ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 8 (519)

УДК 514.152

В.А. КЫРОВ

ДВУМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В данной работе проводится построение двуметрических двумерных многообразий. Строятся двуметрические функции, определяются согласованные связности и группы изометрий. Приводится интерпретация этих пространств в термодинамике.

1. Двуметрические плоскости. В самом широком смысле двуметрическая геометрия — это геометрия с двумя расстояниями. В этой геометрии паре точек ставится в соответствие не одно число, как обычно, а два. В [1] проводится полная классификация двуметрических двумерных феноменологически симметричных геометрий, т. е. геометрий со следующим свойством. Существуют многообразие M, являющееся плотным подмногообразием прямого произведения $N \times N$ некоторого двумерного многообразия N на себя, и гладкая невырожденная функция $f : M \to R^2$. Функцию f будем называть *метрической функцией или двуметрикой, или двуметрической функцией*, ее компоненты будем обозначать (f^1, f^2). Существует такая гладкая функция шести переменных $\Phi : R^3 \to R^2$ с компонентами (Φ_1, Φ_2), причем $\operatorname{rang} \Phi = 2$, что для любого кортежа из трех произвольных точек $\langle xyz \rangle$, каждая пара из которого принадлежит множеству M, имеет место функциональное уравнение

$$\Phi(f(xy), f(xz), f(yz)) = 0.$$

Существуют всего две двумерные феноменологически симметричные двуметрические структуры. Это геометрии с метрическими функциями, которые имеют следующие координатные представления:

$$f^1(xy) = x^1 - y^1, \qquad f^2(xy) = x^2 - y^2; \tag{1}$$

$$f^1(xy) = (x^1 - y^1)x^2, \quad f^2(xy) = (x^1 - y^1)y^2, \tag{2}$$

где (x^1, x^2) — координаты точки x, а (y^1, y^2) — координаты точки y. Пространство, в котором определена данная двуметрическая структура, будет обозначаться F^2. Заметим, что области определения двуметрических функций (1) и (2) совпадают со всем прямым произведением $F^2 \times F^2$. Обратим внимание на то, что множество F^2 совпадает с аффинной плоскостью.

Рассмотрим две бесконечно близкие точки $y = (x^1, x^2)$ и $x = (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$, на которых метрические функции (1) и (2) принимают значения

$$f^1 = dx^1, \qquad f^2 = dx^2; \tag{1'}$$

$$f^1 = (dx^1)(dx^2 + x^2), \quad f^2 = (dx^1)x^2. \tag{2'}$$

Переходя в метрических функциях (1′), (2′) от специальных координат (x^1, x^2) к произвольным (y^1, y^2) по формулам $x^1 = \psi^1(y^1, y^2)$, $x^2 = \psi^2(y^1, y^2)$, получим

$$f^1 = a^1_i dy^i, \qquad f^2 = a^2_i dy^i;$$

$$f^1 = (a^1_i dy^i)(a^2_i dy^i + \xi^2), \quad f^2 = a^1_i dy^i \xi^2,$$

где $a^i_j = \partial\psi^i/\partial y^j$, $\xi^2 = \psi^2$, $i, j = 1, 2$.

Преобразование g двуметрического двумерного пространства F^2 назовем *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию f, т.е. двуметрику (f^1, f^2). В [1] показано, что по метрической функции f находится двухпараметрическая группа движений G_{F^2}, а по этой группе движений восстанавливается метрическая функция f с точностью до гладкой функции $\varphi : R^2 \to R^2$. Решая эту задачу для выше приведенных пространств, приходим к группам движений G_{F^2}, которые задаются следующими уравнениями:

для метрической функции (1)

$$x^{1\prime} = x^1 + b, \quad x^{2\prime} = x^2 + a;$$

для метрической функции (2)

$$x^{1\prime} = e^{\alpha} x^1 + b, \quad x^{2\prime} = e^{-\alpha} x^2, \tag{3}$$

где α, a, b — произвольные постоянные. Объединяя эти системы в одну, имеем

$$x^{1\prime} = e^{\varepsilon\alpha} x^1 + b, \quad x^{2\prime} = e^{-\varepsilon\alpha} x^2 + (1-\varepsilon)a, \tag{4}$$

где $\varepsilon = 0, 1$. Обратим вримание на то, что система (4) зависит от двух независимых непрерывных параметров: a и b при $\varepsilon = 0$; α и β при $\varepsilon = 1$. Двухточечными инвариантами группы (3) являются также следующие функции:

$$\eta = \frac{f^1(xy) - f^2(xy)}{f^1(xy)} = \frac{x^2 - y^2}{x^2}, \tag{5}$$

$$A = f^1(xy) - f^2(xy) = (x^1 - y^1)(x^2 - y^2). \tag{6}$$

Двуметрическая геометрия с метрической функцией (2) допускает содержательную интерпретацию в термодинамике. Рассмотрим термодинамическую систему (ТДС), находящуюся в равновесном состоянии. Предположим, что она совершает цикл Карно по пути $T^1 S^1 T^2 S^2 T^1$, где $S^1 > S^2$, т. е. этот цикл однозначно характеризуется параметрами T^1, S^1, T^2, S^2. Пусть T^1 и T^2 — температуры нагревателя и холодильника соответственно, причем $T^1 > T^2$. Предположим, что в результате этого процесса ТДС от нагревателя получает количество тепла $Q^1 = T^1(S^1 - S^2)$ и отдает холодильнику количество тепла $Q^2 = T^2(S^2 - S^1)$. Допустим, что x — состояние ТДС с энтропией $S^1 = x^1$ и температурой $T^1 = x^2$, а y — состояние системы с энтропией $S^2 = y^1$ и температурой $T^2 = y^2$. Тогда интерпретируем двуметрическое пространство M как пространство состояний равновесной ТДС, а двуметрические функции $f^1(xy)$ и $f^2(xy)$ как количества тепла Q^1 и $|Q^2|$ соответственно —

