

Отображения $\langle I, \cdot \rangle$ и $\langle \cdot, \mathfrak{A} \rangle$ при этом можно взять биективными и гомеоморфными.

Замечание 2.4. Если в качестве R взять такое топологическое тело, что на топологическом пространстве R определено более одной неизоморфной структуры топологического тела (например, поле p-адических чисел, см. теорему 2.3), то утверждение теоремы 2.5 для соответствующего R не выполняется.

Доказательство. Построим соответствующий контрпример. Пусть $(R, +, \cdot, 0, 1) = R$ — заданное топологическое тело. Обозначим за

$(R, +_F, \cdot_F, O, e) = R_F$ топологическое тело, неизоморфное ему (существующее по условию доказываемого утверждения). Тогда существуют, как показано в приложении 1, непрерывные физические структуры $A_n(R)$, $A_n(R_F)$. В этих структурах $\mathcal{M}$ является левым, а $\mathcal{N}$ — правым топологическими векторными пространствами строк длины n над телами R и R_F, соответственно, действие $\langle , \rangle$ определяется по правилам, соответственно, $\langle (x_1, \ldots, x_n), (\xi_1, \ldots, \xi_n) \rangle = x_1 \cdot \xi_1 + \ldots + x_n \cdot \xi_n$ и $\langle (x_1, \ldots, x_n), (\xi_1, \ldots, \xi_n) \rangle = x_1 \cdot_F \xi_1 +_F \cdots +_F x_n \cdot_F \xi_n$.

При этом, если бы существовал гомеоморфизм $\varphi : R \to R$, такой, что выполнено (2.2.1) для любых $i = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}$ (ввиду наличия нулей в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ должна выполняться именно она), $\alpha = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{N}$, то, подставляя в (2.2.1), с учетом вида $\langle , \rangle$, пары значений $i = (O, \ldots, O)$, $\alpha = (O, \ldots, O)$; $i = (e, O, \ldots, O)$, $\alpha = (e, O, \ldots, O)$; $i = (a, b, O, \ldots, O)$, $\alpha = (e, e, O, \ldots, O)$, $i = (a, O, \ldots, O)$, $\alpha = (b, O, \ldots, O)$ (с произвольными $a, b \in R$), получаем, что ψ является изоморфизмом тел $(R, +_F, \cdot_F, O, e)$ и $(R, +, \cdot, 0, 1)$, что противоречит нашему предположению. □

Мы можем также сформулировать отдельную теорему для случая наличия нулей в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.

Напомним аксиомы A0 и A3'.

Аксиома A0 В множестве $\mathcal{M}$ есть такой элемент $z_0 \in \mathcal{M}$, что для любых $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$ выполнено $\langle z_0, \alpha \rangle = \langle z_0, \alpha' \rangle$. Существует такой элемент $\omega_0 \in \mathcal{N}$, что для любых $i, i' \in \mathcal{M}$ выполнено $\langle i, \omega_0 \rangle = \langle i', \omega_0 \rangle$.

Аксиомой A3' называется утверждение аксиомы A3, берущееся только для $k = 1, 2$.

Теорема 2.6. *Пусть для системы* $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ *ранга* $(n+1, m+1)$, $m \geq n \geq 2$, $(m, n) \neq (3, 3)$, *выполнена совокупность условий и аксиом, требуемых определением непрерывной физической структуры, в которой аксиома A3 заменена на совокупность аксиом A3' и A0. Тогда*

1. *$m = n$.*

2. *Мы можем выбрать элементы $O, e \in R$ (при этом в качестве e можно взять произвольный элемент R, не равный O) и задать на R бинарные операции $+$ и $\cdot$ так, что $(R, +, \cdot, O, e)$ будет топологическим телом.*

3. *$\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ с введенной выше топологией являются, соответственно, n-мерным топологическим левым и топологическим правым векторными пространствами над телом R.*

4. *Найдутся такие $Z' \in \mathcal{M}^n$ и $\Omega' \in \mathcal{N}^m$, что отображения $\langle Z', \cdot \rangle : \mathcal{N} \to R^n$ и $\langle \cdot, \Omega' \rangle : \mathcal{M} \to R^n$ являются (топологическими) изоморфизмами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ на топологическое левое и топологическое правое, соответственно, векторные пространства строк длины n над R.*

5. *$\langle , \rangle$ совместно непрерывна и является билинейной формой на паре пространств $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$.*

Утверждение этой теоремы также можно обратить, согласно приложению 1.

Аналогичным образом может быть переформулирована и теорема 2.1 — достаточно заменить аксиому А3 на А0 и А3', и оставить для вида структуры лишь формулу (2.2.1).

2.3 Простейшие следствия аксиом и сведение к алгебраическому случаю

Выведем некоторые следствия из приведенных выше аксиом. В рассуждениях этого раздела не будут использоваться аксиомы А0, А3, поэтому они проходят в условиях как теоремы 2.4, так и теоремы 2.6.

Предложение 2.1. *Для любого $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ отображение $\langle I, \cdot \rangle : \mathcal{N} \to R^n$ открыто. Для любого $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ отображение $\langle \cdot, \mathfrak{A} \rangle : \mathcal{M} \to R^m$ открыто.*

Доказательство. Докажем, например, первое утверждение. Нам достаточно показать, что открыты образы всех элементов некоторой открытой базы топологии пространства $\mathcal{M}$. Предбаза рассматриваемой нами топологии состоит из всех множеств вида $\pi_j^{-1}(U)$, $j \in \mathcal{M}$, U — открытое подмножество R. Пусть $\pi_{j_1}^{-1}(U_1), \ldots, \pi_{j_k}^{-1}(U_k)$, где $(j_1, \ldots, j_k) = J \in \mathcal{M}^k$, $U_1, \ldots, U_k$ — открытые подмножества R, есть некоторый конечный набор элементов предбазы. Рассмотрим некоторый j_t, $1 \leq t \leq k$. Фиксируем какую-нибудь базу $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$. Из аксиомы T1 получаем тогда, что для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle j_t, \alpha \rangle = F(\langle j_t, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \alpha \rangle) = u_t(\langle I, \alpha \rangle)$ (при любом фиксированном j_t). При этом $u_t : R^n \to R$ определена на всем R^n, ввиду аксиомы A2', и непрерывна, ввиду непрерывности F.

Через $u : R^n \to R^k$ обозначим декартово произведение отображений $u_1, \ldots, u_k : R^n \to R$. Из построения следует, что u определено на всем R^n, непрерывно, и для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ верно $u(\langle I, \alpha \rangle) = \langle J, \alpha \rangle$. Тогда $\pi_I(\pi_{j_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_{j_k}^{-1}(U_k)) = \{\langle I, \alpha \rangle,\ \alpha \in \mathcal{N} : \langle j_1, \alpha \rangle \in U_1, \ldots, \langle j_k, \alpha \rangle \in U_k\} = u^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_k)$, то есть открыто в R^n, ввиду непрерывности u. Таким образом, мы доказали, что π_I переводит любое множество из открытой базы $\mathcal{M}$ в открытое множество из R^n, что нам и требовалось. □

Лемма 2.1. *$\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ всюду плотно в $\mathcal{M}^n$, $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ всюду плотно в $\mathcal{N}^m$.*

Доказательство. Докажем, например, первое утверждение. Заметим, что для произвольной базы $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ отображение $\langle \cdot, \mathfrak{A} \rangle : \mathcal{M}^n \to R^{nm}$ (декартова степень отображения $\pi^{\mathfrak{A}}$) открыто и взаимнооднозначно. Открытость следует из предложения 2.1, сюръективность — из аксиомы A2'. Для доказательства инъективности предположим, что для каких либо $i, i' \in \mathcal{M}$ $\langle i, \mathfrak{A} \rangle = \langle i', \mathfrak{A} \rangle$. Тогда из аксиомы T1 получаем $\langle i, \alpha \rangle = F(\langle i, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \alpha \rangle) = F(\langle i', \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \alpha \rangle) = \langle i', \alpha \rangle$ для произвольных $\alpha \in \mathcal{N}$, откуда, ввиду аксиомы невырожденности, $i = i'$.

Итак, мы показали открытость и взаимнооднозначность отображения $\langle \cdot, \mathfrak{A} \rangle : \mathcal{M}^n \to R^{nm}$. Поэтому обратное к нему непрерывно и взаимноодноднозначно, и $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, как образ всюду плотного в R^{nm} (согласно аксиоме T2) множества $\langle \mathcal{B}_{\mathcal{M}}, \mathfrak{A} \rangle$ при таком отображении, само всюду плотно в $\mathcal{M}^n$. Аналогично, $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ всюду плотно в $\mathcal{N}^m$. $\square$

Предложение 2.2. *Пусть* $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $I' \in \mathcal{M}^n$, $i, i' \in \mathcal{M}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, $\mathfrak{A}' \in \mathcal{N}^m$, $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$. *Пусть* $\langle I, \mathfrak{A}' \rangle = \langle I', \mathfrak{A} \rangle$, $\langle i', \mathfrak{A} \rangle = \langle i, \mathfrak{A}' \rangle$, $\langle I, \alpha' \rangle = \langle I', \alpha \rangle$. *Тогда* $\langle i', \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$.

Доказательство. Выведем теперь требуемое утверждение из аксиомы T1 предельным переходом по базам. Пусть $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $i \in \mathcal{M}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, $\alpha \in \mathcal{N}$, $I' \in \mathcal{M}^n$. Пользуясь доказанной в лемме 2.1 всюду плотностью $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, построим для I' последовательность элементов $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, пределом которой он является: $I' = \lim_{k\to\infty} I'_k$, где все $I'_k \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$. Для каждого I'_k можно (согласно аксиоме A2') построить такой $\mathfrak{A}'_k \in \mathcal{N}^m$, что $\langle I, \mathfrak{A}'_k \rangle = \langle I'_k, \mathfrak{A} \rangle$. После этого строятся $\alpha'_k \in \mathcal{N} : \ \langle I, \alpha'_k \rangle = \langle I'_k, \alpha \rangle$ и $i'_k \in \mathcal{M} : \ \langle i'_k, \mathfrak{A} \rangle = \langle i, \mathfrak{A}'_k \rangle$. Тогда из аксиомы T1 следует $\langle i'_k, \alpha \rangle = \langle i, \alpha'_k \rangle$.

При фиксированном α отображение $\langle \cdot\,, \alpha \rangle : \mathcal{M}^n \to R^n$ будет непрерывно как произведение n непрерывных отображений $\langle \cdot\,, \alpha \rangle : \mathcal{M} \to R$. Аналогично, непрерывным будет отображение $\langle \cdot\,, \mathfrak{A} \rangle : \mathcal{M}^n \to R^{nm}$. Тогда $\langle I', \alpha \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle I'_k, \alpha \rangle$, $\langle I', \mathfrak{A} \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle I'_k, \mathfrak{A} \rangle$.

Как уже отмечалось нами в начале доказательства, отображение π_I (там речь шла о $\pi^{\mathfrak{A}}$, что принципиально ничем не отличается) обратимо, и обратное к нему отображение (обозначим его $f_I : R^n \to \mathcal{N}$) определено на всем R^n и непрерывно. Отсюда $\alpha' = f_I(\langle I, \alpha' \rangle) = f_I(\langle I', \alpha \rangle) = f_I(\lim_{k\to\infty} \langle I'_k, \alpha \rangle) = \lim_{k\to\infty} f_I(\langle I'_k, \alpha \rangle) = \lim_{k\to\infty} f_I(\langle I, \alpha'_k \rangle) = \lim_{k\to\infty} \alpha'_k$. Аналогично получается $\mathfrak{A}' = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{A}'_k$. Тогда $\langle i, \mathfrak{A}' \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle i, \mathfrak{A}'_k \rangle$. Из этого, как и выше, выводим $i' = \lim_{k\to\infty} i'_k$. В силу хаусдорфовости R мы можем теперь перейти к пределу в обеих частях (следующего из аксиомы T1) равенства $\langle i'_k, \alpha \rangle = \langle i, \alpha'_k \rangle$, получая требуемое $\langle i', \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$. $\square$

Фиксируем некоторые базы $Z \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ и $\Omega \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$. Будем рассматривать для них наборы функций $U_{\mathcal{M}}$ и $U_{\mathcal{N}}$, определенные, как в главе 1 (и соответствующие этим наборам операторы). Отметим, что, поскольку выполняются аксиомы A1 (фактически сформулированная в предложении 2.2) и A2, будут выполнены и утверждения следующих из них аксиом A4, A5 и A6 (предложения 1.1–1.3).

Мы получаем, таким образом, что из условий теоремы 2.4 вытекают условия теоремы 1.4, а из условий теоремы 2.6 — условия теоремы 1.5.

Мы зафиксируем далее операции $+$ и $\cdot$, задаваемые в ходе доказательства теорем 1.4, 1.5, а также наборы $Z' \in \mathcal{M}^n$, $\Omega' \in \mathcal{N}^m$, упоминаемые в их утверждениях.

2.4 Вид функции F.

В этом пункте излагаются результаты А. А. Симонова [24] и их тривиальные следствия.

Далее нам потребуется концепция обобщенного матричного умножения [24]. Согласно теореме 1.4, отображения $\langle Z', \cdot\rangle : \mathcal{N} \to R^n$, $\langle \cdot, \Omega'\rangle : \mathcal{M} \to R^m$, являются биективными. Тогда элементы $\mathcal{M}$ мы можем рассматривать как строки из R^m (матрицы $1\times m$), а элементы $\mathcal{N}$ — как столбцы из R^n (матрицы $n \times 1$). Если $i \in \mathcal{M}$, $\langle i, \Omega'\rangle$ — соответствующая ему матрица-строка, $\alpha \in \mathcal{N}$, $\langle Z', \alpha\rangle$ — соответствующая ему матрица-столбец, то $\langle i, \alpha\rangle$ будем понимать как обобщенное произведение таких матриц:

$$\langle i, \Omega'\rangle * \langle Z', \alpha\rangle := \langle i, \alpha\rangle.$$

Это определение позволяет естественным образом перемножать матрицы размера $k \times m$ на матрицы размера $n \times l$ для любых k, l. Результатом такого перемножения мы будем полагать матрицу $k \times l$, элементом p-й строки и q-го столбца которой будет обобщенное произведение p-й строки первой матрицы на q-й столбец второй. В частности, произведением двух матриц размера $n\times m$ будет вновь матрица размера $n\times m$. $\langle Z', \Omega'\rangle$ будет являться единичным элементом относительно такого умножения. Обозначим

$\langle Z', \Omega' \rangle = E^*$.

В приложении 1 показано, что для обобщенного матричного умножения, определенного по биформе, удовлетворяющей одной из формул (1.2.1), (1.2.2), (1.2.4) (которым, согласно теореме 1.4, должна удовлетворять биформа при условии $m \geq n$), выполнена ассоциативность на множестве матриц размера $n \times m$. Отсюда следует, что, например, и для матриц x, Y, z размеров $1 \times m$, $n \times m$, $n \times 1$, соответственно, выполняется $(x * Y) * z = x * (Y * z)$ (достаточно дополнить матрицы меньших размеров до матриц размера $n \times m$ их копиями, и требуемое равенство будет получаться из ассоциативности).

Для матриц из множества $\langle Z', \mathcal{B}_{\mathcal{N}} \rangle$ будет существовать левый обратный относительно обобщенного матричного умножения (матрица размера $n \times m$, не обязательно лежащая в $\langle Z', \mathcal{B}_{\mathcal{N}} \rangle$). Он задается следующим образом. Пусть $A \in \langle Z', \mathcal{B}_{\mathcal{N}} \rangle$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — такая база $\mathcal{N}$, что A состоит из соответствующих этим элементам столбцов $\langle Z', \alpha_1 \rangle, \ldots, \langle Z', \alpha_m \rangle$. Тогда мы можем, согласно аксиоме A2', выбрать такие $i_1, \ldots, i_n \in \mathcal{M}$, что $\langle i_k, \alpha_l \rangle = \langle z'_k, \omega'_l \rangle$, $k = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, m$. Матрица, составленная из строк $\langle i_k, \Omega \rangle$, $k = 1, \ldots, n$, будет левой обратной к A (что сразу следует из определения обобщенного матричного умножения).

