РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ, ТОМ 21

Исследования по математическому анализу и римановой геометрии

ответственный редактор
академик Ю.Г. Решетняк.

В.О. „Наука"
Новосибирск
1992

Ионин В.К. К определению физических структур

К определению физических структур

В. К. Ионин

Понятие физической структуры было введено Ю. И. Кулаковым [I]. Затем в [2] - [6] и некоторых других работах оно несущественно изменялось, сохраняя исходную идею. В настоящей заметке предлагается точное математическое определение физической структуры, которое уточняет и обобщает все предыдущие. Первоначальная идея Кулакова сохраняется и в нашем определении. В конце заметки приводится несколько примеров.

§I. Предварительные сведения и основные определения

I.I. Всюду в дальнейшем множества вещественных и натуральных чисел обозначаются соответственно буквами R и N, причём N не содержит нуля, т. е. состоит только из целых положительных чисел. Символом $|X|$ обозначается мощность множества X. В частности, $|X| = 0$ или $|X| \in N$, если X - конечное множество.

I. 2. Для произвольных множеств X и Y символом Y^X (читается Y в степени X) обозначается множество всех отображений X в Y. Смысл обозначения

Y^X объясняется следующим предложением: если X и Y — конечные множества и объединение $X \cup Y \neq \emptyset$, где $\emptyset$ — пустое множество, то

$$|Y^X| = |Y|^{|X|}.$$

Это предложение имеет простое доказательство, мы его опускаем. Удобно считать, что существует только одно отображение пустого множества в себя. Этот факт равносилен следующему равенству

$$|\emptyset^{\emptyset}| = 1.$$

Ясно, что $R^{\{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,s\}}$, где $r, s \in N$ есть множество всех вещественных $(r \times s)$ -матриц. Таким образом, при желании, на операцию возведения в степень, определённую в классе множеств, можно смотреть как на обобщение понятия прямоугольной матрицы.

I. 3. Определим операцию возведения произвольной функции $f: X \longrightarrow Y$ в степень Z, где Z — произвольное множество. Положим, по определению, что требуемая функция

$$f^Z : X^Z \longrightarrow Y^Z$$

определяется формулой

$$f^{Z}(h) = fh,$$

где $h \in X^{Z}$, fh — суперпозиция функций h и f. Последнее равенство наглядно изображается следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "f"] & \\ Z \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "f^{Z}(h)"] & & Y. \end{tikzcd}$$

В частности, если $Z = \{1,\dots,r\}\times\{1,\dots,s\}$, то функция f^{Z} переводит $(r\times s)$-матрицу

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{r1} & \dots & x_{rs} \end{pmatrix} \in X^{Z}$$

в $(r\times s)$-матрицу

$$\begin{pmatrix} f(x_{11}) & \dots & f(x_{1s}) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(x_{r1}) & \dots & f(x_{rs}) \end{pmatrix} \in Y^{Z}.$$

I. 4. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, X и Y — четыре произвольных множества. Множество $\mathfrak{M}^X \times \mathfrak{N}^Y$ состоит из всевозможных пар (μ, ν), где $\mu: X \longrightarrow \mathfrak{M}$, $\nu: Y \longrightarrow \mathfrak{N}$. Каждой такой паре сопоставим отображение

$$(\mu \times \nu): X \times Y \longrightarrow \mathfrak{M} \times \mathfrak{N},$$

определяемое формулой

$$(\mu \times \nu)(x, y) = (\mu(x), \nu(y)).$$

В дальнейшем, для простоты обозначений, условимся не отличать пару (μ, ν) от отображения $\mu \times \nu$. Тогда можно считать, что

$$\mathfrak{M}^X \times \mathfrak{N}^Y \subset (\mathfrak{M} \times \mathfrak{N})^{X \times Y}.$$

I. 5. Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольное множество, а K и L непересекающиеся множества. Для любых двух функций $f \in \mathfrak{R}^K$ и $g \in \mathfrak{R}^L$ определим их сумму

$$(f + g) \in \mathfrak{R}^{K \cup L}$$

следующей формулой

$$(f+g)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in K, \\ g(x), & \text{если } x \in L. \end{cases}$$

Очевидно, что $f + g = g + f$.

I. 6. Сюръективное отображение

$$\varphi : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{R}$$

называется физической структурой относительно пятёрки (X , Y , K , $\mathcal{U}$, $\varkappa$), где X и Y — непустые множества, K — непустое собственное подмножество прямого произведения $X \times Y$, $\mathcal{U}$ — непустое подмножество $\mathfrak{R}^K$, $\varkappa \in N$; при условии, что выполняется аксиома, которую мы сформулируем в этом пункте.