$$f^1(xy) = Q^1 = T^1(S^1 - S^2), \quad f^2(xy) = |Q^2| = T^2(S^1 - S^2).$$

Заметим, что пара состояний x и y однозначно определяет цикл Карно со следующими параметрами: (T^1, S^1, T^2, S^2). Согласно этой интерпретации инвариант (5) представляет собой коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta = \frac{Q^1 - |Q^2|}{Q^1} = \frac{x^2 - y^2}{x^2} = \frac{T^1 - T^2}{T^1} < 1,$$

а инвариант (6) — полезная работа цикла Карно

$$A = Q^1 - |Q^2| = (x^1 - y^1)(x^2 - y^2) = (S^1 - S^2)(T^1 - T^2).$$

По своему физическому смыслу координаты x^1 и y^1 строго положительны [2].

Рассмотрим движение g плоскости M, которое произвольные состояния x и y переводит в состояния x' и y' соответственно, т. е. $S'^1 = g^1(S^1, T^1)$, $T'^1 = g^2(S^1, T^1)$, $S'^2 = g^1(S^2, T^2)$, $T'^2 = g^2(S^2, T^2)$. Это приводит к тому, что цикл Карно с параметрами (S^1, T^1, S^2, T^2) переходит в цикл Карно с параметрами (S'^1, T'^1, S'^2, T'^2). Физически это означает, что отображение g

устанавливает связь между двумя круговыми процессами (циклами). Следовательно, КПД η и полезная работа A этих циклов равны. Заметим, что в этом случае

$$S' = e^{\alpha}S + b, \quad T' = e^{-\alpha}T,$$

т. е. температуры нагревателя и холодильника при преобразовании g меняются пропорционально с одним и тем же коэффициентом. Выражая $e^{-\alpha}$ из преобразований температуры нагревателя и подставляя в преобразования температуры холодильника этих циклов, получим

$$\frac{T'^1}{T^1} = \frac{T'^2}{T^2}. \tag{7}$$

Для определения коэффициента $e^{-\alpha}$ рассмотрим состояние с эталонной температурой T_0, которое при преобразовании g переходит в состояние с температурой T. Тогда $\alpha = \ln(T_0/T)$. Поэтому согласно (7) температуры холодильников циклов Карно относительно преобразований g связаны равенством

$$T'^2 = \frac{T}{T_0}T^2,$$

где T_0 — температура нагревателя первого из них.

Траекториями однопараметрической подгруппы группы (3)

$$S' = e^{\alpha}S, \quad T' = e^{-\alpha}T \tag{3$'$}$$

являются гиперболы, а также вертикальные и горизонтальные прямые. Пусть группа преобразований (3) переводит состояние x в состояние x'. Тогда на возрастание температуры система реагирует убыванием энтропии и наоборот. Из (3) следует равенство $S'T' = ST$.

Из инвариантности двуметрической функции (f^1, f^2) пространства M относительно группы движений следует, что цикл Карно любой равновесной ТДС можно заменить на физически более выгодный цикл Карно с тем же КПД η и той же полезной работой A.

2. Метрические функции двуметрических двумерных многообразий. В данном параграфе определяются двуметрические многообразия и строятся их метрические функции.

Пусть M — гладкое двумерное многообразие, $T(M)$ — касательное расслоение, каждый слой $T_x(M)$ которого будем рассматривать как аффинное пространство. Стандартный слой R^2 является линейным пространством, который также будем рассматривать как аффинное пространство. Пусть $A(M)$ — расслоение аффинных реперов $\widetilde{u}$ со структурной группой $A(2,R)$, которая является группой аффинных преобразований. Аффинный репер многообразия M в точке x состоит из точки $p \in T_x(M)$ и линейного репера $u = (X_1, X_2)$ в x. Тогда $\widetilde{u} = (p; X_1, X_2)$. Заметим, что элементы из $A(2,R)$ можно представлять в виде $\widetilde{a} = \left(\begin{smallmatrix} a & \xi \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, причем $a \in GL(2,R)$, $\xi \in R^2$. Каждый аффинный репер $\widetilde{u}$ из $A(M)$ можно рассмотреть как аффинное преобразование R^2 на $T_x(M)$ [3]. Пусть o — начало в R^2 и (e_1, e_2) — фиксированный базис в R^2. Тогда $\widetilde{u}(o; e_1, e_2) = (p; X_1, X_2)$.

Рассмотрим гладкое отображение

$$\omega : A_x(M) \times A_x(M) \times T_x(M) \to R^2, \tag{8}$$

которое задается следующей формулой. Возьмем произвольные аффинные реперы $\widetilde{u}, \widetilde{v} \in A_x(M)$. Пусть произвольный вектор $X \in T_x(M)$ в базисе $\widetilde{v}$ имеет координаты X^1, X^2. Тогда для функции (8) имеем

$$\omega(\widetilde{u}, \widetilde{v}, X) = a_i^j X^i e_j + \xi^i e_i, \quad i, j = 1, 2. \tag{9}$$