Аналогично, для матриц из множества $\langle \mathcal{B}_{\mathcal{M}}, \Omega \rangle$ будет существовать правый обратный относительно обобщенного матричного умножения. Если матрица $A \in \langle \mathcal{B}_{\mathcal{M}}, \Omega' \rangle$ состоит из строк, соответствующих некоторым элементам $i_1, \ldots, i_n \in \mathcal{M}$, $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, то, выбрав элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathcal{N}$ так, чтобы $\langle i_k, \alpha_l \rangle = \langle z'_k, \omega'_l \rangle$, $k = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, m$, и составив матрицу из столбцов $\langle Z', \alpha_k \rangle$, $k = 1, \ldots, m$, мы получим правую обратную к A.

Пусть теперь $A \in \langle \mathcal{B}_{\mathcal{M}}, \mathcal{B}_{\mathcal{N}} \rangle$, $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ таковы, что $A = \langle I, \mathfrak{A} \rangle$. Как сразу следует из определения обобщенного умножения,

$$\langle I, \mathfrak{A} \rangle = \langle I, \Omega' \rangle * \langle Z', \mathfrak{A} \rangle. \tag{2.4.1}$$

Как отмечено выше, матрица $\langle I, \Omega' \rangle$ обратима (по обобщенному умножению) справа, матрица $\langle Z', \mathfrak{A} \rangle$ обратима слева. Но, согласно леммам 4.1, 4.2 из приложения 1, для обобщенного матричного умножения, основанного на формулах (1.2.2) и (1.2.4) левая обратимость равносильна правой обратимости (обобщенное умножение, основанное на формуле (1.2.1), совпадает с обычным матричным умножением, и для него эта равносильность тривиальна). Поэтому матрица $\langle I, \mathfrak{A} \rangle$ обратима, как ассоциативное произведение двух обратимых матриц. Мы показали таким образом, что множество $\langle \mathcal{B}_{\mathcal{M}}, \mathcal{B}_{\mathcal{N}} \rangle$ состоит из матриц, обратимых относительно обобщенного матричного умножения.

Отметим, что функция F на области своего определения задается для каждой структуры однозначно по известному виду биформы. Это следует из аксиомы Т1, поскольку для каждого значения (x, Y, z) из области определения F можно подобрать такие $i \in \mathcal{M}$, $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $\alpha \in \mathcal{N}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, что $(\langle i, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \alpha \rangle) = (x, Y, z)$. Покажем теперь, что функция F задается формулой

$$F(x, Y, z) = (x) * (Y)^{-1} * (z) \tag{2.4.2}$$

(ср. [5]) где $x \in R^m$, $Y \in \langle \mathcal{B}_{\mathcal{M}}, \mathcal{B}_{\mathcal{N}} \rangle \subseteq R^{nm}$, $z \in R^n$, при этом в правой части (x) рассматривается как матрица $1 \times m$, (Y) — как матрица $n \times m$, (z) — как матрица $n \times 1$; обратный элемент к (Y) берется относительно обобщенного матричного умножения.

Согласно сделанному выше замечанию, для этого достаточно проверить, заданная этой формулой функция определена на всей $R^m \times \langle \mathcal{B}_{\mathcal{M}}, \mathcal{B}_{\mathcal{N}} \rangle \times R^n$ и удовлетворяет утверждению аксиомы Т1. Первое следует из ранее показанной обратимости матриц из $\langle \mathcal{B}_{\mathcal{M}}, \mathcal{B}_{\mathcal{N}} \rangle$. Покажем второе. Пусть $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$. Пользуясь ассоциативностью, получаем, исходя из определения обобщенного матричного умножения : $F(\langle i, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \alpha \rangle) = F(\langle i, \Omega' \rangle * \langle Z', \alpha \rangle, \langle I, \Omega' \rangle * \langle Z', \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \Omega' \rangle * \langle Z', \alpha \rangle) =$ $\langle i, \Omega' \rangle * \langle Z', \mathfrak{A} \rangle * (\langle I, \Omega' \rangle * \langle Z', \mathfrak{A} \rangle)^{-1} * \langle I, \Omega' \rangle * \langle Z', \alpha \rangle = \langle i, \Omega' \rangle * \langle Z', \alpha \rangle = \langle i, \alpha \rangle$, что и требуется.

Просуммируем результаты этого пункта.

Предложение 2.3. *1. Обобщенное матричное умножение ассоциативно в условиях теорем 2.4, 2.6.*

2. Все матрицы из множества $\langle \mathcal{B}_{\mathcal{M}}, \mathcal{B}_{\mathcal{N}} \rangle$ обратимы относительно обобщенного матричного умножения.

3. Функция F определяется формулой (2.4.2).

2.5 Топологизация

Предложение 2.4. *Биформа $\langle , \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ совместно непрерывна.*

Доказательство. Согласно аксиоме T1, для любых элементов $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle i, \alpha \rangle = F(\langle i, \Omega \rangle, \langle Z, \Omega \rangle, \langle Z, \alpha \rangle) = F(\pi^{\Omega}(i), \langle Z, \Omega \rangle, \pi_Z(\alpha))$. Функции π_Z, π^{Ω} непрерывны, и теперь из непрерывности F следует, что $\langle , \rangle$ совместно непрерывна как композиция непрерывных функций. $\square$

Предложение 2.5. *Все функции из $U_{\mathcal{M}}$ и $U_{\mathcal{N}}$ непрерывны.*

Доказательство. Пусть $u \in U_{\mathcal{M}}$. Оператором L^n мы можем поднять ее до функции из $U_{\mathcal{M}}^n$, на свойство непрерывности это никак не влияет, поэтому далее мы можем без ограничения общности считать $u \in U_{\mathcal{M}}^n$. Обозначим $i = V[u]$. Пусть для каждого вектора $r \in R^n$ элемент $\alpha(r) \in \mathcal{N}$ таков, что $\langle Z, \alpha(r) \rangle = r$. Тогда аксиома T1 дает $u(r) = u(\langle Z, \alpha(r) \rangle) = \langle i, \alpha(r) \rangle = F(\langle i, \Omega \rangle, \langle Z, \Omega \rangle, \langle Z, \alpha(r) \rangle) = F(\langle i, \Omega \rangle, \langle Z, \Omega \rangle, r)$. Поскольку F непрерывна, а $\langle i, \Omega \rangle$, $\langle Z, \Omega \rangle$ фиксированы, получаем отсюда требуемую непрерывность u. Непрерывность функций из $U_{\mathcal{N}}$ доказывается аналогично. $\square$

Предложение 2.6. *Отображение $\pi_{Z'} = \langle Z', \cdot \rangle : \mathcal{N} \to R^n$ открыто. Отображение $\pi^{\Omega'}$ открыто.*

Доказательство. Докажем, например, первое утверждение. Обозначим $u'_1 = U[z'_1], \ldots, u'_n = U[z'_n] \in U^n_{\mathcal{M}}$. Тогда для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ будет выполняться $\langle Z', \alpha \rangle = (u'_1(\langle Z, \alpha \rangle), \ldots, u'_n(\langle Z, \alpha \rangle)) = (u'_1, \ldots, u'_n)(\langle Z, \alpha \rangle)$. Таким образом, $\pi_{Z'} = (u_1, \ldots, u_n) \circ \pi_Z$. π_Z открыто по предложению 2.1, и нам осталось лишь доказать открытость отображения $U = (u'_1, \ldots, u'_n) : R^n \to R^n$. Отметим прежде всего, что отображение U биективно, поскольку биективны отображения π_Z, $\pi_{Z'}$, и $U = \pi_{Z'} \circ \pi_Z^{-1}$. Покажем, что обратное отображение можно представить как $U^{-1} = (u_1, \ldots, u_n)$ для некоторых $u_1, \ldots, u_n \in U^n_{\mathcal{M}}$. Тогда U^{-1} будет, в силу предложения 2.5, непрерывно, а отображение U — открыто.

Согласно теореме 1.4, $U^n_{\mathcal{M}}$ есть одно из следующих множеств функций: $L^l_n(R)$, $L^{l,a}_n(R)$, $L^{l,s}_n(R)$, $L^{l,s,a}_n(R)$. В первом случае отображение U будет невырожденным линейным, поэтому U^{-1} также линейно и представляется в нужном нам виде. Во втором случае U будет невырожденным аффинным отображением, поэтому U^{-1} также аффинное и представляется в нужном нам виде. В третьем случае U будет обратимым линейным отображением, в матрице которого сумма элементов каждой строки равна e. Это условие означает в точности то, что вектор $(e, \ldots, e)$ инвариантен под действием U. Но тогда он будет инвариантен и под действием U^{-1}, и U^{-1} представляется в нужном нам виде. Наконец, в четвертом случае U будет аффинным отображением, представляющим собой композицию линейного отображения только что рассмотренного нами вида и параллельного переноса. Поэтому U^{-1} будет представляться в таком же виде. □

Нам нужно теперь доказать, что операции $+$ и $\cdot$, введенные в предыдущем разделе, задают на R структуру топологического тела.

Предложение 2.7. $(R, +, \cdot, O, e)$ *является топологическим телом.*

Доказательство. Покажем непрерывность операции $\cdot$. Пусть для $a \in R$ элемент $i = i(a) \in \mathcal{M}$ таков, что $\langle i, \Omega' \rangle = (a, O, \ldots, O)$. Функция $i(a) : R \to \mathcal{M}$ непрерывна как функция, обратная к открытой функции $\pi^{\Omega'}$ (точнее, ее ограничению на подмножество $R\times\{O\}\times,\ldots,\times\{O\}\subseteq R^n$, рассматриваемому лишь по первой координате). Пусть для $b\in R$ элемент $\alpha=\alpha(b)\in\mathcal{N}$ таков, что $\langle Z',\alpha\rangle=(b,O,\ldots,O)$. Функция $\alpha(b):R\to\mathcal{N}$ непрерывна, подобно функции $i(a)$. Тогда из теоремы 1.4 следует (независимо от того, какой именно из формул (1.2.1), (1.2.2), (1.2.4) задана биформа), что

$$\langle i(a),\alpha(b)\rangle=a\cdot b+O+\ldots+O=a\cdot b.$$

Левая часть этого равенства непрерывно зависит от a, b, ввиду непрерывности функций $i(a)$, $\alpha(b)$ и совместной непрерывности $\langle,\rangle$ (предложение 2.4). Таким образом, произведение $a\cdot b$, стоящее в правой части, непрерывно зависит от a и b, что и доказывает согласованность операции умножения с топологией R.

Покажем непрерывность взятия обратного по умножению. Отметим, что достаточно показать непрерывность этой операции в некоторой окрестности элемента e — затем ее можно распространить на все R операторами левого умножения, которые, по доказанному выше, гомеоморфны. Пусть $Y\in R^{n\times n}$ — матрица $n\times m$, лежащая вместе с некоторой своей окрестностью в R^{nm} в множестве $\langle\mathcal{B}_{\mathcal{M}},\mathcal{B}_{\mathcal{N}}\rangle\subseteq R^{nm}$ (такая матрица найдется по аксиоме T3). Ввиду доказанной непрерывности умножения в R, отображение $\imath_Y:R\to R^{nm}$, сопоставляющее каждому элементу $a\in R$ матрицу $a\cdot Y\in R^{n\times m}$, будет непрерывным. Тогда найдется такая окрестность $U(e)$ элемента e в R, что для всех $a\in U(e)$ матрицы $a\cdot Y$ будут лежать в $\langle\mathcal{B}_{\mathcal{M}},\mathcal{B}_{\mathcal{N}}\rangle$, как и сама $Y=e\cdot Y$.

Отметим теперь, что, как непосредственно следует из формул (1.2.1), (1.2.2), (1.2.4), определения обобщенного матричного умножения и замечаний 1.3, 1.4, 1.5, дающих вид матрицы E^*, произведение произвольной матрицы X на скаляр $r\in R$ слева или справа можно выразить через обобщенное матричное произведение следующим образом:

$$r\cdot X=(r\cdot E^*)*X,\quad X\cdot r=X*(r\cdot E^*),$$

(матрица E^* состоит из нулей и единиц, поэтому $E^* \cdot r = r \cdot E^*$) при условии, что обобщенные произведения в правых частях определены. Отсюда следует также, что $(r \cdot E^*)^{-1} = r^{-1} \cdot E^*$, где обратная берется в смысле обобщенного матричного умножения.

Обозначим $x = (e, O, \ldots, O)$ (матрица-строка длины n), $z = (e, O, \ldots, O)$ (матрица-столбец высоты n). Как следует из вида формул (1.2.1), (1.2.2), (1.2.4), $x * z = e$, независимо от того, какой именно из них задается $\langle , \rangle$. Теперь получаем для всех $a \in U(e)$ (ниже обратная матрица берется в смысле обобщенного умножения)

$$a^{-1} = x * (a^{-1} \cdot E^*) * z =$$
$$x * Y * (Y^{-1} * (a^{-1} \cdot E^*)) * z = (x * Y) * ((a \cdot E^*) * Y)^{-1} * z =$$
$$(x * Y) * (a \cdot Y)^{-1} * z = F(x * Y, \imath_Y(a), z).$$

Поскольку x, Y, z фиксированы, непрерывность взятия обратного по умножению в $U(e)$ следует теперь из непрерывности F и $\imath_Y$.

Покажем теперь непрерывность операций $+$ и взятия обратного по сложению. Согласно замечанию 2.1, достаточно доказать непрерывность вычитания на R. Но, как следует из теоремы 1.4, по крайней мере один из наборов $U_{\mathcal{M}}$, $U_{\mathcal{N}}$ будет содержать функцию двух переменных (получающейся из соответствующей функции набора $U^n_{\mathcal{M}}$ или $U^m_{\mathcal{N}}$) вида $f'(x_1, x_2) = x_1 - x_2$, и непрерывность вычитания будет следовать из предложения 2.5. $\square$

Мы можем теперь доказать теорему 2.4. Как было показано нами выше, при надлежащей топологии и дополнительных условиях отображения вида π_I, $\pi^{\mathfrak{A}}$, $I \in \mathcal{B}'_{\mathcal{M}}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}'_{\mathcal{N}}$, являются гомеоморфизмами, а тело R — топологическое. Тот факт, что $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ являются топологическими векторными пространствами, следует теперь из наличия топологического изоморфизма (гомеоморфизма, сохраняющего операции) между топологическими пространствами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ с дополнительной структурой векторных пространств, и соответствующими топологическими векторными пространствами строк над топологическим телом R. Доказательство теоремы 2.4 завершено.

Метод доказательства теоремы 2.5 теперь достаточно прозрачен из замечания 2.4. По сути, нам надо найти соотношение между операциями $+$, $\cdot$, построенными нами на R в теореме 2.4 (условия которой здесь выполняются), и обычным сложением и умножением, заданными в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ изначально. Во избежание путаницы операции, введенные нами, будем обозначать как $+_F$ и $\cdot_F$. Нами было доказано, что $(R, +_F, \cdot_F, e, O)$ является топологическим телом. Его носитель R, будучи одним из топологических пространств $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, локально компактен и связен. Но все связные локально компактные топологические тела изоморфны, согласно теореме 2.1, одному из трех классических: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$. Последние три топологических пространства, согласно теореме 2.2, не гомеоморфны друг другу, и поэтому в каждом из случаев $R = \mathbb{R}$, $R = \mathbb{C}$, $R = \mathbb{H}$ все определенные на R топологические тела будут (топологически) изоморфны. Пусть теперь $\varphi : (R, +_R, \cdot_R, O, e) \to (R, +, \cdot, 0, 1)$ — гомеоморфный изоморфизм определенной нами структуры тела на R на его стандартную структуру, наличие которого было сейчас нами показано.

Рассмотрим, например, случай, когда биформа задана формулой (1.2.1) (другие случаи разбираются полностью аналогично). Если $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ таковы, что $\langle i, \Omega' \rangle = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, $\langle Z', \alpha \rangle = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$, то $\langle i, \alpha \rangle = x_1 \cdot_F \xi_1 +_F \ldots +_F x_n \cdot_F \xi_n$, и $\varphi(\langle i, \alpha \rangle) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(\xi_1) + \ldots + \varphi(x_n) \cdot \varphi(\xi_n)$. Применяя к левой и к правым частям этого равенства отображение φ^{-1}, получаем равенство (2.2.1). Доказательство теоремы 2.5 тем самым завершено.

Глава 3

Структуры ранга $(n+1,2)$

3.1 Классификационные результаты для n-транзитивных непрерывных групп преобразований

Приведем для полноты изложения следующие известные результаты о n-транзитивных непрерывных группах преобразований, которыми мы будем пользоваться далее ([22], [28],[29]).