Введём обозначения: $L = (X \times Y) \setminus K$, для любой точки $u \in \mathfrak{R}^K$ обозначим через $\mathcal{V}(u)$ множество всех таких $v \in \mathfrak{R}^L$, что

$$(u + v) \in \varphi^{X \times Y}(\mathfrak{M}^X \times \mathfrak{N}^Y).$$

Ясно, что L , как и K , есть собственное непустое подмножество

Аксиома (Ю. И. Кулаков). Для любой точки $u \in \mathcal{U}$ множество $\mathcal{V}(u)$ удовлетворяет неравенствам

$$1 \leqslant |\mathcal{V}(u)| \leqslant \varkappa.$$

Замечания. I. Говоря точнее, физической структурой является шестёрка (φ , X , Y , K , $\mathcal{U}$, $\varkappa$), а не функция φ , но мы, для краткости, в случае когда это не приводит к недоразумению, будем продолжать называть эту функцию физической структурой или просто структурой.

2. Учитывая непустоту множеств $\mathcal{U}$ и K , легко показать, что $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{R}$ — также непустые множества.

3. Пара ($|X|$, $|Y|$) называется рангом структуры.

Если X и Y — конечные множества, то φ называется структурой конечного ранга. В этом случае будем полагать, что $X=\{1,\dots,r\}$, $Y=\{1,\dots,s\}$, где $r,s\in N$.

4. Число $\varkappa$ называется кратностью структуры.

5. Выберем для каждого $u\in\mathcal{U}$ из множества $\mathcal{V}(u)$ конечную последовательность (v_1 , ... , $v_\varkappa$) так, чтобы в неё вх одила каждая точка из $\mathcal{V}(u)$. Другими словами, эта последовательность есть некоторое сюръективное отображение $\{1,\dots,\varkappa\}$ в $\mathcal{V}(u)$. Таким образом, мы получили последовательность функций (Φ_1 , ... , $\Phi_\varkappa$), отображающих $\mathcal{U}$ в $\mathcal{R}^L$ по формуле $\Phi_\lambda(u)=v_\lambda$ для каждого $\lambda\in\{1,\dots,\varkappa\}$. Следует обратить внимание на то, что последовательность этих функций выбирается однозначно только в случае, когда $|\mathcal{V}(u)|=1$ при любом $u\in\mathcal{U}$.

Если $\varkappa=1$, то вместо v_1 и Φ_1 будем писать v и Φ соответственно.

6. Если из того, что

$$\mathcal{U}\subset\mathcal{U}'\subset\mathcal{R}^K,\quad \mathcal{U}'\setminus\mathcal{U}\neq\varnothing,$$

следует, что шестёрка (φ , X , Y , K , $\mathcal{U}'$, $\varkappa$) не является физической структурой, то структура (φ , X , Y, K , $\mathcal{U}$, $\varkappa$) называется максимальной.

7. Если $\mathcal{U}=\mathcal{R}^K$, то структура φ называется полной

I. 7. Приведём определение непрерывной (или, другими словами, топологической) физической структуры.

Зафиксируем произвольно множество $\mathcal{M}\subset X\times Y$. Каждой паре $(x,y)\in\mathcal{M}$ сопоставим отображение (которое

также будем обозначать через (x, y)) множества $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}$ в $\mathcal{R}$, определённое формулой $(x, y)(h) = h(x, y)$. В дальнейшем каждый элемент множества $\mathcal{M}$ будем считать отображением $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}$ в $\mathcal{R}$, т. е.

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{R}^{\left(\mathcal{R}^{\mathcal{M}}\right)}.$$

Если $\mathcal{R}$ — топологическое пространство, то будем считать и $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}$ топологическим пространством со слабейшей топологией, в которой каждое отображение множества $\mathcal{M}$ непрерывно.

Физическая структура φ называется непрерывной (или топологической), если выполняются условия:

а) $\mathcal{R}$ — топологическое пространство;

б) $\mathcal{U}$ - открытое множество в $\mathcal{R}^{K}$;

в) функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_{\varkappa}$ можно подобрать так, чтобы все они были непрерывны.

Непрерывная физическая структура φ называется почти полной, если выполняется ещё одно условие:

г) замыкание $\mathcal{U}$ совпадает с $\mathcal{R}^{K}$.

Последнее условие можно сформулировать другими словами: множество $\mathcal{U}$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{R}^{K}$.

Физическую структуру будем называть абстрактной, если она не является топологической.

I. 8. Приведём определение регулярной физической структуры класса C^{k}, где $k \in \{1, 2, \ldots; \infty, a\}$. При $k = \infty$ структуру будем называть бесконечно диффе-

ренцируемой или просто гладкой, а при $k=\alpha$ — аналитической.