Предположим, что $\widetilde{v} = (q; Y_1, Y_2)$ и $\widetilde{u} = (p; X_1, X_2)$. В отношении отображения (8) выдвинем требование $\widetilde{a} = \widetilde{X}^{-1}$, где $\widetilde{X}$ — матрица отличия репера $\widetilde{u}$ от репера $\widetilde{v}$. Для открытого покрытия U_α многообразия M (в силу локальной тривиальности расслоения $A(M)$) существует семейство изоморфизмов $\varkappa_\alpha : A(U_\alpha) \to U_\alpha \times A(2,R)$, определяющих сечения через $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$ для $\sigma_\alpha : U_\alpha \to A(M)$

по формулам $\sigma_{1\alpha}(x)=\varkappa_{1\alpha}^{-1}(x,e)$ и $\sigma_{2\alpha}(x)=\varkappa_{2\alpha}^{-1}(x,e)$ соответственно. Тогда соответствие $x\mapsto\omega$ является гладким в произвольной координатной окрестности $U\subset M$. Поэтому элементы матрицы $\widetilde{a}$ являются гладкими функциями в U, которые будем называть *структурными функциями* двуметрического многообразия M.

Лемма. *При переходе от системы координат U к системе координат U' в точках их пересечения структурные функции $\widetilde{a}$ преобразуются по закону*

$$a_i'^j=a_k^j\frac{\partial x^k}{\partial x'^i},\quad \xi'^i=\xi^i,\quad i,j,k=1,2,$$

где a — линейная компонента структурных функций $\widetilde{a}$ в координатной окрестности U, а a' — линейная компонента матрицы $\widetilde{a}'$ в координатной окрестности U'.

Из этой леммы следует, что функции (9) инвариантны относительно произвольной замены координат.

Рассмотрим замкнутую подгруппу Ли $G\subset A(2,R)$. Обозначим через $Q(M,G)$ или просто Q редуцированное подрасслоение расслоения $A(M)=P(M,A(2,R))$. Рассмотрим сужение отображения (8) на Q_x относительно первого аргумента

$$\omega: Q_x(M)\times A_x(M)\times T_x(M)\to R^2. \tag{10}$$

Это отображение представим в виде $\omega(\pi(\widetilde{u}),\widetilde{v},X)$, где $\widetilde{u},\widetilde{v}\in A_x(M)$, а $\pi: A_x(M)\to Q_x(M)$ — гладкая проекция, которая реперы $b\psi(\widetilde{u}')$, $b\in A(2,R)/G$, отображает в $\widetilde{u}'$. Из гладкости отображения π следует, что функция (10) является гладкой. Тогда для фиксированного репера $\widetilde{v}\in A_x(M)$

$$\omega_{\tilde{v}}(\widetilde{u},X)=a_i^jX^ie_j+\xi^je_j,\quad i,j=1,2, \tag{11}$$

где $\widetilde{u}$ — произвольный репер из Q_x. Поскольку в (11) $\widetilde{u}$ — произвольный репер из Q_x, а $\widetilde{v}$ — фиксированный репер из $A_x(M)$, то для структурных функций $\widetilde{a}$ G-пространства справедливо разложение

$$\widetilde{a}=\widetilde{b}\widetilde{c}, \tag{12}$$

где в произвольной точке из U матрица $\widetilde{b}$ — произвольный элемент подгруппы G, а $\widetilde{c}$ — некоторая фиксированная матрица из $A(2,R)$. Ниже под $\widetilde{v}$ будет пониматься репер $(0;\partial_{x^1},\partial_{x^2})$. Можно показать, что соответствие $x\mapsto\omega$ гладко.

Пусть подгруппа Ли G как группа преобразований задается уравнениями (4). Тогда для структурных функций $\widetilde{a}$ имеем разложение (12), причем в каждой точке из U

$$\widetilde{b}=\begin{pmatrix}e^{\varepsilon\alpha} & 0 & b\\ 0 & e^{-\varepsilon\alpha} & (1-\varepsilon)a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \varepsilon=0,1.$$

Поскольку $\widetilde{u}$ — произвольный аффинный репер из $Q(M,G)$, то отображение (11) можно представить в виде

$$\omega_{\tilde{v}}(\widetilde{u},X)=((a_i^1X^i+\xi^1)e^{\varepsilon\alpha}+b)e_1+((a_i^2X^i+\xi^2)e^{-\varepsilon\alpha}+(1-\varepsilon)a)e_2. \tag{11'}$$

Возьмем два вектора X и Y из пространства $T_x(M)$ и определим с помощью отображения (11′) их образы в пространстве R^2: $\omega_{\tilde{v}}(\widetilde{u},X)$ и $\omega_{\tilde{v}}(\widetilde{u},Y)$. В силу произвольности выбора репера $\widetilde{u}$ получим два семейства векторов в R^2, которые являются орбитами группы G. Так как группа G двухпараметрическая и действует просто транзитивно в R^2, то существуют два независимых двухточечных инварианта этой группы — (1) и (2). Поэтому приходим к двуметрическим функциям

$$f^1(X,Y) = a_i^1 X^i - a_i^1 Y^i, \quad f^2(X,Y) = a_i^2 X^i - a_i^2 Y^i; \tag{13}$$

$$\begin{aligned} f^1(X,Y) &= (a_i^1 X^i - a_i^1 Y^i)(a_i^2 X^i + \xi^2), \\ f^2(X,Y) &= (a_i^1 X^i - a_i^1 Y^i)(a_i^2 Y^i + \xi^2), \end{aligned} \tag{14}$$

где $i,j = 1,2$. Заметим, что двуметрические функции (13) и (14) определяются двумя ковекторными полями и одним скалярным полем.

Двумерное многообразие M будем называть двуметрическим, если в нем определена двуметрическая функция (13) *или* (14). Двуметрическая функция инвариантна относительно преобразований структурных функций $\widetilde{a} \to \widetilde{b}\widetilde{a}$.