Определение 3.1. *Пусть G — группа преобразований множества E. G называется точно n-транзитивной группой преобразований E, если для любых двух упорядоченных наборов из n попарно различных элементов $a_1, \dots, a_n \in E$, $b_1, \dots, b_n \in E$ найдется ровно один элемент $g \in G$ такой, что $g(a_k) = b_k$, $k = 1, \dots, n$.*

Теорема 3.1. *Если E — бесконечное множество, то для $n \geq 4$ не существует точно n-транзитивных групп преобразований E.*

Определение 3.2. *Пусть G — топологическая группа, E — топологическое пространство. G называется непрерывной группой преобразований топологического пространства E, если G является группой преобразований множества E и отображение $G \times E \to E$, сопоставляющее каждой паре элементов $(g, e) \in G \times E$ элемент $g(e) \in E$, является непрерывным.*

Теорема 3.2. *Пусть G — точно 3-транзитивная непрерывная группа преобразований локально компактного, не всюду несвязного, удовлетворяющего первой аксиоме счетности топологического пространства E. Тогда найдется такой гомеоморфизм φ пространства E на вещественную или комплексную проективную прямую, что группа $\varphi G \varphi^{-1}$ окажется группой всех дробно-линейных преобразований этой прямой (с топологией, индуцированной топологией прямого произведения на множестве коэффициентов этих преобразований).*

Для формулировки следующей теоремы нам понадобится ввести следующее обозначение. Пусть $\mathbb{H}$ — тело кватернионов, Γ – однопараметрическая подгруппа ее мультипликативной группы, такая, что для каждого вещественного положительного числа r найдется в точности один элемент из Γ с нормой r (будем обозначать его $\gamma(r)$, функция $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{H}$ непрерывна). Обозначим за G_Γ группу преобразований $\mathbb{H}$, состоящую из следующих преобразований:

$$y(x) = a \cdot x \cdot b + c \qquad (a, b, c \in \mathbb{H},\ |a| = 1,\ b \in \Gamma).$$

Согласно [29], G_Γ (с топологией, индуцированной топологией $\mathbb{H}^3$) будет непрерывной точно 2-транзитивной группой преобразований $\mathbb{H}$.

Теорема 3.3. *Пусть G — точно 2-транзитивная непрерывная группа преобразований локально компактного, связного, удовлетворяющего первой аксиоме счетности топологического пространства E. Тогда найдется такой гомеоморфизм φ пространства E на множество вещественных чисел, комплексных чисел или кватернионов, что группа $\varphi G \varphi^{-1}$ окажется группой всех линейных преобразований вида $y(x) = a \cdot x + b$ $(a \neq 0)$ соответствующего тела, либо, в последнем случае, группой вида G_Γ.*

3.2 Аксиоматика физической структуры ранга $(n+1,2)$ и формулировка классификационной теоремы.

Рассмотрим многоосновную алгебраическую систему $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$, где $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — произвольные множества, R — хаусдорфово локально компактное, связное топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, $\langle,\rangle : \mathcal{M}\times\mathcal{N} \to R$ — отображение, называемое биформой. Будем предполагать, что биформа удовлетворяет условию невырожденности в его обычном смысле.

Пусть задано натуральное число n. Обозначим за $\overline{R^n} \subseteq R^n$ множество всех таких n-ок элементов R, все элементы в каждой из которых попарно различны. Обозначим за $\mathcal{B}_\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^n$ множество всех n-ок элементов $\mathcal{M}$, все элементы которых попарно различны. Будем говорить, что система $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \langle,\rangle, R)$ является непрерывной физической структурой ранга $(n+1,2)$, если она удовлетворяет, кроме условия невырожденности биформы, следующим аксиомам:

Аксиома T1' Существует такая функция $F : R \times R^n \times R^n \to R$, определенная и непрерывная на подмножестве $R \times \overline{R^n} \times \overline{R^n}$, что для всех $I \in \mathcal{B}_\mathcal{M},\ i \in \mathcal{M},\ \mathfrak{A} \in \mathcal{B}_\mathcal{N},\ \alpha \in \mathcal{N}$ выполнено

$$\langle i, \alpha\rangle = F(\langle i, \mathfrak{A}\rangle, \langle I, \mathfrak{A}\rangle, \langle I, \alpha\rangle).$$

Аксиома A2" Для любого элемента $\alpha \in \mathcal{N}$ и любого $r \in R$ найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \alpha\rangle = r$. Для любой n-ки $I \in \mathcal{B}_\mathcal{M}$ и любой n-ки $r \in \overline{R^n}$ найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \alpha\rangle = r$.

Зададим на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ топологию таким же образом, как в главе 2.2 — как минимальную, в которой биформа раздельно непрерывна.

Теорема 3.4. *Для любой непрерывной физической структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ ранга $(n+1,2)$, $n \geq 2$, выполняются следующие утверждения.*

1. *Ранг структуры должен принимать одно из значений* $(3, 2)$, $(4, 2)$.

2. *Для произвольных* $Z \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $\omega \in \mathcal{N}$ *отображения* $\langle Z, \cdot \rangle : \mathcal{N} \to \overline{R^n}$ *и* $\langle \cdot, \omega \rangle : \mathcal{M} \to R$ *будут гомеоморфизмами (далее в формулировке теоремы также считаем* $Z \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $\omega \in \mathcal{N}$ *произвольными).*

3. *В случае ранга* $(3, 2)$ *найдется такой гомеоморфизм* $\varphi : R \to T$, *где* T *— топологическое пространство вещественных чисел* $\mathbb{R}$, *комплексных чисел* $\mathbb{C}$ *или кватернионов* $\mathbb{H}$, *что будет иметь место одно из следующих тождеств, выполненное для любых* $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ *(обозначаем* $\langle i, \omega \rangle = x_1$, $\langle Z, \alpha \rangle = (\xi_1, \xi_2)$, $+$ *и* $\cdot$ *— обычные сложение и умножение в соответствующих топологических телах* T*):*

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}((\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)) \cdot \varphi(x_1) + \varphi(\xi_2)), \qquad T = \mathbb{R},\ \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{H}; \tag{3.2.1}$$

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}(a \cdot \varphi(x_1) \cdot b + \varphi(\xi_2)), \tag{3.2.2}$$

где $T = H$, $\Gamma \subset \mathbb{H}$ *и отображение* $\gamma : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ *описаны в теореме 3.2,* $a = (\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)) \cdot b^{-1}$, $b = \gamma(|\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)|)$.

4. *В случае ранга* $(4, 2)$ *найдется такой гомеоморфизм* $\varphi : R \to T$ *(где* T *— это вещественная проективная прямая* $RP_1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *или* $CP_1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$*), что для любых* $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}\left(\frac{a \cdot \varphi(x_1) + b}{c \cdot \varphi(x_1) + d}\right), \tag{3.2.3}$$

где $x_1 = \langle i, \omega \rangle$, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \langle Z, \alpha \rangle$, a, b, c, d *— такие элементы* T, *что дробно-линейное преобразование* $y(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ *переводит упорядоченную тройку точек* $(0, 1, \infty)$ *в* $(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \varphi(\xi_3))$.

Замечание 3.1. Все представленные в данной классификации структуры могут быть построены.

Отметим, что случай ранга $(2, 2)$ был разобран В. К. Иониным [5] без требования согласованности биформы с какой-либо топологией на R. Приведем соответствующий результат для полноты изложения.

Теорема 3.5. *Пусть* $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ *— многоосновная алгебраическая система, удовлетворяющая аксиомам невырожденности биформы, T1 (без требования непрерывности* F*), A2' (с рангом* $(2,2)$*).*

Тогда для произвольных элементов $z \in \mathcal{M}$*,* $\omega \in \mathcal{N}$ *мы можем так задать на* R *структуру группы с единицей* $e = \langle z, \omega \rangle$*, что для любых* $i \in \mathcal{M}$*,* $\alpha \in \mathcal{N}$

$$\langle i, \alpha \rangle = \langle i, \omega \rangle \cdot \langle z, \alpha \rangle,$$

где $\cdot$ *— умножение в группе* R*.*

Функция F *при этом представляется для произвольных* $x, y, z \in R$ *в виде*

$$F(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z.$$

Из наличия топологии на R и требования непрерывности F в аксиоме T1 тогда будет сразу следовать согласованность операции $\cdot$ в группе R с топологией — достаточно подставить в выражение для F в теореме 3.5 $z = e$.

3.3 Предварительные леммы

Фиксируем некоторые элементы $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{M}$, такие, что $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{M}^n$, и элемент $\omega \in \mathcal{N}$.

Лемма 3.1. *Для всех* $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$*,* $\alpha \in \mathcal{N}$ *отображения* $\langle I, \cdot \rangle : \mathcal{N} \to \overline{R^n}$*,* $\langle \cdot, \alpha \rangle : \mathcal{M} \to R$ *биективны.*

Доказательство. Сюръективность данных отображений составляет содержание аксиомы A2". Покажем инъективность отображения $\langle I, \cdot \rangle$ для фиксированного $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$. Действительно, если найдутся такие $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \alpha \rangle = \langle I, \alpha' \rangle$, то для любого $i \in \mathcal{M}$ $\langle i, \alpha \rangle = F(\langle i, \omega \rangle, \langle I, \omega \rangle, \langle I, \alpha \rangle) = \langle i, \alpha' \rangle$, откуда, ввиду невырожденности биформы, следует $\alpha = \alpha'$, что дает инъективность $\langle I, \cdot \rangle$. Аналогично получается и инъективность $\langle \cdot, \alpha \rangle$ для любого $\alpha \in \mathcal{N}$. $\square$

Покажем, что для нашей системы будет выполняться аксиома A1 главы 1.

Лемма 3.2. *Пусть* $I' \in \mathcal{M}^n$, $i, i' \in \mathcal{M}$, $\alpha, \alpha', \beta' \in \mathcal{N}$. *Пусть* $\langle Z, \beta' \rangle = \langle I', \omega \rangle$, $\langle i', \omega \rangle = \langle i, \beta' \rangle$, $\langle Z, \alpha' \rangle = \langle I', \alpha \rangle$. *Тогда* $\langle i', \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$.

Доказательство. Заметим, что $\langle Z, \beta' \rangle \in \overline{R^n}$, поскольку все элементы из Z попарно различны, а отображение $\langle I, \cdot \rangle$ инъективно. Теперь если для некоторых $I' \in \mathcal{M}^n$, $\beta' \in \mathcal{N}$ выполнено $\langle Z, \beta' \rangle = \langle I', \omega \rangle$, то, ввиду биективности $\langle \cdot, \omega \rangle$, должны быть различными и элементы из I', и поэтому $I' \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$. Теперь доказываемое утверждение является тривиальным следствием аксиомы T1': $\langle i', \alpha \rangle = F(\langle i', \omega \rangle, \langle I', \omega \rangle, \langle I', \alpha \rangle) = F(\langle i, \beta' \rangle, \langle Z, \beta' \rangle, \langle Z, \alpha' \rangle) = \langle i, \alpha' \rangle$. □

Определим так же, как и в главе 1, отношение зависимости на $\mathcal{N}$ и связанный с ним набор функций $U_{\mathcal{N}} = U^1_{\mathcal{N}}$. Далее будем обозначать просто $U_{\mathcal{N}} = U$. Поскольку отображение $\langle \cdot, \omega \rangle$ сюръективно, каждая такая функция определена на всем R. Дословно повторяя доказательство предложения 1.2 (опирающееся на аксиому A1), получаем следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Множество* U *замкнуто относительно композиции функций.*

Кроме того, U содержит тождественную функцию $\mathrm{id} = U[\omega]$.

Лемма 3.4. $\overline{R^n}$ *будет открыто в* R^n

Доказательство. Пусть $(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{R^n}$. Мы можем построить его открытую в R^n окрестность, лежащую в $\overline{R^n}$, следующим образом: находим с помощью хаусдорфовости систему непересекающихся окрестностей $A_1, \ldots, A_n$ элементов $a_1, \ldots, a_n$ в R (строим для каждой пары элементов окрестности, отделяющие их друг от друга; после этого A_1, например, будет пересечением $n-1$ построенных окрестностей элемента a_1), и затем в качестве нужной нам окрестности берем $A = A_1 \times \ldots \times A_n \subseteq R^n$. □

Лемма 3.5. *Для любых $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ отображения $\langle I, \cdot \rangle$, $\langle \cdot, \alpha \rangle$ являются гомеоморфизмами.*

Доказательство. Действительно, непрерывность сразу следует из раздельной непрерывности биформы. Открытость будем доказывать так же, как в предложении 2.1. Открытость отображения $\langle , \cdot\alpha \rangle$ доказывается дословно так же. При доказательстве открытости $\langle I, \cdot \rangle$ рассуждения доказательства предложения 2.1 требуют незначительной модификации ввиду того, что образом отображения $\pi^I : \mathcal{N} \to R^n$ в нашем случае является не все R^n, но его открытое согласно лемме 3.4 подмножество $\overline{R^n}$. Функция u_t и отображение u из доказательства предложения 2.1 будет тогда определены и непрерывны на $\overline{R^n}$, а множество $u(U_1 \times \ldots \times U_k)$ будет открыто в $\overline{R^n}$, что означает, ввиду открытости $\overline{R^n}$, его открытость в R^n, а это и дает, согласно дальнейшим рассуждениям доказательства предложения 2.1, открытость отображения $\langle I, \cdot \rangle$. $\square$

Дословно повторяя доказательства предложений 2.5 и 2.4, мы получаем также следующие утверждения.

Лемма 3.6. *Все функции из U непрерывны.*

Лемма 3.7. *Биформа $\langle , \rangle$ совместно непрерывна.*

3.4 Групповая структура на U

Обозначим далее $\langle Z, \omega \rangle = (e_1, \ldots, e_n) = E$. Очевидно, все $e_1, \ldots, e_n$ различны (иначе база Z содержала бы совпадающие элементы).

Лемма 3.8. *Пусть $a_1, \ldots, a_n \in R$ попарно различны. Тогда для любых $b_1, \ldots, b_n$ найдется $u \in U$, такая, что $u(a_1) = b_1, \ldots, u(a_n) = b_n$.*

Доказательство. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ возьмем такой $i_k \in \mathcal{M}$, что $\langle i_k, \omega \rangle = r_k$. Поскольку все $a_1, \ldots, a_n$ различны, то и все $i_1, \ldots, i_n$ различны. Тогда $(i_1, \ldots, i_n) = I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$. Возьмем, с помощью аксиомы A2', такой $\alpha \in$

$\mathcal{N}$, что $\langle I, \alpha\rangle = (b_1, \dots, b_n)$. Тогда $u = U[\alpha]$, легко видеть, удовлетворяет условиям предложения. $\square$

Лемма 3.9. *Пусть $a_1, \dots, a_n \in R$. Тогда существует единственная функция $u \in U$, такая, что $u(e_1) = a_1, \dots, u(e_n) = a_n$.*

Доказательство. Следует непосредственно из определения U и из биективности отображения $\langle Z, \cdot\rangle$: соответствующая функция u будет функцией $U[\alpha]$ для такого $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle Z, \alpha\rangle = (a_1, \dots, a_n)$. $\square$

Лемма 3.10. *Множество U является группой относительно композиции функций.*

Доказательство. Нам осталось доказать только наличие обратного элемента относительно композиции. Пусть $u \in U$. Обозначим $a_1 = u(e_1), \dots, a_n = u(e_n)$. Все $a_1, \dots, a_n$ попарно различны, так как в противном случае для $\alpha \in \mathcal{N}$, такого, что $u = U[\alpha]$, получаем $\langle Z, \alpha\rangle = (u(\langle z_1, \omega\rangle), \dots, u(\langle z_n, \omega\rangle)) = (a_1, \dots, a_n)$, и если в наборе $a_1, \dots, a_n$ есть совпадающие элементы, то они, ввиду инъективности отображения $\langle Z, \cdot\rangle$, будут и в наборе $z_1, \dots, z_n$ — противоречие. Пусть $u' \in U$ - такая (существующая по лемме 3.8) функция, что $u'(a_1) = e_1, \dots, u'(a_n) = e_n$. Обозначим $v = u' \circ u$. $v' \in U$ как композиция функций из U (лемма 3.3). При этом $v(e_1) = e_1, \dots, v(e_n) = e_n$. Согласно лемме 3.9, в U есть только одна такая функция, а именно тождественная. Поэтому u' будет обратной к u. $\square$

Лемма 3.11. *Пусть $a_1, \dots, a_n \in R$ попарно различны, $b_1, \dots, b_n \in R$ попарно различны. Тогда существует единственная функция $u \in U$, такая, что $u(a_1) = b_1, \dots, u(a_n) = b_n$.*

Доказательство. Существование было доказано леммой 3.8. Покажем единственность. Пусть функции $u, u' \in U$ удовлетворяют условиям предложения. Рассмотрим функции $v, v' \in U$, такие, что $v(e_1) = a_1, \dots, v(e_n) = a_n$, $v'(e_1) = b_1, \dots, v'(e_n) = b_n$. Обозначим $w = (v')^{-1} \circ u \circ v \in U$. Для нее $w(e_1) = e_1, \dots, w(e_n) = e_n$, откуда, по лемме 3.9, $w = \mathrm{id}$, что означает

$u = v' \circ v^{-1}$. Аналогично $(v')^{-1} \circ u' \circ v = \mathrm{id}$, что дает $u = v' \circ v^{-1}$. Таким образом, $u = v' \circ v^{-1} = u'$. $\square$

Нами доказано, таким образом (леммы 3.10, 3.11), следующее

Предложение 3.1. *U является точно n-транзитивной группой преобразований множества R.*

Зададим теперь топологию на U следующим образом. Каждому элементу $u \in U$ однозначно соответствует элемент $\alpha \in \mathcal{N}$, такой, что $u = U[\alpha]$. При этом отображение $\langle Z, \cdot \rangle$ задает гомеоморфное соответствие между $\mathcal{N}$ и R^n. Таким образом, мы имеем биективное соответствие $U \to \overline{R^n}$. Обозначим это отображение как $N : U \to \overline{R^n}$ и будем рассматривать на U индуцированную им топологию — ту, в которой N становится гомеоморфизмом.