Физическая структура φ называется регулярной структурой класса C^k, или просто C^k-структурой, если выполняются условия:

а) X и Y — конечные множества;

б) $\mathcal{R}$ — многообразие класса C^k (тогда легко видеть что $\mathcal{U}$ и $\mathcal{R}^L$ — также многообразия класса C^k).

в) функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_\varkappa$ можно подобрать так, чтобы все они были регулярными отображениями класса C^k.

Замечание. Многообразием мы называем конечномерное многообразие без края. Так как многообразие - топологическое пространство, то каждая регулярная физическая структура является непрерывной структурой. Регулярная структура называется почти полной, если она - почти полная непрерывная структура.

I. 9. Рассмотрим физическую структуру φ, определённую в I. 6. На множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ естественным образом возникают следующие отношения эквивалентности: две точки $i, j \in \mathfrak{M}$ (или $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$) считаются эквивалентными, если для любой точки $\gamma \in \mathfrak{N}$ (или $k \in \mathfrak{M}$) выполняется равенство $\varphi(i,\gamma) = \varphi(j,\gamma)$ (или $\varphi(k,\alpha) = \varphi(k,\beta)$). Пусть $\mathfrak{M}^*$ и $\mathfrak{N}^*$ — фактор-множества этих эквивалентностей на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Классы эквивалентностей, содержащих точки $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ будем обозначать соответственно символами $[i]$ и $[\alpha]$. Определим отображение

$$\varphi^* : \mathfrak{M}^* \times \mathfrak{N}^* \longrightarrow \mathcal{R}$$

формулой $\varphi^*([i],[\alpha]) = \varphi(i,\alpha)$. Легко доказать, что шестёрка (φ^*, X, Y, K, $\mathcal{U}$, $\varkappa$) есть физическая структура.

I. 10. Теперь определим отношение эквивалентности в классе всех абстрактных физических структур конечного ранга. Рассмотрим две произвольные структуры (φ_λ, X_λ, Y_λ, K_λ, $\mathcal{U}_\lambda$, $\varkappa_\lambda$), $\lambda \in \{1,2\}$, из этого класса. Пусть

$$\varphi_\lambda : \mathfrak{M}_\lambda \times \mathfrak{N}_\lambda \longrightarrow \mathfrak{R}_\lambda, \quad \varphi^*_\lambda : \mathfrak{M}^*_\lambda \times \mathfrak{N}^*_\lambda \longrightarrow \mathfrak{R}_\lambda,$$

где функция φ^*_λ и фактор-множества $\mathfrak{M}^*_\lambda$ и $\mathfrak{N}^*_\lambda$ определены в I. 9. Будем говорить, что структуры φ_1 и φ_2 эквивалентны (в записи $\varphi_1 \sim \varphi_2$), если существуют такие биективные отображения

$$h_1 : \mathfrak{M}^*_1 \longrightarrow \mathfrak{M}^*_2, \; h_2 : \mathfrak{N}^*_1 \longrightarrow \mathfrak{N}^*_2, \; h_3 : \mathfrak{R}_1 \longrightarrow \mathfrak{R}_2,$$

что выполняются условия:

а) $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$, $K_1 = K_2$, $\varkappa_1 = \varkappa_2$;

б) если $K = K_1 = K_2$, то $h_3^K(\mathcal{U}_1) = \mathcal{U}_2$;

в) для любых $i \in \mathfrak{M}_1$ и $\alpha \in \mathfrak{N}_1$ справедливо равенство

$$h_3(\varphi_1(i,\alpha)) = \varphi^*_2(h_1([i]), h_2([\alpha])).$$

Для определения эквивалентности непрерывных структур или регулярных C^k-структур следует дополнительно потребовать, чтобы h_3 было соответственно гомеоморфизмом или диффеоморфизмом класса C^k.

§ 2. Примеры физических структур

В каждом примере мы приведём полное описание физической структуры (φ , X , Y , K , $\mathcal{U}$, $\varkappa$), а также множеств $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}$ и функций Φ_1 , ... , $\Phi_\varkappa$. Мы будем рассматривать структуры только конечного ранга, поэтому, в соответствии с замечанием 3 пункта I. 6, множества X и Y полностью характеризуются рангом (r, s) . Без дополнительных оговорок будем предполагать, что множества K и L во всех примерах определяются равенствами

$$K = (X \times Y) \setminus \{(1,1)\}, \quad L = \{(1,1)\}.$$

2. I. Произвольная абстрактная группа G следующим образом порождает абстрактную полную физическую структуру ранга (2,2). Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = \mathfrak{R} = G$, $\varkappa = 1$, $\varphi(i, \alpha) = i\alpha$, где $i\alpha$ — произведение элементов $i, \alpha \in G$ в группе G . Функция $\Phi : \mathfrak{R}^K \to \mathfrak{R}^L$ переводит K-матрицу

$$\begin{pmatrix} \phi & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^K$$

в L-матрицу

$$\begin{pmatrix} x & \phi \\ \phi & \phi \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^L,$$

где $x = y w^{-1} z$.