Воспользуемся тем, что дифференциалы координат dx преобразуются по векторному закону, т. е. образуют вектор. Тогда, полагая в (13) и (14) $Y^i = 0$, $X^i = dx^i$, получим

$$f^1 = a_i^1 dx^i, \quad f^2 = a_i^2 dx^i; \tag{13$'$}$$

$$f^1 = (a_i^1 dx^i)(a_i^2 dx^i + \xi^2), \quad f^2 = a_i^1 dx^i \xi^2. \tag{14$'$}$$

Если для некоторых двуметрических пространств в U можно подобрать такую матрицу $\widetilde{b}$, что $a_i^j = \delta_i^j$, $\xi^i = x^i$, то метрические функции приобретут вид (1$'$) и (2$'$). Такие пространства называются локально плоскими.

3. Связности двуметрических двумерных пространств. Теперь приступим к исследованию связностей в двуметрических двумерных пространствах. Предположим, что в расслоении аффинных реперов $L(M)$ задана аффинная связность.

Аффинная связность в $L(M)$ двуметрического двумерного пространства M называется *согласованной*, если параллельный перенос слоев из $T(M)$ сохраняет двуметрическую функцию $f = (f^1, f^2)$. Из определения согласованной связности пространства M следуют равенства

$$\nabla_k f^1(X,Y) = 0, \quad \nabla_k f^2(X,Y) = 0. \tag{15}$$

Теорема 1. *Компоненты символов Кристоффеля* Γ *согласованной связности в координатной окрестности* U *двуметрических двумерных пространств с метрическими функциями* (13) *и* (14) *имеют следующие выражения*:

для двуметрики (13)

$$\Gamma_{ik}^l = \overline{a}_j^l \frac{\partial a_i^j}{\partial x^k}, \tag{16}$$

где $\overline{a}$ — матрица, обратная к матрице a;

для двуметрики (14)

$$\Gamma_{ik}^n = \overline{a}_m^n \frac{\partial a_i^m}{\partial x^k} + \overline{a}_m^n \widetilde{a}_i^m \frac{\partial ln \xi^2}{\partial x^k}, \quad i,j,k,l,n,m = 1,2, \tag{17}$$

причем $\widetilde{a}_i^m = \varepsilon(m) a_i^m$, $\varepsilon(1) = 1$, $\varepsilon(2) = -1$.

Доказательство. Предположим, что X — параллельно переносимое векторное поле. Вычисляя ковариантные производные метрических функций f^1 и f^2 и приравнивая согласно (15) их к нулю, для первой двуметрики получаем

$$\nabla_k a_i^1 = 0, \quad \nabla_k a_i^2 = 0.$$

Расписывая эти две ковариантные производные, а затем их объединяя и выражая символы Γ, приходим к выражениям (16). Во втором случае вычисляя ковариантные производные, имеем

$$\left(\frac{\partial a_i^1}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l a_l^1\right)(a_s^2 X^s + \xi^2) + a_i^1\left(\left(\frac{\partial a_s^2}{\partial x^k} - \Gamma_{sk}^l a_l^2\right)X^s + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^k}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial a_i^1}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l a_l^1\right)(a_s^2 Y^s + \xi^2) + a_i^1\left(\left(\frac{\partial a_s^2}{\partial x^k} - \Gamma_{sk}^l a_l^2\right)Y^s + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^k}\right) = 0.$$

В касательном пространстве $T_x(M)$, где x — произвольная точка из M, эти выражения представляют собой линейные функции относительно координат векторов X и Y. Из этих равенств следует, что их коэффициенты равны нулю. Поэтому приходим к (17). □

Следствие. Символы Кристоффеля (16) инвариантны относительно тождественных преобразований структурных функций a, а символы Кристоффеля (17) инвариантны относительно преобразований $a_i^1 \to e^\alpha a_i^1$, $a_i^2 \to e^{-\alpha} a_i^2$, $\xi^2 \to e^{-\alpha}\xi^2$, $\xi^1 \to e^\alpha \xi^1 + b$.

Найдем значения компонент символов Кристоффеля согласованной связности локально плоских пространств. Из выражений (16) будет следовать

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \tag{16'}$$

а из выражений (17) —

$$\Gamma_{1k}^1 = \frac{\partial(ln\xi^2)}{\partial x^k}, \quad \Gamma_{2k}^2 = -\frac{\partial(ln\xi^2)}{\partial x^k}, \quad \Gamma_{jk}^i = 0, \quad i \neq j. \tag{17'}$$

Для нахождения компонент тензора кривизны R (в выше рассмотренной координатной окрестности U) связности с символами Кристоффеля (16′) и (17′) воспользуемся формулой

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{lj}^m \Gamma_{km}^i - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} - \Gamma_{kj}^m \Gamma_{lm}^i.$$

Прямой подстановкой несложно убедиться в том, что компоненты тензора кривизны R для этих связностей тождественно обращаются в нуль.

Вычислим компоненты тензора кручения T, $T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$. Воспользовавшись выражениями (16) и (17), находим

для многообразия с двуметрикой (13)

$$T_{ij}^k = \overline{a}_l^k\left(\frac{\partial a_i^l}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j^l}{\partial x^i}\right);$$

для многообразия с двуметрикой (14)

$$T_{ij}^k = \overline{a}_l^k\left(\frac{\partial a_i^l}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j^l}{\partial x^i}\right) + \overline{a}_l^k\left(\widetilde{a}_i^l \frac{\partial \ln \xi^2}{\partial x^j} - \widetilde{a}_j^l \frac{\partial \ln \xi^2}{\partial x^i}\right),$$

причем $i, j, k, l = 1, 2$.