Лемма 3.12. *U является топологической группой относительно операции композиции.*

Доказательство. Умножение и взятие обратного в U индуцируют в R^n посредством отображения N частичные бинарное и унарное отображение, соответственно. Нам надо показать их непрерывность. Для этого сначала получим их в явном виде.

Пусть $u, v, w \in U$, $u \circ v = w$. Обозначим $\alpha = V[u]$, $\beta = V[v]$, $\gamma = V[w]$, $\langle Z, \alpha \rangle = (a_1, \ldots, a_n)$, $\langle Z, \beta \rangle = (b_1, \ldots, b_n)$, $\langle Z, \gamma \rangle = (c_1, \ldots, c_n)$ (тогда, в частности, $N[u] = (a_1, \ldots, a_n)$). Пусть $r \in R$, $i \in \mathcal{M}$ таков, что $\langle i, \omega \rangle = r$. Тогда, согласно аксиоме T1', $u(r) = u(\langle i, \omega \rangle) = \langle i, \alpha \rangle = F(\langle i, \omega \rangle, \langle Z, \omega \rangle, \langle Z, \alpha \rangle) = F(r, E, a_1, \ldots, a_n)$. Аналогично $v(r) = F(r, E, b_1, \ldots, b_n)$. Теперь для любого $k = 1, \ldots, n$

$$c_k = \langle z_k, \gamma \rangle =$$
$$w(\langle z_k, \omega \rangle) = w(e_k) = u \circ v(e_k) = u(v(e_k)) = F(v(e_k), E, a_1, \ldots, a_n) =$$
$$F(F(e_k, E, b_1, \ldots, b_n), E, a_1, \ldots, a_n).$$

Ввиду непрерывности F, это означает, что c_k непрерывно зависит от $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Тогда $N[w]$ непрерывно зависит от $N[u]$, $N[v]$ и, ввиду гомеоморфности N, w непрерывно зависит от u, v. Непрерывность композиции в U доказана.

Пусть $u, v \in U$ таковы, что $u \circ v = \mathrm{id}$, α, β и $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ определены так же, как раньше. Тогда, пользуясь проведенными выше выкладками, имеем для любого $k = 1, \ldots, n$

$$e_k = F(F(e_k, E, b_1, \ldots, b_n), E, a_1, \ldots, a_n) = \\ F(F(z_k, \omega\rangle, \langle Z, \Omega\rangle, \langle Z, \beta\rangle), E, a_1, \ldots, a_n) = F(b_k, E, a_1, \ldots, a_n).$$

Пусть $(i_1, \ldots, i_n) = I \in \mathcal{M}^n$ таковы (отметим, что они единственны ввиду невырожденности биформы), что $\langle I, \omega\rangle = (a_1, \ldots, a_n)$. Согласно лемме 3.5, отображение $\langle \cdot, \omega\rangle : \mathcal{M} \to R$ открыто, поэтому I непрерывно зависит от $(a_1, \ldots, a_n)$. Поскольку все $(a_1, \ldots, a_n)$ различны, $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$. Тогда найдется единственный такой $\gamma \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \gamma\rangle = E$. Поскольку, согласно лемме 3.5, отображение $\langle I, \cdot\rangle : \mathcal{N} \to R^n$ открыто, γ непрерывно зависит от I.

Пусть $i \in \mathcal{M}$ таков, что $\langle i, \gamma\rangle = b_k$. Тогда

$$e_k = F(b_k, E, a_1, \ldots, a_n) = F(\langle i, \gamma\rangle, \langle I, \gamma\rangle, \langle I, \omega\rangle) = \langle i, \omega\rangle.$$

Поскольку, с другой стороны, $e_k = \langle z_k, \omega\rangle$ (по заданию e_k), получаем $i = z_k$, то есть $b_k = \langle z_k, \gamma\rangle$. Поскольку биформа раздельно непрерывна, это означает, что b_k непрерывно зависит от γ.

Итак, I непрерывно зависит от $(a_1, \ldots, a_n)$, γ непрерывно зависит от I, а b_k непрерывно зависит от γ. Это означает, что $(b_1, \ldots, b_n)$ непрерывно зависит от $(a_1, \ldots, a_n)$, что, ввиду гомеоморфности N, дает непрерывную зависимость v от u. $\square$

Предложение 3.2. *U является непрерывной группой преобразований множества R.*

Доказательство. U — непрерывная группа, и нам осталось показать, что отображение $U \times R \to R$, соответствующее определяемым функциями из U преобразованиям, непрерывно.

Пусть $u \in U$, $r \in R$. Тогда

$$u(r) = u(\langle (\pi^{\omega})^{-1}(r), \omega \rangle) = \langle (\pi^{\omega})^{-1}(r), V[u] \rangle. \qquad (3.4.1)$$

Оператор $V : U \to \mathcal{N}$ является гомеоморфизмом, поскольку гомеоморфизмами являются отображения $N : U \to \overline{R^n}$ и, как показано в лемме 3.5, $\pi_Z : \mathcal{N} \to \overline{R^n}$, тогда как $V = \pi_Z^{-1} \circ N$. Согласно лемме 3.5, гомеоморфизмом является также отображение $\pi^{\omega} : \mathcal{M} \to R$. $\langle , \rangle$ совместно непрерывна, согласно лемме 3.7. Тогда формула (3.4.1) дает непрерывную зависимость $u(r)$ от u и r. □

Мы сопоставили, таким образом, каждой непрерывной физической структуре $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ ранга $(n+1, 2)$ точно n-транзитивную непрерывную группу преобразований топологического пространства R. Покажем теперь, что можно произвести и обратное сопоставление.

Предложение 3.3. *Пусть n — натуральное число, $n \geq 2$, R — хаусдорфовое недискретное топологическое пространство, содержащее не менее, чем n элементов. Пусть U — точно n-транзитивная непрерывная группа преобразований пространства R, причем, элемент u этой группы, переводящий n-ку $(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{R^n}$ в n-ку $(b_1, \ldots, b_n) \in \overline{R^n}$, непрерывно зависит от $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Обозначим $\mathcal{M} = R$, $\mathcal{N} = \overline{R^n}$ — множество строк длины n с попарно различными элементами из R, с топологией, индуцированной топологией прямого произведения. Введем биформу $\langle , \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ следующим образом. Фиксируем попарно различные элементы $e_1, \ldots, e_n \in R$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$. Пусть $i = (x_1)$, $\alpha = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Сопоставим элементу α преобразование $u_\alpha \in U$, переводящее $e_1, \ldots, e_n$ в $\xi_1, \ldots, \xi_n$, соответственно. Теперь полагаем*

$$\langle i, \alpha \rangle := u_\alpha(x_1).$$

Тогда система $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ *будет удовлетворять аксиомам непрерывной физической структуры ранга* $(n+1, 2)$.

Доказательство. Невырожденность биформы очевидна из построения. Проверим выполнение аксиомы A2". Пусть $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{N}$, $r \in R$. Нам надо найти такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \alpha \rangle = r$. Обозначим $u_\alpha^{-1}(r) = x$, $i = (x)$. Тогда $\langle i, \alpha \rangle = u_\alpha(x) = r$, что и требовалось. Пусть теперь $I \in \mathcal{B}_\mathcal{M}$, $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \overline{R^n}$. Положим $i_k = (x_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Пусть $u \in U$ такова, что $u(x_1) = r_1, \ldots, u(x_n) = r_n$. Обозначим $\alpha = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$. Тогда $u_\alpha = u$, и для $k = 1, \ldots, n$ $\langle i_k, \alpha \rangle = u(x_k) = r_k$.

Проверим теперь выполнение аксиомы T1'. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $i_1, \ldots, i_n \in \mathcal{B}_\mathcal{M}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$. Обозначим $i = (x)$, $i_1 = (x_1), \ldots, i_n = (x_n)$. Нам надо найти такую функцию F, что (при любом выборе $i, i_1, \ldots, i_n, \alpha, \beta$)

$$u_\alpha(x) = F(u_\beta(x), u_\beta(x_1), \ldots, u_\beta(x_n), u_\alpha(x_1), \ldots, u_\alpha(x_n)).$$

Элемент u группы U, переводящий $u_\beta(x_k)$ в $u_\alpha(x_k)$ для всех $k = 1, \ldots, n$, единственен и непрерывно зависит от $u_\beta(x_1), \ldots, u_\beta(x_n), u_\alpha(x_1), \ldots, u_\alpha(x_n)$. При этом, очевидно, $u = u_\alpha \circ u_\beta^{-1}$. Тогда $u_\alpha(x) = u(u_\beta(x))$, и, поскольку U — непрерывная группа преобразований, $u_\alpha(x)$ непрерывно и однозначно зависит от $u_\beta(x), u_\beta(x_1), \ldots, u_\beta(x_n), u_\alpha(x_1), \ldots, u_\alpha(x_n)$, что и дает требуемое. $\square$

Замечание 3.2. Для групп U, заданных в теоремах 3.2, 3.3, условие предложения 3.3 (о непрерывной зависимости функции, переводящей n-ку $(a_1, \ldots, a_n)$ в n-ку $(b_1, \ldots, b_n)$), выполнено.

Доказательство. Для групп линейных и дробно-линейных преобразований это тривиально следует из известных формул, выражающих коэффициенты соответствующих преобразований. Рассмотрим наиболее сложный случай групп G_Γ. Пусть $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{H}$. Рассмотрим преобразование вида $y = a \cdot x \cdot b + c$ из G_Γ, переводящее x_1 в y_1, x_2 в y_2. Получаем

$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)\beta$, откуда, ввиду того, что $|a| = 1$, имеем (см. также [29])

$$\begin{aligned} b &= \gamma(|(y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1)^{-1}|), \\ a &= (y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1)^{-1} \cdot b, \\ c &= y_1 - a \cdot x_1 \cdot b. \end{aligned}$$

Коэффициенты a, b, c, таким образом, непрерывно зависят от x_1, x_2, y_1, y_2, что и дает непрерывную зависимость от них соответствующих элементов U. $\square$

Предложение 3.3 вместе с замечанием 3.2 доказывает замечание 3.1 к теореме 3.4.

3.5 Классификация

Согласно ранее изложенному, U является непрерывной n-транзитивной группой преобразований локально компактного, связного, удовлетворяющего первой аксиоме счетности топологического пространства R, а потому при $n = 2$ и $n = 3$ удовлетворяет условиям теорем 3.3 и 3.2, соответственно.

Поскольку R хаусдорфово и связно, оно бесконечно. Для $n > 3$ не существует (теорема 3.1) точно n-транзитивных групп преобразований бесконечного множества R, поэтому далее нам надо достаточно рассмотреть случаи $n = 2$, $n = 3$.

3.5.1 $n = 2$

Фиксируем для дальнейших выкладок произвольный $\alpha \in \mathcal{N}$. $\langle Z, \alpha \rangle = (\xi_1, \xi_2)$. Обозначим $u = U[\alpha]$. Тогда $N[u] = (\xi_1, \xi_2)$. Как мы отмечали, ранее, из $z_1 \neq z_2$ следует $\xi_1 \neq \xi_2$.

Согласно теореме 3.3, найдется такой гомеоморфизм φ, действующий из R на пространство вещественных чисел, комплексных чисел или кватернионов, что группа преобразований $\varphi U \varphi^{-1}$ является одной из указанных в этой теореме. Заметим, что мы можем без ограничения общности полагать $\varphi(e_1) = 1$, $\varphi(e_2) = 0$. Действительно, если это не так, мы можем взять вместо φ композицию φ с преобразованием из 2-транзитивной группы $\varphi U \varphi^{-1}$, переводящим $\varphi(e_1)$ в 1, а $\varphi(e_2)$ в 0, и требуемое нами условие, а также и все условия теоремы 3.3 будут выполнены.

Рассмотрим сперва случай, когда $\varphi U \varphi^{-1}$ — обычная группа линейных преобразований. Дальнейшие рассуждения никак не зависят от того, будут это линейные преобразования вещественных чисел, комплексных чисел или кватернионов. Положим для определенности, что речь идет о кватернионах $\mathbb{H}$. Тогда φ — гомеоморфизм $R \to \mathbb{H}$. Фиксированной нами функции u сопоставляется преобразование $\varphi u \varphi^{-1}$ вида $y(x) = a \cdot x + b$ из $\varphi U \varphi^{-1}$, где a, b — некоторые фиксированные элементы $\mathbb{H}$, $a \neq 0$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\langle i, \omega \rangle = r$. Тогда $u(r) = \varphi^{-1}(a \cdot \varphi(r) + b)$, что можно, пользуясь определением r и u, переписать как

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}(a \cdot \varphi(\langle i, \omega \rangle) + b). \tag{3.5.1}$$

Подставляя сюда поочередно $i = z_1$, $i = z_2$ и пользуясь тем фактом, что $\varphi(e_1) = 1$, $\varphi(e_2) = 0$, получаем, соответственно, $\xi_1 = \varphi^{-1}(a + b)$ и $\xi_2 = \varphi^{-1}(b)$. Отсюда сразу следует, что $b = \varphi(\xi_2)$, $a = \varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)$. Фиксируем i и обозначим $\langle i, \omega \rangle = x_1$. Подставляя найденные выражения для a и b в равенство (3.5.1), получаем требуемое

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}((\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)) \cdot \varphi(x_1) + \varphi(\xi_2)).$$

Рассмотрим случай, когда $\varphi U \varphi^{-1} = G_\Gamma$. Тогда функции u сопоставляется преобразование вида $y(x) = a \cdot x \cdot b + c$, где a, b, c — фиксированные элементы $\mathbb{H}$, $|a| = 1$, $b \in \Gamma$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\langle i, \omega \rangle = r$. Тогда $u(r) = \varphi^{-1}(a \cdot r \cdot b + c)$, откуда

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}(a \cdot \varphi(\langle i, \omega \rangle) \cdot b + c). \tag{3.5.2}$$

Подставляя сюда поочередно $i = z_1$, $i = z_2$, получаем, соответственно, $\xi_1 = \varphi^{-1}(a \cdot b + c)$, $\xi_2 = \varphi^{-1}(c)$. Отсюда $c = \varphi(\xi_2)$, $b = \gamma(|\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)|)$

(мы пользуемся тем, что $|a| = 1$ и что существует только один элемент Γ с фиксированной нормой), $a = (\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)) \cdot b^{-1}$. Фиксируя $i \in \mathcal{M}$, обозначая $\langle i, \omega \rangle = x_1$ и подставляя выражения для a, b, c в равенство (3.5.2), получаем требуемое.

3.5.2 $n = 3$

Фиксируем для дальнейших выкладок произвольный $\alpha \in \mathcal{N}$. $\langle Z, \alpha \rangle = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Обозначим $u = U[\alpha]$. Тогда $N[u] = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Как и ранее, ξ_1, ξ_2 и ξ_3 должны быть попарно различны.

Найдется такой гомеоморфизм φ, действующий из R на вещественную или комплексную проективную прямую, что группа преобразований $\varphi U \varphi^{-1}$ является группой дробно-линейных преобразований . Дальнейшие рассуждения никак не различаются для вещественного и комплексного случая. Для определенности будем считать, что мы имеем дело с последним. Комплексную проективную прямую далее будем обозначать как $CP_1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Повторяя рассуждения случая $n = 2$, мы можем без ограничения общности полагать $\varphi(e_1) = 0$, $\varphi(e_2) = 1$, $\varphi(e_3) = \infty$.