Замечания. I. Физические структуры порождают в классе абстрактных групп следующую эквивалентность: две группы

считаются эквивалентными, если они порождают эквивалентные физические структуры, Интересно, как сформулировать определение этой эквивалентности, пользуясь только теоретико-групповыми терминами?

2. Группа Ли очевидным образом порождает аналитическую полную физическую структуру ранга (2,2).

2. 2. Произвольный абстрактный моноид $\mathcal{M}$ также порождает абстрактную физическую структуру ранга (2,2),причём эта структура не будет полной в случае, когда $\mathcal{M}$ отличается от группы. Пусть $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}=\mathcal{R}=\mathcal{M}$, $\varkappa=1$, $\varphi(i,\alpha)=i\alpha$. K-матрица

$$\begin{pmatrix} \phi & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

входит в $\mathcal{U}$, если и только если существует элемент w^{-1}. Функция Φ переводит такую матрицу в L-матрицу

$$\begin{pmatrix} x & \phi \\ \phi & \phi \end{pmatrix}$$

где $x=yw^{-1}z$.

2. 3. Покажем как конечномерное векторное пространство порождает почти полную аналитическую структуру. Пусть $n\in N$, $X=Y=\{1,\dots,n\}$, $\mathfrak{M}$—$(n-1)$-мерное векторное пространство над полем R , $\mathfrak{N}$ — сопряжённое к $\mathfrak{M}$ пространство, т. е. $\mathfrak{N}$ состоит из всех линейных отображений $\mathfrak{M}$ в R, $\mathcal{R}=R$, $\varkappa=1$, $\varphi(i,\alpha)=\alpha(i)$. K-матрица

$$\begin{pmatrix} \emptyset & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^K$$

входит в $\mathcal{U}$, если и только если

$$\begin{vmatrix} x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Функция Φ переводит такую K-матрицу в L-матрицу

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & \emptyset \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^L,$$

где число x_{11} находится из уравнения

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

2. 4. Приведём пример ~~аналитической почти~~ полной физической структуры, кратность которой больше единицы. Пусть $X = Y = \{1, 2\}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = R$, $\mathcal{R}$ – множество всех неотрицательных вещественных чисел, $\varkappa = 4$, $\varphi(i, \alpha) = |i - \alpha|$. K-матрица

$$\begin{pmatrix} \emptyset & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

переводится функциями Φ_1, Φ_2, Φ_3 и Φ_4 соответственно в следующие L-матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & \phi \\ \phi & \phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 & \phi \\ \phi & \phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 & \phi \\ \phi & \phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_4 & \phi \\ \phi & \phi \end{pmatrix},$$

где $x_1 = |y-z-w|$, $x_2 = |y-z+w|$, $x_3 = |y+z-w|$, $x_4 = |y+z+w|$.

2. 5. Приведём пример аналитической почти полной физической структуры ранга (r, s), где $r \neq s$. Пусть $X = \{1,2,3\}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{K} = R$, $\mathfrak{N} = R^2$, $\varkappa = 1$, $\varphi(x,(\xi,\eta)) = x\xi + \eta$. K-матрица

$$\begin{pmatrix} \phi & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}$$

входит в $\mathcal{U}$, если и только если $x_{22} \neq x_{32}$. Функция Φ переводит такую K-матрицу в L-матрицу

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \phi \\ \phi & \phi \\ \phi & \phi \end{pmatrix},$$

где число x_{11} находится из уравнения

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & 1 \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Литература

I Кулаков Ю. И. Элементы теории физических структур. Дополнение Михайличенко Г. Г. Новосибирск. НГУ. I968.226с.

2 Кулаков Ю. И. О теории физических структур Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. I5 (Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР, т. I27) Ленинград. Наука. I983. с I03 - I5I.

3 Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. Доклады АН СССР. I972. т. 206. № 5. с I056 - I058.

4 Лев В. Н. Трёхмерные геометрии в теории физических структур. Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем, Вычислительные системы, I25. Новосибирск. Институт математики СО АН СССР, I988. с 90-I03

5 Владимиров Ю. С. Биспиноры и физическая структура ранга (3,3). Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем, I25/ Вычислительные системы, I25. Новосибирск. Институт математики СО АН СССР, I988. с.42-60.

6 Михайличенко Г. Г., Лозицкий Е. Л. Простейшие двуметрические физические структуры. Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем, Вычислительные системы, I25. Новосибирск. Институт математики СО АН СССР, I988. с.88-89.