Кривая x_t, $a < t < b$, двуметрического двумерного многообразия M с согласованной связностью называется *геодезической*, если касательное векторное поле $X = \dot{x}_t$, определенное вдоль x_t, параллельно вдоль x_t, т. е. $\nabla_X X$ существует и равно нулю для всех t [3].

Из определения геодезической следует, что она удовлетворяет системе уравнений

$$\ddot{x}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \quad i, j, l = 1, 2, \tag{18}$$

где точка над функцией означает производную по параметру t. Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы уравнения геодезических (18) для двуметрических двумерных пространств проинтегрировать полностью один раз в нормальной координатной окрестности.

Теорема 2. *Геодезическая линия для пространства с двуметрикой* (13) *в координатной окрестности* U *относительно согласованной связности является решением системы дифференциальных уравнений первого порядка*

$$a^1_i \dot{x}^i = a^1, \quad a^2_j \dot{x}^j = a^2, \quad i, j = 1, 2, \tag{19}$$

где $a^1, a^2 = \mathrm{const}$.

Доказательство. Подставляя выражения для символов Кристоффеля (16) в уравнения (18), а затем умножая слева на матрицу a^n_l и суммируя, приходим к уравнениям $a^n_l \ddot{x}^l + \dot{a}^n_l \dot{x}^l = 0$. Интегрируя эти уравнения, получаем (19). □

Теорема 3. *Геодезическая линия для пространства с двуметрикой* (14) *в координатной окрестности* U *относительно согласованной связности является решением системы дифференциальных уравнений первого порядка*

$$a^1_i \dot{x}^i = a^1/\xi^2, \quad a^2_j \dot{x}^j = a^2 \xi^2, \quad i, j = 1, 2, \tag{20}$$

где $a^1, a^2 = \mathrm{const}$, *причем функция* ξ^2 *в* U *отлична от нуля.*

Доказательство. Подставляя выражения для символов Кристоффеля (17) в уравнения (18), а затем умножая слева на матрицу a^n_l и суммируя, приходим к уравнениям

$$a^1_l \ddot{x}^l + \dot{a}^1_l \dot{x}^l + a^1_l \dot{x}^l \dot{\xi}^2/\xi^2 = 0, \quad a^2_l \ddot{x}^l + \dot{a}^2_l \dot{x}^l - a^1_2 \dot{x}^l \dot{\xi}^2/\xi^2 = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем (20). □

Пусть K_U — множество решений систем уравнений вида (19) в координатной окрестности U, а N_U — множество решений систем уравнений вида (20). Заметим, что в K_U есть геодезическая линия пространства с двуметрикой (13), а в N_U — геодезическая линия пространства с двуметрической функцией (14). Обратим внимание на то, что произвольная кривая из семейства K_U является интегральной кривой векторного поля λ в U, для которого

$$\lambda^1 = \overline{a}^1_j a^j, \quad \lambda^2 = \overline{a}^2_j a^j, \tag{21}$$

где $\overline{a}$ — матрица, обратная к матрице a. Эти интегральные кривые являются решениями системы уравнений

$$\dot{x}^1 = \overline{a}^1_j a^j, \quad \dot{x}^2 = \overline{a}^2_j a^j. \tag{19$'$}$$

Аналогично, кривая из семейства N_U является интегральной кривой векторного поля в U

$$\lambda^1 = \overline{a}^1_1 a^1/\xi^2 + \overline{a}^1_2 a^2 \xi^2, \quad \lambda^2 = \overline{a}^2_1 a^1/\xi^2 + \overline{a}^2_2 a^2 \xi^2,$$

которая является решением системы уравнений

$$\dot{x}^1 = \overline{a}^1_1 a^1/\xi^2 + \overline{a}^1_2 a^2 \xi^2, \quad \dot{x}^2 = \overline{a}^2_1 a^1/\xi^2 + \overline{a}^2_2 a^2 \xi^2. \tag{20$'$}$$

С данного момента и до конца параграфа под U будет пониматься нормальная координатная окрестность с началом в точке x_0. Произвольную точку нормальной окрестности можно соединить с началом единственной геодезической. Обозначим через $K_U(x_0) \subset K_U$ ($N_U(x_0) \subset N_U$) подмножество кривых, проходящих через точку x_0. Для выяснения того, какая кривая в $K_U(x_0)$ или в $N_U(x_0)$ является геодезической, воспользуемся определением, т. е. тем, что при параллельном переносе касательный вектор вдоль геодезической переходит также в касательный вектор. Тогда

$$\frac{\partial \lambda^i}{\partial x^k} \lambda^k + \Gamma^i_{jk} \lambda^j \lambda^k = 0, \quad i, j, k = 1, 2. \tag{22}$$

Эта система уравнений в U всегда интегрируема, поскольку через точку x_0 в произвольном направлении выходит единственная геодезическая линия. Расписывая (22), получаем

$$\frac{\partial \lambda^1}{\partial x^1}\lambda^1 + \frac{\partial \lambda^1}{\partial x^2}\lambda^2 + \Gamma^1_{11}\lambda^1\lambda^1 + \Gamma^1_{12}\lambda^1\lambda^2 + \Gamma^1_{21}\lambda^2\lambda^1 + \Gamma^1_{22}\lambda^2\lambda^2 = 0,$$
$$\frac{\partial \lambda^2}{\partial x^1}\lambda^1 + \frac{\partial \lambda^2}{\partial x^2}\lambda^2 + \Gamma^2_{11}\lambda^1\lambda^1 + \Gamma^2_{12}\lambda^1\lambda^2 + \Gamma^2_{21}\lambda^2\lambda^1 + \Gamma^2_{22}\lambda^2\lambda^2 = 0.$$