Фиксированной нами функции u сопоставляется преобразование вида $y(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ из $\varphi U \varphi^{-1}$, где a, b, c, d — некоторые фиксированные элементы $\mathbb{C}$, $ac - bd \neq 0$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\langle i, \omega \rangle = r$. Тогда $u(r) = \varphi^{-1}(\frac{ar+b}{cr+d})$, откуда

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1} \left(\frac{a\varphi(\langle i, \omega \rangle) + b}{c\varphi(\langle i, \omega \rangle) + d} \right). \qquad (3.5.3)$$

Подставляя сюда поочередно $i = z_1$, $i = z_2$, $i = z_3$, получаем, соответственно, $\varphi(\xi_1) = \frac{b}{d}$, $\varphi(\xi_2) = \frac{a+c}{b+d}$, $\varphi(\xi_3) = \frac{a}{c}$. Это означает, что преобразование $y(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ переводит упорядоченную тройку элементов 0, 1, ∞ в тройку $\varphi(\xi_1)$, $\varphi(\xi_2)$, $\varphi(\xi_3)$. Фиксируя $i \in \mathcal{M}$, обозначая $\langle i, \omega \rangle = x_1$ и подставляя выражения для a, b, c, d в равенство (3.5.3), получаем требуемое.

Приложение 1. Канонические примеры непрерывных физических структур

Рассмотрим далее некоторые многоосновные алгебраические системы $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$, и покажем, что они будут удовлетворять аксиомам невырожденности биформы, Т1, Т2, Т3, А2', А3 и А6 непрерывной физической структуры. Отметим, что в этом случае они будут удовлетворять и аксиомам А1, А2, А3, А4, А5. Действительно, аксиома А2' тривиально следует из А2 , а А1 — из Т1, причем, топологические свойства R используются только для доказательства непрерывности функции F в аксиоме Т1, которая не используется при получении из нее А1. Аксиомы же А4 и А5, как было показано в главе 1, следуют из А1 и А6.

Не упоминаемые нами условия, необходимые для того, чтобы $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ была непрерывной физической структурой, есть условия на топологию R. Они выполняются, например, если R — топологическое тело вещественных чисел, комплексных чисел, кватернионов или p-адических чисел.

Матрицы и линейные уравнения над телом

Приведем используемые нами в дальнейших сведения о матрицах и линейных уравнениях над телами, содержащиеся в [2] (или являющиеся тривиальными следствиями доказываемых там утверждений).

Теорема 4.1. *Пусть A — матрица размера $n \times n$ над телом F. Следующие три утверждения эквивалентны.*

1. *A обратима (относительно матричного умножения).*
2. *Строки A линейно независимы слева (то есть независимы как элементы линейного пространства строк длины n над F).*
3. *Столбцы A линейно независимы справа.*

Теорема 4.2. *1. Пусть дана система n линейных (справа) уравнений над телом F*

$$\sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l = b_k, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Если ее матрица $A = (a_{kl})$ обратима, то система имеет единственное решение $x = A^{-1}b$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ — матрицы-столбцы размера $n \times 1$.

2. Пусть дана система n линейных (слева) уравнений над телом F

$$\sum_{l=1}^{n} x_l a_{lk} = b_k, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Если ее матрица $A = (a_{kl})$ обратима, то система имеет единственное решение $x = bA^{-1}$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ — матрицы-строки размера $1 \times n$.

Следствие 4.1. *Если строки (столбцы) матрицы системы k линейных справа (соответственно, слева) уравнений с n неизвестными независимы, то система разрешима.*

Доказательство. Из условия следует, что $k \leq n$. Дополним при необходимости набор строк (столбцов) матрицы нашей системы до базиса n-мерного модуля, и дополним систему соответствующими уравнениями (правые части берем произвольно). По теореме 4.2 новая система будет разрешима, а значит, будет разрешима и исходная система. $\square$

Обобщенное матричное умножение

Далее нам потребуются некоторые дополнительные сведения об обобщенном матричном умножении. В этом пункте излагаются результаты А. А. Симонова [24] и их тривиальные следствия. Фиксируем базы $Z \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $\Omega \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$. Пусть уже известно, что для системы $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ выполняются аксиомы А2', А6, из которых следует биективность отображений

$\langle Z, \cdot\rangle : \mathcal{N} \to R^n$, $\langle \cdot, \Omega\rangle : \mathcal{M} \to R^m$. Тогда мы можем ввести обобщенное матричное умножение как в разделе 2.4:

$$\langle i, \Omega\rangle * \langle Z, \alpha\rangle = \langle i, \alpha\rangle,$$

где $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$, $\langle i, \Omega\rangle$ — матрица строка длины m, $\langle Z, \alpha\rangle$ — матрица-столбец высоты n. Так же, как в разделе 2.4, вводится и обобщенное умножение произвольных матриц размера $n \times m$ с элементами из R. Как сразу следует из определения, $E^* = \langle Z, \Omega\rangle$ будет являться единичным элементом относительно такого умножения.

Пусть $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$. Мы можем построить по I матрицу $\mathcal{B}_I$ размера $n \times m$) следующим образом: выпишем друг под другом n строк длины m, соответствующих элементам $i_1, \ldots, i_n$. Обозначим $\bar{\mathcal{B}}^n_{\mathcal{M}} = \{\mathcal{B}_I \mid I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}\} = \langle \mathcal{B}_{\mathcal{M}}, \Omega\rangle$. Аналогично, для каждой базы $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ можно определить матрицу $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$ размера $n \times m$, состоящую из m последовательно выписанных столбцов, соответствующих элементам базы, и построить множество $\bar{\mathcal{B}}^m_{\mathcal{N}} = \{\mathcal{B}_{\mathfrak{A}} \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}\} = \langle Z, \mathcal{B}_{\mathcal{N}}\rangle$. Далее в этом пункте мы будем предполагать выполненным следующее условие:

$$\bar{\mathcal{B}}^n_{\mathcal{M}} = \bar{\mathcal{B}}^m_{\mathcal{N}} \tag{4.0.1}$$

Обозначим $\bar{\mathcal{B}}^n_{\mathcal{M}} = \bar{\mathcal{B}}^m_{\mathcal{N}} = \mathcal{B}$.

Как было указано в разделе 2.4, для матриц из $\mathcal{B}$ будет существовать левый и правый обратный относительно обобщенного матричного умножения (матрицы размера $n \times m$, не обязательно лежащая в $\mathcal{B}$). Там же был рассмотрен способ их построения.

Далее будем предполагать также, что множество $\mathcal{B}$ замкнуто относительно относительно обобщенного матричного умножения и взятия обратного. (Отметим, что в этом случае $\mathcal{B} = \langle \mathcal{B}_{\mathcal{M}}, \mathcal{B}_{\mathcal{N}}\rangle$, поскольку $\langle \mathcal{B}_{\mathcal{M}}, \mathcal{B}_{\mathcal{N}}\rangle = \langle \mathcal{B}_{\mathcal{M}}, \Omega\rangle * \langle Z, \mathcal{B}_{\mathcal{N}}\rangle = \mathcal{B} * \mathcal{B}$). В [24] (см. также раздел 2.4) показано, что если потребовать еще выполнение аксиомы T1 (не требуя непрерывности F), $\mathcal{B}$ будет группой. Можно показать и обратное: при замкнутости $\mathcal{B}$ в указанном смысле, выполнении аксиомы А2 и равенства (4.0.1) из ассоциативности обобщенного матричного умножения следует выполнение аксиомы Т1 (без утверждения о непрерывности F). Действительно, достаточно взять, как и в формуле (2.4.2),

$$F(x, Y, z) = (x) * (Y)^{-1} * (z),$$

после чего доказательство алгебраической части аксиомы Т1 проводится так же, как в разделе 2.4.

Структура $\mathbf{A_n(R)}$

Пусть R — недискретное хаусдорфовое топологическое тело (обозначаем за e единицу R, за O ноль R). $\mathcal{M}$ — левое векторное пространство строк длины n над R, $\mathcal{N}$ — правое векторное пространство строк длины n над R. Для строк $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ полагаем

$$\langle x, \xi \rangle = x_1 \cdot \xi_1 + \ldots + x_n \cdot \xi_n. \tag{4.0.2}$$

Невырожденность этой биформы очевидна. За множество $\mathcal{B}$ возьмем множество всех обратимых матриц размера $n \times n$. Определим далее множества баз $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$. Будем полагать, что набор $(i_1, \ldots, i_n)$ элементов $\mathcal{M}$ лежит в $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, если матрица, составленная из n соответствующих им строк, лежит в $\mathcal{B}$. Аналогично, будем полагать, что набор элементов $\mathcal{N}$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ лежит в $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, если матрица, составленная из n соответствующих им столбцов высоты n, лежит в $\mathcal{B}$. Тогда условие (4.0.1) выполняется по построению. Положим $z_1 = (e, O, \ldots, O), \ldots, z_n = (O, \ldots, O, e)$. Положим $\omega_1 = (e, O, \ldots, O), \ldots, \omega_n = (O, \ldots, O, e)$. Легко видеть, что такой выбор баз $(z_1, \ldots, z_n) = Z \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \Omega \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, является единственным, при котором отображения $\langle Z, \cdot \rangle$ и $\langle \cdot, \Omega \rangle$ будут тождественными (то есть оставлять соответствующую строку неизменной).

Проверим выполнение аксиом физической структуры для $A_n(R)$. Утверждение аксиомы А2 выполняется тривиально. Утверждение аксиомы А3 следует из следствия 4.1 теоремы 4.2. Утверждение аксиомы A6 тривиально. Аксиома T1 теперь следует из ассоциативности и непрерывности матричного умножения и непрерывности операции обращения матрицы. Утверждения T2 и T3 доказываются несколько более громоздко. При этом, несмотря на очевидное существование таких доказательств в литературе, автору не удалось найти на них ссылку. Поэтому доказательство данных утверждений приводится в приложении 2 (леммы 5.1 и 5.2) для полноты изложения.

Отметим, наконец, что для данной структуры выполняется утверждение аксиомы A0 (в качестве z_0, ω_0 берутся нули соответствующих векторных пространств).

Структура $\mathbf{B_n(R)}$

R — недискретное хаусдорфовое топологическое тело (обозначаем за e единицу R, за O ноль R). $\mathcal{M}$ — левое векторное пространство строк длины $n+1$ над R, $\mathcal{N}$ — правое векторное пространство строк длины n над R. Для строк $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ полагаем

$$\langle x, \xi \rangle = (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 + \ldots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n + x_{n+1} \tag{4.0.3}$$

Невырожденность этой биформы очевидна. Зададим теперь множество $\mathcal{B} \subseteq R^{n \times (n+1)}$ матриц размера $n \times (n+1)$ следующими условиями. Матрица A размера $n \times (n+1)$ лежит в $\mathcal{B}$ в том и только том случае, если квадратная матрица $(n+1) \times (n+1)$, получающаяся из A добавлением состоящей из единиц e тела R последней строки, также обратима. Будем теперь говорить, что набор элементов $\mathcal{M}$ $(i_1, \ldots, i_n)$ лежит в $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, если матрица, составленная из n соответствующих им строк, лежит в $\mathcal{B}$. Аналогично, будем говорить, что набор элементов $\mathcal{N}$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ лежит в $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, если матрица, составленная из $n+1$ соответствующих им столбцов высоты n, лежит в $\mathcal{B}$. Тогда условие (4.0.1) выполняется по построению. Положим $z_1 = (e, O, \ldots, O)$, $z_2 = (O, e, O, \ldots, O)$,..., $z_n = (O, \ldots, O, e, O)$.

Положим $\omega_1 = (e, O, \dots, O)$, $\omega_2 = (O, e, O, \dots, O)$,..., $\omega_n = (O, \dots, O, e)$, $\omega_{n+1} = (O, \dots, O)$. Легко видеть, что такой выбор баз $(z_1, \dots, z_n) = Z \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $(\omega_1, \dots, \omega_{n+1}) = \Omega \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, является единственным, при котором отображения $\langle Z, \cdot \rangle$ и $\langle \cdot, \Omega \rangle$ будут тождественными (то есть оставлять соответствующую строку неизменной).

Покажем теперь, что для любой матрицы $A \in \mathcal{B}$ матрица $\bar{A}$, получающаяся из A удалением последнего столбца и вычитанием его из всех остальных, обратима. Обозначим обратимую матрицу, получающуюся из A добавлением последней строки из элементов e, за $\tilde{A}$. Рассмотрим матрицу $\tilde{A}'$, получающуюся из $\tilde{A}$ вычитанием последнего столбца из всех остальных. Поскольку $\tilde{A}'$ получается из обратимой матрицы $\tilde{A}$ элементарными преобразованиями столбцов, она будет обратима. Последняя строка матрицы $\tilde{A}'$ будет при этом иметь вид $(O, \dots, O, e)$. Отсюда, ввиду эквивалентности обратимости квадратных матриц над телом левой линейной независимости их строк (теорема 4.1), сразу следует, что обратима и матрица размера $(n-1) \times (n-1)$, стоящая в левом верхнем углу $\tilde{A}'$, которая, как видно из построения, совпадает с $\bar{A}$. Обращая это построение,получаем и обратное утверждение — если $\bar{A}$ обратима, то обратима и $\tilde{A}$. Обратимость $\bar{A}$ и $\tilde{A}$ можно, таким образом, рассматривать как эквивалентные условия, задающие множество $\mathcal{B}$.

Ассоциативность обобщенного матричного умножения

Покажем, что выполнена ассоциативность обобщенного матричного умножения. Для этого проверим ее выполнение прямыми вычислениями. Пусть $A = (a_{pq})$, $B = (b_{pq})$, $C = (c_{pq})$ — матрицы $n \times (n+1)$. Тогда

$$(A * B)_{pq} = \sum_{k=1}^{n} (a_{pk} - a_{pn+1}) b_{kq} + a_{pn+1}.$$

Теперь получаем

$((A * B) * C)_{pq} =$

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_{pk}-a_{pn+1})b_{kl}+a_{pn+1}-\sum_{k=1}^{n}(a_{pk}-a_{pn+1})b_{kn+1}-a_{pn+1}\right)c_{lq}+$$

$$(\sum_{k=1}^{n}(a_{pk}-a_{pn+1})b_{kn+1}+a_{pn+1})=$$

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{pk}-a_{pn+1})(b_{kl}-b_{kn+1})c_{lq}+\sum_{k=1}^{n}(a_{pk}-a_{pn+1})b_{kn+1}+a_{pn+1}.$$

С другой стороны,

$$(A*(B*C))_{pq}=$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{pk}-a_{pn+1})(\sum_{l=1}^{n}(b_{kl}-b_{kn+1})c_{lq}+b_{kn+1})+a_{pn+1}=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_{pk}-a_{pn+1})(b_{kl}-b_{kn+1})c_{lq}+\sum_{k=1}^{n}(a_{pk}-a_{pn+1})b_{kn+1}+a_{pn+1}.$$

Отсюда следует $((A*B)*C)=(A*(B*C))$ — ассоциативность доказана.

Аксиома А2'

Покажем, что выполнено условие аксиомы А2' с требованием единственности (аксиома А6). Пусть $I=(i_1,\ldots,i_n)\in\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $r=(r^1,\ldots,r^n)\in R^n$. Нам надо найти $\alpha\in\mathcal{N}$, такой, что $\langle I,\alpha\rangle=r$. Обозначим $\langle Z,\alpha\rangle=(\xi^1,\ldots,\xi^n)$, $\langle i_k,\Omega\rangle=(i_k^1,\ldots,i_k^{n+1})$, $k=1,\ldots,n$. Нам достаточно найти $\xi^1,\ldots,\xi^n\in R$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{lcl}(i_1^1-i_1^{n+1})\cdot\xi^1+\ldots+(i_1^n-i_1^{n+1})\cdot\xi^n+i_1^{n+1}&=&r^1\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ (i_n^1-i_n^{n+1})\cdot\xi^1+\ldots+(i_n^n-i_n^{n+1})\cdot\xi^n+i_n^{n+1}&=&r^n\end{array}\right.\tag{4.0.4}$$

Поскольку, согласно построению $\mathcal{B}$, матрица этой системы обратима, то в силу теорем 4.1, 4.2 система однозначно разрешима. Ее решение задает нужный нам элемент α.

Пусть теперь $\mathfrak{A}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})\in\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, $r=(r^1,\ldots,r^{n+1})$. Нам надо найти $i\in\mathcal{M}$, такой, что $\langle i,\mathfrak{A}\rangle=r$. Обозначим $\langle i,\Omega\rangle=(x^1,\ldots,x^{n+1})$,

$\langle Z, \alpha_k = (a_k^1, \ldots, a_k^n)$, $k = 1, \ldots, n$. Обозначим матрицу $\langle Z, \mathfrak{A} \rangle = A$. Ввиду биективности отображения $\langle \cdot, \Omega \rangle$, нам достаточно найти $x^1, \ldots, x^{n+1} \in R$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x^1 - x^{n+1}) \cdot a^1 + \ldots + (x^n - x^{n+1}) \cdot \ a^n + x^{n+1} & = & r^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x^1 - x^{n+1}) \cdot a_{n+1}^1 + \ldots + (x^n - x^{n+1}) \cdot a_{n+1}^n + x^{n+1} & = & r^{n+1} \end{array} \right. \tag{4.0.5}$$

Вводя новые переменные $\bar{x}^k = x^1 - x^k$, $k = 1, \ldots, n$, $\bar{x}^{n+1} = x^{n+1}$, получаем систему

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}^1 \cdot a_1^1 + \ldots + \bar{x}^n \cdot a_1^n + \bar{x}^{n+1} & = & r^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{x}^1 \cdot a_{n+1}^1 + \ldots + \bar{x}^n \cdot a_{n+1}^n + \bar{x}^{n+1} & = & r^{n+1} \end{array} \right. \tag{4.0.6}$$

Матрица этой системы, рассматриваемая как в теореме 4.2, будет совпадать с матрицей A, к которой приписана снизу строка единиц. Тогда она обратима, откуда следует однозначная разрешимость системы (4.0.6) относительно переменных $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{n+1}$. По значениям этих переменных, очевидно, однозначно восстанавливаются значения $x^1, \ldots, x^{n+1}$, которые задают нужный нам элемент i.

Свойства обратных матриц и аксиома T1

Как отмечалось выше, из аксиомы A2' с требованием единственности следует существование правой и левой обратных относительно обобщенного матричного умножения для матриц из $\mathcal{B}$; из доказанной ассоциативности обобщенного матричного умножения следует их равенство. Отметим, что решения систем уравнений (4.0.4), (4.0.6), получаясь домножением правых частей на матрицы этих систем, непрерывно зависят от того и другого, то есть, при фиксированном r, непрерывно зависят от набора координат элементов $\mathfrak{A}$ (это сразу дает и непрерывную зависимость от них решения системы (4.0.5)). Отсюда следует, согласно указанному нами построению, что элементы матрицы, обратной к A относительно обобщенного матричного умножения, непрерывно зависят от элементов A.

Следующее утверждение, ввиду наличие ссылки на него в основном тексте, сформулируем как лемму.

Лемма 4.1. *Для структуры $B_n(R)$ множество матриц $n \times m$, обратимых по обобщенному умножению слева, совпадает с множеством матриц $n \times m$, обратимых по обобщенному умножению справа, и в точности равно $\mathcal{B}$.*

Доказательство. Пусть $A \in R^{nm}$ обратима справа в смысле обобщенного умножения, $B \in R^{nm}$ такова, что $A * B = E^*$. Обозначим за $\bar{A}'$ матрицу, получающуюся из A добавлением последней строки из единиц и, далее, вычитанием последнего столбца из всех остальных, за $\bar{B}$ — матрицу, получающуюся из B добавлением последней строки из единиц. Из построения очевидно, что

$$\bar{A}' \cdot \bar{B} = \bar{E}^*, \tag{4.0.7}$$

где $\bar{E}$ — матрица, получающаяся из $A * B = E = \langle Z, \Omega \rangle$ добавлением последней строки из единиц. Матрица $\bar{E}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} e & O & \dots & O & O \\ O & e & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & e & O \\ e & e & \dots & e & e \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу $\bar{B}'$, получающуюся из матрицы $\bar{B}$ вычитанием последнего столбца из всех остальных. Это действие является композицией элементарных преобразований столбцов, и потому может быть задано домножением справа на некоторую матрицу T, являющуюся произведением соответствующих матриц элементарных преобразований: $\bar{B}' = \bar{B} \cdot T$. Применяя те же преобразования к $\bar{E}^*$, получим единичную матрицу E, поэтому $\bar{E}^* \cdot T = E$. Теперь, домножая справа на T обе части равенства (4.0.7), имеем

$$\bar{A}' \cdot \bar{B}' = E. \tag{4.0.8}$$

Отсюда следует, что $\bar{A}'$ обратима в обычном смысле, что означает $A \in \mathcal{B}$.

Если мы теперь рассмотрим произвольную матрицу $B \in R^{nm}$, обратимую слева в смысле обобщенного умножения, и если A есть ее обратная, то есть $A * B = E^*$, то мы, как и выше, получим, что выполняется равенство (4.0.8), из которого будет следовать, что $\bar{B}'$ обратима, и $B \in \mathcal{B}$.

Тот же факт, что все матрицы из $\mathcal{B}$ обратимы слева и справа, был доказан выше. $\square$

Из леммы 4.1 автоматически следует замкнутость множества $\mathcal{B}$ относительно взятия обратного по обобщенному умножению. Поскольку при ассоциативности умножения произведение обратимых элементов является обратимым элементом, мы получаем из леммы 4.1 также, что множество $\mathcal{B}$ замкнуто относительно обобщенного матричного умножения.

Мы получаем теперь, что выполнены все условия, необходимые для существования функции F, определенной формулой (2.4.2). При этом F непрерывна, поскольку непрерывна операция взятия обратной матрицы и, очевидно из формулы (2.4.1), обобщенного умножения матриц. Таким образом, аксиома T1 выполнена.

Аксиома A3

Покажем выполнение условия аксиомы A3. Изучим сперва свойства зависимости на множестве $\mathcal{M}$. Пусть $i_1, \ldots, i_k$ — элементы $\mathcal{M}$, $i \in [i_1, \ldots, i_k]$. Обозначим $i_p = (i_p^1, \ldots, i_p^{n+1})$, $p = 1, \ldots, k$; $i = (i^1, \ldots, i^{n+1})$. Согласно определению зависимости, для любых α, β из $\langle i_p, \alpha \rangle = \langle i_p, \beta \rangle$ для всех $p = 1, \ldots, k$ следует $\langle i, \alpha \rangle = \langle i, \beta \rangle$. Обозначим $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$. Тогда зависимость $i \in [i_1, \ldots, i_k]$ будет означать, что для любых $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in R$ из выполнения для всех $p = 1, \ldots, k$ равенств

$$(i_p^1 - i_p^{n+1}) \cdot a_1 + \ldots + (i_p^n - i_p^{n+1}) \cdot a_n + i_p^{n+1} = (i_p^1 - i_p^{n+1}) \cdot b_1 + \ldots + (i_p^n - i_p^{n+1}) \cdot b_n + i_p^{n+1} \tag{4.0.9}$$

следует равенство

$$(i^1-i^{n+1})\cdot a_1+\ldots+(i^n-i^{n+1})\cdot a_n+i^{n+1}=(i^1-i^{n+1})\cdot b_1+\ldots+(i^n-i^{n+1})\cdot b_n+i^{n+1}. \tag{4.0.10}$$

Положим теперь $\overline{i}=(i^1-i^{n+1},\ldots,i^n-i^{n+1})$ (строка длины n с элементами из R), и аналогично для каждого $p=1,\ldots,k$ будет $\overline{i}_p=(i_p^1-i_p^{n+1},\ldots,i_p^n-i_p^{n+1})$. Будем теперь считать строки $\overline{i},\overline{i}_1,\ldots,\overline{i}_k$ элементами пространства $\mathcal{M}$ физической структуры $A_n(R)$, а строки α, β — элементами пространства $\mathcal{N}$ этой структуры, с биформой, заданной формулой (4.0.2). Тогда, сокращая последний член в левых и правых частях равенств (4.0.9), (4.0.10), получаем, что в $A_n(R)$ выполнена зависимость (согласованная с определенной в $A_n(R)$ биформой) $\overline{i}\in[i_1',\ldots,i_k']$. Обратно, если для некоторых $\overline{i},\overline{i}_1,\ldots,\overline{i}_k\in\mathcal{M}$ в структуре $A_n(R)$, где $\overline{i}=(\overline{i}^1-\overline{i}^{n+1},\ldots,\overline{i}^n-\overline{i}^{n+1})$, $\overline{i}_p=(\overline{i}_p^1-\overline{i}_p^{n+1},\ldots,\overline{i}_p^n-\overline{i}_p^{n+1})$, $p=1,\ldots,k$, верно $\overline{i}\in[\overline{i}_1,\ldots,\overline{i}_k]$ в $A_n(R)$, то для строк $i,i_1,\ldots,i_k$ длины $n+1$, рассматриваемых как элементы пространства $\mathcal{M}$ структуры $B_n(R)$ и заданных формулами

$$\begin{aligned} i &= (\overline{i}^1+i^{n+1},\ldots,\overline{i}^n+i^{n+1},i^{n+1}),\\ \overline{i}_p &= (\overline{i}_p^1+i_p^{n+1},\ldots,\overline{i}_p^n+i_p^{n+1},i_p^{n+1}), \quad p=1,\ldots,k, \end{aligned}$$

где $i^{n+1},i_1^{n+1},\ldots,i_k^{n+1}$ — произвольные элементы R, выполнено $i\in[i_1,\ldots,i_k]$ в $B_n(R)$. Теперь, если мы рассматриваем независимые элементы $i_1,\ldots,i_k$ в пространстве $\mathcal{M}$ структуры $B_n(R)$, элементы $\overline{i}_1,\ldots,\overline{i}_k$ пространства $\mathcal{M}$ структуры $A_n(R)$, получаемые по ранее заданным формулам, также будут независимы, так как зависимость в $A_n(R)$ влекла бы зависимость в $B_n(R)$. Если теперь у нас есть произвольные элементы $r_1,\ldots,r_k\in R$, мы можем, согласно ранее доказанному выполнению аксиомы A3 для $A_n(R)$, построить такую строку $\alpha=(a_1,\ldots,a_n)$ с элементами из R, что для всех $p=1,\ldots,k$ $\langle\overline{i}_p,\alpha\rangle=r_p-i_p^{n+1}$, где биформа задана формулой (4.0.3). Отсюда для биформы, заданной формулой (4.0.3) в структуре $B_n(R)$, сразу следует требуемое $\langle i_p,\alpha\rangle=r_p$, $p=1,\ldots,k$, где $\alpha=(a_1,\ldots,a_n)$ — строка из пространства $\mathcal{N}$ структуры $B_n(R)$. Тем самым первая часть аксиомы А3 проверена.

Пусть теперь $\alpha_1, , \ldots, \alpha_k$ — независимые элементы $\mathcal{N}$, $\alpha_p = (a_p^1, \ldots, a_p^n)$, $p = 1, \ldots, k$. Рассмотрим строки $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k$ длины $n+1$, получающиеся из $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, соответственно, приписыванием e в конец. Будем рассматривать их как элементы пространства $\mathcal{N}$ физической структуры $A_{n+1}(R)$. Покажем, что, рассматриваемые как элементы этого пространства, $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k$ будут независимы. Предположим противное. Как было показано нами в предложении 1.16, в $A_{n+1}(R)$ зависимость эквивалентна линейной зависимости, и потому зависимость $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k$ означает, что все они являются линейными комбинациями каких-нибудь $k-1$ из них. Без ограничения общности можем считать, что $\bar{\alpha}_k \in [\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{k-1}]$. Пусть теперь $i = (i^1, \ldots, i^{n+1})$, $j = (j^1, \ldots, j^{n+1})$ — строки длины $n+1$, рассматриваемые как элементы пространства $\mathcal{M}$ структуры $A_{n+1}(R)$. Обозначим $\bar{i} = (i^1 + i^{n+1}, \ldots, i^n + i^{n+1}, i^{n+1})$, $\bar{j} = (j^1 + j^{n+1}, \ldots, j^n + j^{n+1}, j^{n+1})$ Согласно определению зависимости, из $\langle i, \alpha_p \rangle = \langle j, \alpha_p \rangle$, $p = 1, \ldots, k-1$, следует, что $\langle i, \alpha_k \rangle = \langle j, \alpha_k \rangle$. Согласно формуле (4.0.2) для биформы в $A_{n+1}(R)$, это означает, что из

$$i^1 \cdot a_p^1 + \ldots + i^n \cdot a_p^n + i^{n+1} \cdot e = j^1 \cdot a_p^1 + \ldots + j^n \cdot a_p^n + j^{n+1} \cdot e, \quad p = 1, \ldots, k \quad (4.0.11)$$

следует

$$i^1 \cdot a_k^1 + \ldots + i^n \cdot a_k^n + i^{n+1} \cdot e = j^1 \cdot a_k^1 + \ldots + j^n \cdot a_k^n + j^{n+1} \cdot e. \quad (4.0.12)$$

Рассмотрим теперь строки $\bar{i}$, $\bar{j}$ как элементы пространства $\mathcal{M}$ физической структуры $B_n(R)$. Тогда, беря биформу в соответствии с формулой (4.0.3), получаем для $p = 1, \ldots, k$

$$\langle \bar{i}, \alpha_p \rangle = (i^1 + i^{n+1} - i^{n+1}) \cdot a_p^1 + \ldots + (i^n + i^{n+1} - i^{n+1}) \cdot a_p^n + i^{n+1},$$

то есть $\langle \bar{i}, \alpha_p \rangle$ равно левой части равенства (4.0.11). Аналогично $\langle \bar{j}, \alpha_p \rangle$ рано правой части равенства (4.0.11), $\langle \bar{i}, \alpha \rangle$ равно левой части равенства (4.0.12),

$\langle \bar{j}, \alpha \rangle$ равно правой части равенства (4.0.12). Нам было известно, что из равенств (4.0.11) следует (4.0.12) при любых строках i, j длины $n+1$. Тогда и для любых $\bar{i}, \bar{j} \in R^{n+1}$ из $\langle \bar{i}, \alpha_p \rangle = \langle \bar{j}, \alpha_p \rangle$ для всех $p = 1, \ldots, k-1$ следует $\langle \bar{i}, \alpha_k \rangle = \langle \bar{j}, \alpha_k \rangle$. А это означает зависимость $\alpha_k \in [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ в пространстве $\mathcal{N}$ физической структуры $B_n(R)$, что противоречит ранее предположенной нами независимости в нем $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Итак, мы доказали, что $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k$ независимы в пространстве $\mathcal{N}$ структуры $A_{n+1}(R)$.

Пусть теперь $r = (r^1, \ldots, r^k) \in R^k$. Тогда, согласно доказанному выполнению аксиомы А3 для этой структуры, найдется такая строка $i = (i^1, \ldots, i^{n+1})$, что в структуре $A_n(R)$

$$\langle i, \alpha_p \rangle = i^1 \cdot a^1 + \ldots + i^n \cdot a^n + i^{n+1} \cdot e = r^p, \quad p = 1, \ldots, k. \tag{4.0.13}$$

Возьмем теперь строку $\bar{i} = (i^1 + i^{n+1}, \ldots, i^n + i^{n+1}, i^{n+1}) = (\bar{i}^1, \ldots, \bar{i}^{n+1}) \in R^{n+1}$. Будем считать ее элементом пространства $\mathcal{M}$ структуры $B_n(R)$. Подставляя тривиальные равенства $i^p = \bar{i}^p - \bar{i}^{n+1}$, $p = 1, \ldots, k$, $i^{n+1} = \bar{i}^{n+1}$ в формулы (4.0.13), получаем требуемое в условии аксиомы А3 $\langle \bar{i}, \alpha_p \rangle = r^p$ для всех $p = 1, \ldots, k$ с некоторым $\bar{i} \in \mathcal{M}$. Утверждение аксиомы А3 доказано.

Аксиомы Т2 и Т3

Покажем выполнение аксиомы Т2. Пусть U — некоторое непустое открытое подмножество множества матриц размера $n+1 \times n$, A — некоторая матрица из U. Обозначим за U' множество матриц из U, чей последний столбец совпадает с последним столбцом A, за $\tilde{U}$ — множество матриц размера $n \times n$, получающихся из матриц множества U' отбрасыванием последнего столбца. Согласно заданию топологии прямого произведения, $\tilde{U}$ открыто в R^{n^2}. Поскольку $A \in U'$, оно непусто.