Для многообразия с двуметрикой (13) подставляя в (22) соответствующие выражения для векторного поля (21) и выражения для символов Кристоффеля (16), приходим к тождеству. Таким образом, в пространстве с двуметрической функцией (13) в нормальной координатной окрестности U с началом в точке x_0 геодезической, проходящей через x_0, является произвольная кривая из семейства $K_U(x_0)$. Аналогичным образом в пространстве с двуметрикой (14) для геодезической из $N_U(x_0)$ выполняется тождество

$$\frac{\partial b^i}{\partial x^k}\overline{a}^k_s b^s + \widetilde{a}^i_j \frac{\partial \ln \xi^2}{\partial x^k}\overline{a}^j_m b^m \overline{a}^k_s b^s = 0, \tag{23}$$

причем $b^i = a^i/(\xi^2)^{\varepsilon(i)}$, $i,j,k,s,m = 1,2$. Структурные функции в окрестности U с началом в x_0, произвольные для пространства с двуметрикой (13) и удовлетворяющие условию (23) для пространства с двуметрикой (14), будем называть *каноническими*. Если для пространства с двуметрикой (14) в нормальной окрестности U справедливы равенства $a^i_j = \delta^i_j$, то условия (23) выполняются тождественно, поэтому каноническими структурными функциями являются δ^i_j, ξ^1, ξ^2.

Найдем геодезические линии некоторых пространств. Возьмем пространство с двуметрикой (13), которое в нормальной окрестности U с началом в x_0 является плоским, т. е. в U $a^i_j = \delta^i_j$. Тогда в этой окрестности для уравнений геодезических линий (19$'$) с начальными условиями $x^1(0) = x^1_0 = 0$, $x^2(0) = x^2_0 = 0$ имеем

$$x^1(t) = a^1 t, \quad x^2(t) = a^2 t,$$

т. е. геодезическими, проходящими через x_0, являются прямые, выходящие из этой точки.

Аналогично, для пространства с двуметрикой (14), для которого в нормальной окрестности U с началом в точке x_0 $a^i_j = \delta^i_j$, уравнения геодезических линий (20$'$), проходящих через точку $x^1(0) = x^1_0 = 0$, $x^2(0) = x^2_0 = 1$, принимают вид

$$\dot{x}^1 = a^1/\xi^2, \quad \dot{x}^2 = a^2\xi^2,$$

причем условия (23) выполняются тождественно, т. е. любая кривая, удовлетворяющая последней системе и проходящая через начало, является геодезической. Заметим, что векторные поля

$$\lambda^1 = a^1/\xi^2, \quad \lambda^2 = a^2\xi^2$$

не имеют особенностей.

Рассмотрим случай локально плоского пространства, когда в U еще $\xi^i = x^i$. Тогда, интегрируя уравнения геодезических с начальными условиями $x^1(0) = x^1_0 = 0$, $x^2(0) = x^2_0 = 1$, получим

$$x^1(t) = a^1 t, \qquad x^2(t) = 1,$$
$$x^1(t) = -\frac{a^1}{a^2}e^{-a^2 t}, \quad x^2(t) = e^{a^2 t},$$

причем $c_2 \neq 0$, т. е. геодезическими являются прямые и гиперболы, проходящие через точку $(0, 1)$.

4. Двуметрические двумерные пространства, допускающие группы изометрий. Исследуем теперь двуметрические пространства M, допускающие группу изометрий. Преобразование двуметрического двумерного многообразия M называется изометрией, если оно сохраняет метрическую функцию f. Пусть X — векторное поле в двуметрическом многоообразии M, которое в координатной окрестности U произвольной точки x определяет однопараметрическую группу изометрий φ_t. Это векторное поле называется инфинитезимальной изометрией двуметрического пространства M. При этом выполняются равенства

$$L_X f^1 = 0, \quad L_X f^2 = 0,$$

где L_X — производная Ли в направлении векторного поля X. Поэтому векторное поле X является инфинитезимальной изометрией.

Теорема 4. *Для того чтобы в координатной окрестности U произвольной точки двуметрического двумерного многообразия M векторное поле X было инфинитезимальной изометрией, необходимо и достаточно, чтобы имела место следующая система дифференциальных уравнений:*

для пространств с двуметрикой $(13')$

$$\frac{\partial a^i_j}{\partial x^k} X^k + a^i_k \frac{\partial X^k}{\partial x^j} = 0; \tag{24}$$

для пространств с двуметрикой $(14')$

$$\frac{\partial a^i_j}{\partial x^k} X^k + a^i_k \frac{\partial X^k}{\partial x^j} = \varepsilon(i) a^i_j \frac{\partial \ln \xi^2}{\partial x^k} X^k, \tag{25}$$

где $i, j, k = 1, 2$, причем X^1 и X^2 — координаты векторного поля X, $\varepsilon(1) = -1$, $\varepsilon(2) = 1$.

Доказательство. Воспользуемся выражениями для производной Ли L_X в направлении векторного поля X 1-форм и функций. Вычисляя производные Ли двуметрических функций $(13')$ и $(14')$, приходим к следующим равенствам:

для двуметрики $(13')$

$$L_X f^1 = \left(\frac{\partial a^1_j}{\partial x^k} X^k + a^1_k \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) dx^j, \quad L_X f^2 = \left(\frac{\partial a^2_j}{\partial x^k} X^k + a^2_k \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) dx^j;$$

для двуметрики $(14')$

$$L_X f^1 = \left(\frac{\partial a^1_i}{\partial x^k} X^k + a^1_k \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right) dx^i (a^2_j dx^j + \xi^2) + a^1_i dx^i \left[\left(\frac{\partial a^2_j}{\partial x^k} X^k + a^2_k \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) dx^j + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^k} X^k \right],$$
$$L_X f^2 = \left(\frac{\partial a^1_i}{\partial x^k} X^k + a^1_k \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right) dx^i \xi^2 + a^1_i dx^i \frac{\partial \xi^2}{\partial x^k} X^k.$$

Из этих равенств следует, что если векторное поле X является инфинитизимальной изометрией, то имеют место уравнения (24) и (25) соответственно, и наоборот. □

Следствие. Уравнения (24) инвариантны относительно тождественных преобразований структурных функций a, а уравнения (25) инвариантны относительно преобразований $a^1_i \to e^\alpha a^1_i$, $a^2_i \to e^{-\alpha} a^2_i$, $\xi^2 \to e^{-\alpha} \xi^2$, $\xi^1 \to e^\alpha \xi^1 + b$.

Воспользовавшись, далее, выражениями для символов Кристоффеля (16) и (17), после несложных преобразований из (24) и (25) приходим

для пространств с двуметрикой $(13')$

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} X^k = 0;$$

для пространств с двуметрикой $(14')$

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} X^k - 2G^i_{jk} X^k = 0,$$

где введено сокращающее обозначение $G^i_{jk} = \overline{a}^i_l \widetilde{a}^l_j \frac{\partial \ln \xi^2}{\partial x^k}$.

Проинтегрируем уравнения (24) и (25) для частного случая, когда в координатной окрестности U произвольной точки $a^i_j = \delta^i_j$.

Теорема 5. *Операторы группы инфинитезимальных изометрий в координатной окрестности U с двуметрикой $(1')$ имеют вид*

$$X^1 = \partial_{x^1}, \quad X^2 = \partial_{x^2}. \tag{26}$$

Доказательство. Задача сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial X^1}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial X^1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial X^2}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial X^2}{\partial x^2} = 0,$$

от которой приходим к оператору алгебры Ли $X = a^1 \partial_{x^1} + a^2 \partial_{x^2}$, где a^1 и a^2 — произвольные постоянные. Полагая в первом случае $a^1 = 1$, $a^2 = 0$, а во втором $a^1 = 0$, $a^2 = 1$, приходим к операторам (26). $\square$

Несложно убедиться в том, что геодезическая линия пространства с двуметрикой $(1')$ является орбитой группы изометрий с операторами (26).

Записывая уравнения (25) для случая $a^i_j = \delta^i_j$, получаем

$$X^1 = ax^1 + c, \quad X^2 = -ax^2 - d, \quad \frac{\partial X^1}{\partial x^1}\xi^2 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^k} X^k = 0.$$

Далее, наша цель состоит в нахождении функций ξ^2, для которых последняя система разрешима. Заметим, что функция $\xi^2 \neq \text{const}$, поскольку иначе от $(14')$ сможем перейти к $(13')$, для этого достаточно положить $g^1 = f^2/\xi^2$, $g^2 = \xi^2 f^1/f^2 - \xi^2$. Поэтому возможны два случая: 1) $a \neq 0$, 2) $a = 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$.

В первом случае имеем уравнение для функции ξ^2

$$\xi^2 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1}(x^1 + \alpha) - \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2}(x^2 + \beta) = 0, \tag{27}$$

где a, c, d — произвольные постоянные, причем $\alpha = c/a$, $\beta = d/a$.

Во втором случае приходим к уравнению

$$c\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} - d\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = 0. \tag{28}$$

Интегрируя уравнение (27), находим

$$\xi^2 = \frac{\psi((x^1 + \alpha)(x^2 + \beta))}{x^1 + \alpha}. \tag{29}$$

Заметим, что функция (29) не зависит от переменной x^1 тогда и только тогда, когда ψ — однородная функция, т. е.

$$\psi = \theta(x^1 + \alpha)(x^2 + \beta), \tag{29'}$$

где $\theta = \text{const}$. Интегрируя уравнение (28) при $c \neq 0$, получим

$$\xi^2 = \varphi(\gamma_1 x^1 + x^2), \tag{30}$$

где введено обозначение $\gamma_1 = d/c$. Аналогично, если $d \neq 0$, то интегралом уравнения (28) будет

$$\xi^2 = \varphi(x^1 + \gamma_2 x^2), \tag{31}$$

где $\gamma_2 = c/d$.

Теорема 6. *Двуметрическое пространство с двуметрикой*

$$f^1 = dx^1(dx^2 + \xi^2), \quad f^2 = dx^1\xi^2$$

в координатной окрестности U допускает двупараметрическую группу изометрий, если $\xi^2 = \theta(x^2+\beta)$, причем ее операторы $X_1 = \partial_{x^1}$, $X_2 = x^1\partial_{x^1} - (x^2+\beta)\partial_{x^2}$; допускает однопараметрическую группу изометрий, если функция ξ^2 имеет вид либо (29), либо (30), либо (31), причем ψ — неоднородная функция, с операторами

$$X_1 = (x^1+\alpha)\partial_{x^1} - (x^2+\beta)\partial_{x^2}; \quad X_1 = \partial_{x^1} - \gamma_1\partial_{x^2}; \quad X_1 = \gamma_2\partial_{x^1} - \partial_{x^2},$$

а в остальных случаях групп изометрий нет.