Рассмотрим теперь преобразование $T : R^{n^2} \to R^{n^2}$, сопоставляющее каждой матрице $n \times n$ матрицу, из каждого столбца которой вычтен последний столбец матрицы A. Очевидно, оно является гомеоморфизмом.

Поэтому если G — множество всех обратимых матриц $n \times n$ (которое всюду плотно в R^{n^2} по лемме 5.1), то множество $T^{-1}(G)$ также всюду плотно. Тогда найдется матрица $\tilde{B} \in T^{-1}(G) \cap \tilde{U}$. Обозначим за B матрицу, получающуюся приписыванием к $\tilde{B}$ последнего столбца матрицы A. Тогда $B \in U$. С другой стороны, матрица, получающаяся из B отбрасыванием ее последнего столбца и вычитанием его из остальных, обратима, что означает, что $B \in \mathcal{B}$. Таким образом, каждое непустое открытое множество в $R^{(n+1)\times n}$ пересекается с $\mathcal{B}$ (в рассмотренном случае в пересечении лежит матрица B), что и дает требуемую всюду плотность $\mathcal{B}$ в $R^{(n+1)\times n}$.

Покажем выполнение аксиомы T3. Рассмотрим отображение $S : R^{(n+1)\times n} \to R^{n\times n}$, сопоставляющее каждой матрице $(n+1) \times n$ матрицу, получающуюся из нее вычитанием последнего столбца из всех остальных и его отбрасыванием. Очевидно, S непрерывно. Согласно лемме 5.2, в множестве обратимых матриц размера $n \times n$ найдется открытое подмножество U, тогда его прообраз $S^{-1}(U)$ будет нужным нам множеством.

Структура $\mathbf{C_n}(\mathbf{R})$

Пусть R — недискретное хаусдорфовое топологическое тело с нулем O и единицей e. $\mathcal{M}$ — левое векторное пространство строк длины $n+1$ над R, $\mathcal{N}$ — правое векторное пространство строк длины $n+1$ над R. Для строк $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ полагаем

$$\langle x, \xi \rangle = (x_1 - x_n) \cdot (\xi_1 - \xi_n) + \dots + (x_{n-1} - x_n) \cdot (\xi_{n-1} - \xi_n) + x_n + \xi_n. \quad (4.0.14)$$

Невырожденность этой биформы очевидна. Зададим теперь множество матриц размера $n \times n$ $\mathcal{B} \subseteq R^{n^2}$ следующими условиями. Матрица A размера $n \times n$ лежит в $\mathcal{B}$ в том и только том случае, если матрица, получающаяся из A вычитанием последнего столбца из всех предыдущих и заменой его на столбец из единиц e тела R, обратима. Будем говорить, что набор элементов $\mathcal{M}$ $(i_1, \dots, i_n)$ лежит в $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, если матрица, составленная из n соответствующих им строк, лежит в $\mathcal{B}$. Будем говорить, что набор элементов $\mathcal{N}$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ лежит в $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, если матрица, составленная из n соответствующих им столбцов высоты n, лежит в $\mathcal{B}$. Условие (4.0.1) выполняется по построению. Положим $z_1 = (e, O, \ldots, O)$, $z_2 = (O, e, O, \ldots, O), \ldots, z_{n-1} = (O, \ldots, O, e, O)$, $z_n = (O, \ldots, O)$. Положим $\omega_1 = (e, O, \ldots, O)$, $\omega_2 = (O, e, O, \ldots, O), \ldots, \omega_{n-1} = (O, \ldots, O, e, O)$, $\omega_n = (O, \ldots, O)$. Легко видеть, что такой выбор баз $(z_1, \ldots, z_n) = Z \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $(\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}) = \Omega \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ будет единственным, при котором отображения $\langle Z, \cdot \rangle$ и $\langle \cdot, \Omega \rangle$ будут тождественными (то есть оставлять соответствующую строку неизменной).

Отметим, что для любой матрицы $A \in \mathcal{B}$ матрица, полученная из A вычитанием последней строки из всех остальных и заменой ее на строку из единиц, будет обратима. Действительно, обозначим эту матрицу за $\tilde{B}$. Обратимую матрицу, получающуюся из A вычитанием последнего столбца из остальных и заменой его на столбец из единиц, обозначим за $\bar{A}$. Пусть $A = (a_{pq})$. Рассмотрим матрицу $A' = (a'_{pq})$, получаемую из $\bar{A}$ вычитанием последней строки из всех остальных. Поскольку данное преобразование является композицией элементарных преобразований строк, $\bar{A}'$ обратима, как и $\bar{A}$. При этом для $p, q = 1, \ldots, n-1$, легко видеть,

$$\bar{a}'_{pq} = a_{pq} - a_{pn} - a_{nq} + a_{nn}.$$

Последний столбец матрицы $\bar{A}'$ имеет вид $(O, \ldots, O, e)$. Отметим, что матрица A' размера $n-1 \times n-1$, получаемая как верхний угол матрицы $\bar{A}'$, будет обратима, поскольку обратимость равносильна правой линейной независимости столбцов, а зависимость столбцов матрицы A', очевидно, равносильна зависимости столбцов матрицы $\bar{A}'$ (вместе с последним). Теперь рассмотрим матрицу $\tilde{A}'$, получаемую из $\tilde{A}$ вычитанием последнего столбца из всех остальных. Для $p, q = 1, \ldots, n-1$ ее элементы $\tilde{a}'_{pq}$, легко видеть, совпадают с соответствующими элементами матрицы $\bar{A}'$. Последняя строка имеет вид $(O, \ldots, O, e)$. Тогда из левой линейной независимости строк матрицы A' следует и независимость строк матрицы $\tilde{A}'$, то есть ее обратимость. Ввиду того, что $\tilde{A}'$ получается из $\tilde{A}$ элементарными преобразованиями строк, это дает требуемую обратимость $\tilde{A}$. Отметим, что аналогичными рассуждениями показывается, что из обратимости $\tilde{A}$ следует обратимость $\bar{A}$. Таким образом, эти два условия можно считать эквивалентными описаниями множества $\mathcal{B}$.

Ассоциативность обобщенного матричного умножения

Покажем, что выполнена ассоциативность обобщенного матричного умножения. Для этого проверим его выполнение прямыми вычислениями. Пусть $A = (a_{pq})$, $B = (b_{pq})$, $C = (c_{pq})$ — матрицы $n \times n$. Тогда

$$(A * B)_{pq} = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{pk} - a_{pn})(b_{kq} - b_{nq}) + a_{pn} + b_{nq}.$$

Теперь получаем

$$\begin{aligned}((A * B) * C)_{pq} = \sum_{l=1}^{n-1}(\sum_{k=1}^{n-1} (a_{pk} - a_{pn})(b_{kl} - b_{nl}) + a_{pn} + b_{nl} - \\ \sum_{k=1}^{n-1} (a_{pk} - a_{pn})(b_{kn} - b_{nn}) - a_{pn} - b_{nn})(c_{lq} - c_{nq}) + \\ (\sum_{k=1}^{n-1} (a_{pk} - a_{pn})(b_{kn} - b_{nn}) + a_{pn} + b_{nn}) + c_{nq} = \\ \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} (a_{pk} - a_{pn})(b_{kl} - b_{nl} - b_{kn} + b_{nn})(c_{lq} - c_{nq}) + \\ + \sum_{l=1}^{n-1} (b_{nl} - b_{nn})(c_{lq} - c_{nq}) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{pk} - a_{pn})(b_{kn} - b_{nn}) + a_{pn} + b_{nn} + c_{nq}.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}(A * (B * C))_{pq} = \sum_{k=1}^{n-1}(a_{pk} - a_{pn})(\sum_{l=1}^{n-1} (b_{kl} - b_{kn})(c_{lq} - c_{nq}) + b_{kn} + c_{nq} - \\ \sum_{l=1}^{n-1} (b_{nl} - b_{nn})(c_{lq} - c_{nq}) - b_{nn} - c_{nq}) + a_{pn+1} +\end{aligned}$$

$$(\sum_{k=1}^{n-1}(b_{nk}-b_{nn})(c_{kq}-c_{nq})+b_{nn}+c_{nq})=$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}(a_{pk}-a_{pn})(b_{kl}-b_{kn}-b_{nl}+b_{nn})(c_{lq}-c_{nq})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{pk}-a_{pn})(b_{kn}-b_{nn})+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{nk}-b_{nn})(c_{kq}-c_{nq})+a_{pn}+b_{nn}+c_{nq}.$$

Отсюда сразу следует $((A*B)*C)=(A*(B*C))$ — ассоциативность доказана.

Аксиома A2'

Покажем, что выполнено условие аксиомы A2' с требованием единственности (аксиома A6). Поскольку при задании физической структуры $C_n(R)$ множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ полностью симметричны относительно друг друга, нам достаточно проверить ее только для баз пространства $\mathcal{M}$. Пусть $I=(i_1,\ldots,i_n)\in\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $r=(r^1,\ldots,r^n)\in R^n$. Нам надо найти $\alpha\in\mathcal{N}$, такой, что $\langle I,\alpha\rangle=r$. Обозначим $\langle Z,\alpha\rangle=(\xi^1,\ldots,\xi^n)$, $\langle i_k,\Omega\rangle=(i_k^1,\ldots,i_k^n)$, $k=1,\ldots,n$. Ввиду биективности отображения $\langle Z,\cdot\rangle$, нам достаточно найти $\xi^1,\ldots,\xi^n\in R$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl}(i_1^1-i_1^n)\cdot(\xi^1-\xi^n)+\ldots+(i_1^{n-1}-i_1^n)\cdot(\xi^{n-1}-\xi^n)+i_1^n+\xi^n&=&r^1\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ (i_n^1-i_n^n)\cdot(\xi^n-\xi^n)+\ldots+(i_n^{n-1}-i_n^n)\cdot(\xi^{n-1}-\xi^n)+i_n^n+\xi^n&=&r^n\end{array}\right.$$

Перепишем эту систему, обозначая $\xi^k-\xi^n=\bar{\xi}^k$, $k=1,\ldots,n-1$, и $\xi^n=\bar{\xi}^n$.

$$\left\{\begin{array}{rcl}(i_1^1-i_1^n)\cdot\bar{\xi}^1+\ldots+(i_1^{n-1}-i_1^n)\cdot\bar{\xi}^{n-1}+\bar{\xi}^n&=&r^1-i_1^n\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ (i_n^1-i_n^n)\cdot\bar{\xi}^1+\ldots+(i_n^{n-1}-i_n^n)\cdot\bar{\xi}^{n-1}+\bar{\xi}^n&=&r^1-i_1^n\end{array}\right.$$

Поскольку, согласно построению $\mathcal{B}$, матрица этой системы обратима, система однозначно разрешима относительно переменных $\bar{\xi}^1,\ldots,\bar{\xi}^n$, по значениям которых очевидным образом однозначно восстанавливаются значения $\xi^1,\ldots,\xi^n$, что нам и требовалось.

Свойства обратных матриц и аксиома Т1

Как и в случае структуры $B_n(R)$, из утверждения аксиомы A2' с требованием единственности получаем, что матрицы из $\mathcal{B}$ обратимы относительно обобщенного матричного умножения, и обратная матрица непрерывно зависит от исходной.

Следующее утверждение, ввиду наличие ссылки на него в основном тексте, сформулируем как лемму.

Лемма 4.2. *Для структуры $C_n(R)$ множество матриц $n \times m$, обратимых по обобщенному умножению слева, совпадает с множеством матриц $n \times m$, обратимых по обобщенному умножению справа, и в точности равно $\mathcal{B}$.*

Доказательство. Пусть A — матрица, обратимая справа в смысле обобщенного матричного умножения, B — обратная к ней, то есть

$$A * B = E^*. \tag{4.0.15}$$

Обозначим за $\bar{E}^*$ матрицу, получающуюся из матрицы E^* вычитанием последнего столбца из всех предыдущих и заменой его на единичный столбец, за $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — матрицы, получающиеся из матриц A и B, соответственно, аналогичным образом. Обозначим за $\bar{B}'$ матрицу, получающуюся из $\bar{B}$ вычитанием последней строки из всех остальных.

Покажем, что

$$\bar{A} \cdot \bar{B}' = \bar{E}^*, \tag{4.0.16}$$

где через $\cdot$ обозначается обычное умножение матриц над телом. Обозначим $A = (a_{pq})$, $B = (b_{pq})$, $E^* = (e_{pq})$, $\bar{A} = (\bar{a}_{pq})$, $\bar{B}' = (\bar{b}_{pq})$, $\bar{E}^* = (\bar{e}_{pq})$. Фиксируем некоторые p, q, $1 \le p \le n$, $1 \le q \le n-1$. Тогда из (4.0.15) получаем

$$\bar{e}_{pq} = e_{pq} - e_{pn} =$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{pk} - a_{pn}) \cdot (b_{kq} - b_{nq}) + a_{pn} + b_{nq} -$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{pk} - a_{pn}) \cdot (b_{kn} - b_{nn}) - a_{pn} - b_{nn} =$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{pk} - a_{pn}) \cdot (b_{kq} - b_{nq} - b_{kn} + b_{nn}) + b_{nq} - b_{nn}.$$

Таким образом,

$$\bar{e}_{pq} = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{pk} - a_{pn}) \cdot (b_{kq} - b_{nq} - b_{kn} + b_{nn}) + b_{nq} - b_{nn}. \tag{4.0.17}$$

Обозначим теперь $\bar{A} \cdot \bar{B}' = C = (c_{pq})$, и покажем, что $C = \bar{E}^*$. Для произвольных $k = 1, \ldots, n-1$, $l = 1, \ldots, n-1$ получаем, согласно построению соответствующих матриц, $\bar{a}_{kl} = a_{kl} - a_{kn}$, $\bar{b}'_{kl} = b_{kl} - b_{kn} - b_{nl} + b_{nn}$ (первое из этих равенств верно и при $k = n$). Далее, для $q = 1, \ldots, n-1$ выполнено $\bar{b}'_{nq} = b_{nq} - b_{nn}$. Кроме того, последний столбец матрицы $\bar{A}$ состоит из единиц, а последний столбец матрицы $\bar{B}'$ имеет вид $(O, \ldots, O, e)$. Теперь, перемножая матрицы $\bar{A}$ и $\bar{B}'$, получим

$$c_{pq} = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{bk} \cdot \bar{b}'_{kq} = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{pk} - a_{pn})(b_{kl} - b_{kn} - b_{nl} + b_{nn}) + e \cdot (b_{nq} - b_{nn}). \tag{4.0.18}$$

Правые части равенств (4.0.17) и (4.0.18) равны между собой. Очевидно также, что последний столбец матрицы C целиком состоит из элементов e. Таким образом, $C = \bar{E}^*$, и равенство (4.0.16) доказано.

Матрица $\bar{E}^*$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} e & O & \ldots & O & e \\ O & e & \ldots & O & e \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & e & e \\ O & O & \ldots & O & e \end{pmatrix}.$$

Обозначим за $\bar{A}'$ матрицу, получаемую из $\bar{A}$ вычитанием ее первой строки из всех остальных. Это действие является композицией элементарных преобразований строк, поэтому найдется такая матрица T, что $\bar{A}' = T \cdot \bar{A}$.

Проводя ту же операцию с матрицей $\bar{E}^*$, получим единичную матрицу E, поэтому $T \cdot \bar{E}^* = E$. Теперь, домножая левую и правую части равенства (4.0.16) на T, получаем

$$\bar{A}' \cdot \bar{B}' = E. \tag{4.0.19}$$

Тогда матрица $\bar{A}'$ обратима (в смысле обычного умножения), что означает $A \in \mathcal{B}$.

Если мы теперь рассмотрим произвольную матрицу $B \in R^{nm}$, обратимую слева в смысле обобщенного умножения, и если A есть ее обратная, то есть $A * B = E^*$, то мы, как и выше, получим, что выполняется равенство (4.0.19), из которого будет следовать, что $\bar{B}'$ обратима, и $B \in \mathcal{B}$.

Тот же факт, что все матрицы из $\mathcal{B}$ обратимы слева и справа, был доказан выше. $\square$

Из доказанного тривиально следует замкнутость множества $\mathcal{B}$ относительно обобщенного матричного умножения и обращения.

Мы получаем теперь, что выполнены все условия, необходимые для существования функции F, определенной формулой (2.4.2). При этом F непрерывна, поскольку непрерывны операция взятия обратной матрицы и обобщенного умножения матриц. Таким образом, аксиома T1 выполнена.