Следствие. Если в утверждении теоремы 6 предполагать, что $\xi^i = x^i$ (локально плоский случай), то приходим к группе изометрий с базисными векторными полями

$$X_1 = \partial_{x^1}, \quad X_2 = x^1\partial_{x^1} - x^2\partial_{x^2}. \tag{32}$$

Несложно установить, что геодезическая линия пространства с двуметрикой $(2')$ в U является орбитой группы изометрий с операторами (32).

5. Двуметрические пространства в неравновесной термодинамике. Двумерная геометрия с двуметрикой $(14')$ допускает содержательную интерпретацию в неравновесной термодинамике. Рассмотрим неравновесную ТДС и выделим в ней такую область, в которой можно говорить о температуре и об энтропии. Пусть M — пространство состояний этой ТДС. Предположим, что система совершает цикл Карно по пути $T^1S^1T^2S^2T^1$, причем предполагается, что T^1, T^2 и S^1, S^2 мало отличаются друг от друга соответственно. Итак, цикл Карно однозначно характеризуется параметрами (T^1, S^1, T^2, S^2). Пусть T^1 и T^2 — температуры нагревателя и холодильника соответственно, причем $T^1 > T^2$, $S^1 > S^2$. Предположим, что в результате этого процесса система от нагревателя получает количество тепла Q^1 и отдает холодильнику количество тепла Q^2. Интерпретируем двуметрическое пространство M как пространство состояний неравновесной ТДС, а двуметрические функции f^1 и f^2 как количества тепла Q^1 и $|Q^2|$ соответственно. Пусть U — координатная окрестность в M, т. е. множество близких состояний. Рассмотрим два состояния из U: $1 = (x^1+dx^1, x^2+dx^2)$ и $2 = (x^1, x^2)$. Тогда интерпретируем температуру и энтропию этих состояний так: $T^1 = x^2+dx^2$, $S^1 = x^1+dx^1$ и $T^2 = x^2$, $S^2 = x^1$. Заметим, что пара состояний 1 и 2 однозначно определяет цикл Карно с параметрами (T^1, S^1, T^2, S^2). Введем функции

$$A^1_T = \xi^2 + a^2_i dx^i, \quad A^1_S = \xi^1 + a^1_i dx^i, \quad A^2_T = \xi^2, \quad A^2_S = \xi^1. \tag{33}$$

Структурные функции $a^i_j = \delta^i_j$ и $\xi^i = x^i$ в U соответствуют локально равновесному состоянию ТДС. Из (33) следует, что в локально равновесном состоянии $A^1_T = T^1$, $A^1_S = S^1$, $A^2_T = T^2$, $A^2_S = S^2$. Обозначим

$$\delta A_S = A^1_S - A^2_S = a^1_i dx^i, \quad \delta A_T = A^1_T - A^2_T = a^2_i dx^i.$$

Эти выражения в локально плоском случае являются полными дифференциалами и совпадают соответственно с dS и dT. Поскольку M является двумерным многообразием, то эти формы обладают интегрирующими множителями b_S и b_T соответственно. Наличие этих интегрирующих множителей свидетельствует о том, что в неравновесном состоянии в ТДС функционируют "источники энтропии", которые при переходе в равновесное состояние иссякают. Тогда

$$\delta A_S = \frac{1}{b_S}dB_S, \quad \delta A_T = \frac{1}{b_T}dB_T,$$

где B_S и B_T — соответствующие интегралы, причем в равновесном состоянии $b_S = 1$, $b_T = 1$. Таким образом,

$$f^1 = (\delta A_T + A_T)\delta A_S, \quad f^2 = A_T \delta A_S,$$

где $A_T = A_T^2$. Итак, количество тепла для неравновесной ТДС $\delta Q = A_T \delta A_S$. Заметим, что в равновесных состояниях эта формула совпадает с $\delta Q = TdS$. Поэтому согласно второму началу термодинамики и нашей интерпретации

$$\delta Q = A_T \delta A_S = \frac{A_T}{b_S} dB_S = \xi^2 a_i^1 dx^i \leq x^2 dx^1. \tag{34}$$

Заметим, что в случае равновесных состояний (34) представляет собой равенство. Таким образом, для неравновесных процессов первое начало термодинамики записывается в виде

$$dU = \frac{A_T}{b_S} dB_S - PdV.$$

Согласно нашей интерпретации функция (5) представляет собой коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta = \frac{a_i^2 dx^i}{\xi^2 + a_j^2 dx^j} = \frac{\delta A_T}{A_T + \delta A_T} < 1, \tag{5$'$}$$

а функция (6) — полезная работа цикла Карно

$$A = a_i^1 dx^i a_j^2 dx^j = \delta A_S \delta A_T = \frac{dB_S}{b_S} \frac{dB_T}{b_T}.$$

Из неравенства (5′) следует, что $\xi^2 > 0$, $A_T > 0$. По теореме Карно [2] КПД любого теплового цикла с температурой нагревателя T^1 и температурой холодильника T^2 меньше либо равна КПД равновесного цикла Карно с теми же T^1 и T^2. Поэтому

$$\frac{a_i^2 dx^i}{\xi^2 + a_j^2 dx^j} \leq \frac{T^1 - T^2}{T^1} = \frac{dx^2}{x^2 + dx^2}.$$

Заметим, что в равновесном состоянии последнее неравенство превращается в равенство.

Литература

1. Михайличенко Г.Г. *Полиметрические геометрии.* – Новосибирск, 2001. – 144 с.
2. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. *Термодинамика, статистическая физика и кинетика.* – М.: Наука, 1977. – 552 с.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* – М.: Наука, 1981. – 344 с.

Горно-Алтайский государственный университет

Поступила 06.05.2003