Аксиома A3

Покажем выполнение условия аксиомы A3. Поскольку в построении структуры $C_n(R)$ пространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ симметричны, достаточно рассмотреть только множество независимых элементов из $\mathcal{N}$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — независимые элементы $\mathcal{N}$, $a_p = (a_p^1, \ldots, a_p^n)$, $p = 1, \ldots, k$. Пусть $r = (r^1, \ldots, r^k) \in R^k$. Рассмотрим строки $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k$ длины $n-1$, заданные следующим образом: $\bar{\alpha}_p = (a_p^1 - a_p^n, \ldots, a_p^{n-1} - a_p^n) = (b_p^1, \ldots, b_p^{n-1})$. Будем рассматривать их как элементы пространства $\mathcal{N}$ физической структуры $B_{n-1}(R)$. Покажем, что, рассматриваемые как элементы этого пространства, $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k$ будут независимы. Принцип рассуждений таков же, как при рассмотрении пространства $\mathcal{M}$ структуры $B_n(R)$. Предположим противное. Тогда существуют такие $\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_{k-1} \in \mathcal{N}$, что для всех $p = 1, \ldots, k$ $\bar{\alpha}_p \in [\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_{k-1}]$. Рассмотрим элементы $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ пространства $\mathcal{N}$ структуры $C_n(R)$ — строки длины n, получаемые из $\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_{k-1}$, соответственно, приписыванием O в конце. Тогда для любой строки i длины $\mathcal{M}$ и для любого $p = 1, \ldots, k-1$

$$\langle i, \alpha_p \rangle = \langle i, \bar{\alpha}_p \rangle + a_p^n, \quad \langle i, \beta_p \rangle = \langle i, \bar{\beta}_p \rangle, \tag{4.0.20}$$

где биформы в левых частях равенств берутся по формуле (4.0.14) для структуры $C_n(R)$, а биформа в правых частях равенств — по формуле (4.0.3) для структуры $B_{n-1}(R)$. Тогда, как следует непосредственно из определения зависимости, для всех $p = 1, \ldots, k$ из зависимости $\bar{\alpha}_p \in [\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_{k-1}]$ следует $\alpha_p \in [\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}]$. Это дает противоречие, из которого следует независимость $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k$. Теперь, согласно доказанному для структуры $B_{n-1}(R)$ утверждению аксиомы А3, найдется такая строка $i = (i^1, \ldots, i^n)$ длины n, что

$$(i^1 - i^n) \cdot b_p^1 + \ldots + (i^{n-1} - i^n) \cdot b_p^{n-1} + i^n = r^p - a_p^n, \quad p = 1, \ldots, k.$$

С учетом определения $b_p^1, \ldots, b_p^{n-1}$, эти равенства в точности означают, что для всех $p = 1, \ldots, k$ выполнено $\langle i, \alpha_p \rangle = r^p$ в структуре $C_n(R)$.

Аксиомы Т2 и Т3

Покажем выполнение аксиомы Т2. Пусть U — некоторое непустое открытое подмножество множества матриц размера $n \times n$, A — некоторая матрица из U. Обозначим за U' множество матриц из U, чьи последние строка и столбец совпадают с последними строкой и столбцом A, за $\tilde{U}$ — множество матриц размера $(n-1) \times (n-1)$, получающихся из матриц множества U' отбрасыванием последних строки и столбца. Тогда $\tilde{U}$ открыто в R^{n^2}. Поскольку $A \in U'$, оно непусто.

Рассмотрим теперь преобразование $T : R^{(n-1)^2} \to R^{(n-1)^2}$, сопоставляющее каждой матрице $n \times n$ матрицу, полученной из нее вычитанием сначала последнего столбца матрицы A из каждого ее столбца, а затем последней строки матрицы A из каждой строки получившейся матрицы. Поскольку преобразование T сводится к вычитанию из каждого элемента исходной матрицы нескольких фиксированных элементов матрицы A и их разностей, оно является гомеоморфизмом. Поэтому если G — множество всех обратимых матриц $(n-1) \times (n-1)$ (всюду плотное в $R^{(n-1)^2}$ по лемме 5.1), то множество $T^{-1}(G)$ также всюду плотно. Тогда найдется матрица $\tilde{B} \in T^{-1}(G) \cap \tilde{U}$.

Обозначим за B матрицу, получающуюся приписыванием к $\tilde{B}$ последней строки и последнего столбца матрицы A. Тогда $B \in U$. Покажем, что $B \in \mathcal{B}$. Вычтем из каждого столбца B ее последний столбец (совпадающий с последним столбцом матрицы A) и заменим его на столбец из единиц. Обозначим получившуюся матрицу за B'. Теперь вычтем из каждой строки матрицы B' ее последнюю строку. Мы получим матрицу B'', в левом верхнем углу которой расположена матрица $T(\tilde{B})$, а последний столбец имеет вид $(O, \ldots, O, e)$. Тогда из необратимости $T(\tilde{B})$ следует необратимость B'', а из нее сразу следует и нужная нам необратимость B'. Таким образом, каждое непустое открытое множество в $R^{(n+1)\times n}$ пересекается с $\mathcal{B}$, что и дает требуемую всюду плотность $\mathcal{B}$ в $R^{(n+1)\times n}$.

Покажем выполнение аксиомы T3. Рассмотрим отображение $S : R^{n\times n} \to R^{(n-1)\times(n-1)}$, сопоставляющее каждой матрице $n \times n$ матрицу, получающуюся из нее вычитанием последнего столбца из всех остальных и его отбрасыванием, а затем вычитанием последней строки из всех остальных и ее отбрасыванием. Очевидно, S непрерывно. Как мы отмечали в конце предыдущего абзаца, если матрица A размера $(n-1)\times(n-1)$ обратима, то любая матрица из множества $S^{-1}(A)$ лежит в $\mathcal{B}$. Согласно лемме 5.2, в множестве обратимых матриц размера $(n-1) \times (n-1)$ найдется открытое подмножество U, тогда его прообраз $S^{-1}(U)$ и будет нужным нам множеством.

Приложение 2. Топологические свойства множества обратимых матриц над телом

Лемма 5.1. *Множество всех обратимых матриц размера $n \times n$ над хаусдорфовым недискретным топологическим телом R всюду плотно в R^{n^2} для любого натурального n.*

Доказательство. Доказательство будет проводиться индукцией по n. При $n = 1$ утверждение следует из недискретности тела (его невыполнение означало бы открытость множества $\{0\}$, что давало бы, ввиду гомеоморфности операторов сложения с элементом тела, открытость любого другого одноэлементного подмножества R, и тело R оказалось бы дискретным). Пусть утверждение доказано для всех $n \leq k$. Рассматриваем $n = k + 1$. Нам надо показать, что в любой окрестности некоторой фиксированной необратимой квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка $k + 1$ над R найдется некоторая обратимая матрица.

Рассмотрим матрицу $A' \in R^{k\times k}$, получающуюся из A вычеркиванием последних строки и столбца. Предположим сначала, что она обратима. Необратимость A означает, ввиду теоремы 4.1, левую линейную зависимость между ее строками A_i; при этом, ввиду обратимости A', первые k строк A независимы, поэтому имеющуюся зависимость можно записать следующим образом:

$$A_{k+1} = \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k, \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in R, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq (0, \ldots, 0). \tag{5.0.1}$$

Рассмотрим теперь матрицу A^b, получающуюся из A подстановкой $b \in R$ в правый нижний угол (на место a_{k+1k+1}). Покажем, что она обратима при любом $b \neq a_{k+1k+1}$. Действительно, в противном случае мы имели бы некоторую (нетривиальную) зависимость

$$A^b_{k+1} = \beta_1 A^b_1 + \ldots + \beta_k A^b_k = \beta_1 A_1 + \ldots + \beta_k A_k. \tag{5.0.2}$$

При $b \neq a_{k+1k+1}$, очевидно, $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (\beta_1, \dots, \beta_k)$, поэтому, вычитая (5.0.2) из (5.0.1), мы получили бы (ввиду равенства первых k элементов A_{k+1} и A^b_{k+1}) нетривиальную зависимость строк $A'_1, \dots, A'_k$ (строки матрицы A') — противоречие с обратимостью A'. А поскольку, в силу определения топологии декартова произведения, мы можем, выбирая b достаточно близко к a_{k+1k+1}, поместить A^b в любую наперед заданную окрестность матрицы A, для случая обратимой A' утверждение доказано.

Предположим теперь, что A' необратима. Тогда нам достаточно, пользуясь индукционным предположением, проварьировать одновременно A' и a_{k+1k+1} так, чтобы попасть в наперед заданную окрестность A, сделав при этом A' обратимой. Поскольку, в силу доказанного выше, эти вариации можно производить независимо (мы можем брать любое значение правого нижнего элемента, отличное от исходного), это осуществимо. $\square$

Для доказательства следующего утверждения нам потребуется понятие десигнанта (*Designante*) квадратной матрицы над телом, введенное и исследованное А. Гейтингом [12].

Определим (левый) десигнант Δ_l квадратной матрицы порядка n над телом R индуктивно по следующей схеме. Для $n = 1$ положим $\Delta_l(a_{11}) = a_{11}$. Для $n = 2$ полагаем $\Delta_l \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}$. Для произвольного $n > 2$ и матрицы A порядка n обозначим за $A_{r,s}$ десигнант матрицы $(n-1) \times (n-1)$ из элементов, стоящих на пересечении $1, \dots, (n-2), r$-й строк и $1, \dots, (n-2), s$-го столбцов матрицы A. Тогда, по определению,

$$\Delta_l(A) = \Delta_l \begin{pmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix} = A_{n,n} - A_{n,n-1}(A_{n-1,n-1})^{-1}A_{n-1,n}.$$

Десигнант матрицы A определен, таким образом, в том и только том случае, если все десигнанты ее угловых подматриц (аналог главных миноров) меньшего размера отличны от нуля.

Десигнант обладает на области своего определения следующим важным для нас свойством [12]: $\Delta_l(A) = 0$ в том и только том случае, если строки A линейно независимы слева.

Лемма 5.2. *Множество обратимых матриц над хаусдорфовым недискретным топологическим телом содержит некоторое открытое подмножество.*

Доказательство. Доказательство будем проводить по индукции. Для $n = 1$ утверждение очевидно следует из хаусдорфовости R. Для $n = k + 1$ мы сможем, в силу индукционного предположения (о выполнимости утверждения для всех $n \leq k$), выбрать в $R^{(k+1)\times(k+1)}$ такое открытое подмножество U, на котором десигнант отличен от нуля. Для этого достаточно рассмотреть пересечение прообразов проекций соответствующих открытых множеств, построенных для верхних левых углов множества матриц $R^{(k+1)^2}$ размеров $1 \times 1, \ldots, k \times k$. Заметим теперь, что на области своего определения десигнант может быть, в силу построения, выражен через элементы матрицы последовательным применением операций сложения, вычитания, умножения и взятия обратного. Десигнант $n \times n$ является на множестве U, таким образом, непрерывной всюду определенной функцией. Множество обратимых матриц $n \times n$, лежащих в U, будет тогда, в силу упомянутого нами свойства десигнанта, являться прообразом в U открытого (в силу хаусдорфовости R) множества $R \setminus \{0\}$ и потому будет открыто в U и, в силу открытости U, в R. Это доказывает лемму. $\square$

Литература

[1] Бородин А. Н. *Груда и группа как физическая структура.* // Михайличенко Г. Г. *Групповая симметрия физических структур.* Барнаул: Барн. гос. пед. ун-т, 2003, 204 стр. Приложение: с. 195–203.

[2] Бурбаки Н. *Алгебра. Алгебраичесие структуры. Линейная и полилинейная алгебра.* М.: Физматгиз, 1962. 516 стр.

[3] Бурбаки Н. *Алгебра. Модули, кольца, формы.* М.: Физматгиз, 1966. 556 стр. с илл.

[4] Бурбаки Н. *Топологические векторные пространства.* М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. 410 с.

[5] Ионин В. К. *Абстрактные группы как физические структуры.* // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Новосибирск, 1990. Вып. 135: Вычислительные системы, с. 40–43.

[6] Ионин В. К. *К определению физических структур.* // Труды института математики. Новосибирск, 1992. Том 21, с. 42–51.

[7] Кулаков Ю. И. *Элементы теории физических структур (дополнение Михайличенко Г. Г.).* Новосибирск: НГУ, 1968.

[8] Кулаков Ю. И. *Об одном принципе, лежащем в основании классической физики.* // Докл. АН СССР, 1970, т. 193, №1. с. 72–75.

[9] Кулаков Ю. И. *Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур.* // Докл. АН СССР, 1970, т. 193, №5, с. 985–987.

[10] Кулаков Ю. И. *О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа.* // Докл. АН СССР, 1971, т. 201, №3. с. 570–572.

[11] Лев В. Х. *Трехмерные геометрии в теории физических структур.* // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Новосибирск: Ин-т математики СОАН СССР, 1988. с. 90–103. (Вычислительные системы. Вып. 125).

[12] Литвинцев А. А. *Комплексная физическая структура ранга (2,2).* // Михайличенко Г. Г. *Математический аппарат теории физических структур.* Горно-Алтайск: ГАГУ, 1997.— 144 с. Приложение: с. 133–144.

[13] Литвинцев А. А. *Комплексная физическая структура ранга (3,2).* // Материалы XXXV международной студенческой конференции. Новосибирск: НГУ, 1997, с. 62–63.

[14] Михайличенко Г. Г. *Решение функциональных уравнений в теории физических структур.* // Докл. АН СССР, 1972, т. 206, №5, с. 1056–1058.

[15] Михайличенко Г. Г. *Двумерные геометрии.* // Докл. АН СССР, 1981, т. 260, № 4, с. 803–805.

[16] Михайличенко Г. Г. *О групповой и феноменологической симметриях в геометрии.* // Докл. АН СССР, 1983, т. 269, №2, с. 284–288.

[17] Михайличенко Г. Г. *Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур).* // Докл. АН СССР, 1985, т. 24, №1, с. 39–41.

[18] Михайличенко Г. Г. *Двуметрические физические струкутуры ранга (n+1,2).* // Сиб. мат. журн., 1993, т. 34, №3, с. 132–143.

[19] Михайличенко Г. Г. *К вопросу о симметрии расстояния в геометрии.* // Изв. вузов. Математика. 1994. №4. с. 21–23.

[20] Михайличенко Г. Г. *Простейшие полиметрические геометрии.* // Докл. АН РФ, 1996. т. 348, №1, с. 22–24.

[21] Михайличенко Г. Г. *Математический аппарат теории физических структур.* Горно-Алтайск: ГАГУ, 1997.— 144 с.

[22] Понтрягин Л. С. *Непрерывные группы.*— 4-е изд.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.— 520 с.

[23] Симонов А. А. *Физическая структура ранга (3,2) на абстрактных множествах.* // Материалы XXXV Междунар. науч. студ. конф. "Студент и научно-технический прогресс"(Новосибирск, 22–24 апр. 1997 г.) Математика. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1997. с. 100–101.

[24] Симонов А. А. *Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур.* // *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур. М., 2004.— 847 с., ил. Приложение: с. 675–707.

[25] Симонов А. А. *О соответствии между почтиобластями и группами.* // Алгебра и логика. 2006. 45, № 2, с. 239–251.

[26] A. Dold. *Lectures on Algebraic Topology*, second ed., Grundlehren der Matematischen Wissenschaften, Vol. 200, Springer, Berlin, 1980, 397 pp.

[27] A. Heyting. *Die Theorie der linearen Gleichungen in einer Zahlenspezies mit nichtkommutativer Multiplication.* // Math. Ann. 98 (1927), 465–490.

[28] J. Tits. *Sur les groupes doublement transitifs continus.* // Comment. Math. Helv., 26, pp. 203-224 (1952).

[29] J. Tits. *Sur les groupes doublement transitifs continus: Correction et compléments* // Comment. Math. Helv., 30, pp. 234-240 (1956).

Работы автора по теме диссертации

[30] Фирдман И. А. *Алгебраическая классификация физических структур с нулем. I.* // Сиб. журн. индустр. математики. 2005. т. 8, №4(24), с. 131–148

[31] Фирдман И. А. *Алгебраическая классификация физических структур с нулем. II. Топологические аспекты.* // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. т. 9, №1(25), с. 135–146

[32] Фирдман И. А. *Алгебраическая теория биформ I. Случай больших рангов.* // Препринт, Омск: ОмГТУ, 2007.

[33] Симонов А. А., Фирдман И. А. *Алгебраическая теория биформ II. Случай ранга* $(n+1,2)$. // Препринт, Омск: ОмГТУ, 2007.