Известия вузов. Математика
2008, №6, с. 29–42

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

В.А. КЫРОВ

КЛАССИФИКАЦИЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ТРАНЗИТИВНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ГРУПП ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА R^4 И ИХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ ИНВАРИАНТОВ

Аннотация. В теории физических структур важное значение имеет классификация метрических функций как на одном множестве, так и на двух. Метрическая функция является двухточечным инвариантом некоторой локальной группы Ли преобразований, причем эта группа однозначно восстанавливается из условия инвариантности. По этой теореме для нахождения всех метрических функций достаточно построить полную классификацию локальных групп Ли преобразований. В данной работе проводится классификация алгебр Ли просто транзитивных локальных групп Ли локальных преобразований четырехмерного пространства, а затем находятся метрические функции. Полученные результаты могут быть использованы в физике, в частности, в термодинамике.

Ключевые слова: алгебра Ли, просто транзитивная группа преобразований, базисные операторы, метрическая функция, физическая структура.

УДК: 512.816

Abstract. In the theory of physical structures the classification of metric functions (both on a single set and on two ones) plays an important role. A metric function represents a two-point invariant of a certain local Lie transformation group. Moreover, one can uniquely restore this group with the help of the invariance condition. According to this theorem, in order to find all metric functions, it suffices to construct the complete classification of local Lie transformation groups. In this paper we classify Lie algebras of simply transitive local Lie groups of local transformations of a four-dimensional space, and then we define metric functions. The obtained results admit application in physics, in particular, in thermodynamics.

Keywords: a Lie algebra, a simply transitive transformation group, basis operators, a metric function, a physical structure.

1. Четырехмерные алгебры Ли. Базисные операторы четырехмерной алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований пространства R^4 имеют вид

$$X_\mu = \lambda_\mu(x,y,z,w)\partial_x + \sigma_\mu(x,y,z,w)\partial_y + \tau_\mu(x,y,z,w)\partial_z + \theta_\mu(x,y,z,w)\partial_w, \qquad (1)$$

где $\mu = \overline{1,4}$, причем $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_z = \partial/\partial z$, $\partial_w = \partial/\partial w$. Нас будут интересовать только транзитивные локальные группы Ли локальных преобразований пространства R^4.

Поступила 09.06.2005, окончательный вариант — 02.04.2007

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №02-01-01071.

Напомним, что необходимым и достаточным условием является отличие от нуля определителя

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \sigma_1 & \tau_1 & \theta_1 \\ \lambda_2 & \sigma_2 & \tau_2 & \theta_2 \\ \lambda_3 & \sigma_3 & \tau_3 & \theta_3 \\ \lambda_4 & \sigma_4 & \tau_4 & \theta_4 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Коммутаторы базисных операторов X_ν алгебры Ли линейно выражаются через эти операторы ([1], с. 177). С точностью до изоморфизма коммутаторы $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_1]$, $[X_2, X_3]$, $[X_1, X_4]$, $[X_2, X_4]$, $[X_3, X_4]$ четырехмерных вещественных алгебр Ли имеют соответственно следующие выражения ([2], с. 77; [3], с. 75):

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad \varepsilon X_1, \quad kX_2, \quad lX_3; \tag{3}$$

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad kX_1 + X_2, \quad -X_1 + kX_2, \quad lX_3; \tag{4}$$

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad kX_1 + X_2, \quad kX_2, \quad \varepsilon X_3; \tag{5}$$

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad kX_1 + X_2, \quad kX_2 + X_3, \quad \varepsilon X_3; \tag{6}$$

$$0, \quad 0, \quad X_1, \quad cX_1, \quad X_2, \quad (c-1)X_3; \tag{7}$$

$$0, \quad 0, \quad X_1, \quad 2X_1, \quad X_2, \quad X_2 + X_3; \tag{8}$$

$$0, \quad 0, \quad X_1, \quad qX_1, \quad X_3, \quad -X_2 + qX_3; \tag{9}$$

$$0, \quad -X_1, \quad 0, \quad 0, \quad X_2, \quad 0; \tag{10}$$

$$0, \quad -X_1, \quad X_2, \quad X_2, \quad -X_1, \quad 0; \tag{11}$$

$$X_3, \quad X_2, \quad X_1, \quad 0, \quad 0, \quad 0; \tag{12}$$

$$X_3, \quad X_2, \quad -X_1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \tag{13}$$

где $\varepsilon = 0, 1$, $q^2 < 4$, k, l, c — произвольные числа. Заметим, что по сравнению с ([2], с. 72) здесь в алгебрах (10) и (13) произведен переход к другому базису (в алгебре (10) была осуществлена только перестановка операторов X_1 и X_2, а в алгебре (13) перешли к новому базису $(X_1 + X_3)/2 \to X_1$, $X_2 \to X_2$, $(X_1 - X_3)/2 \to X_3$, $X_4 \to X_4$). Данные преобразования были сделаны Г.Г. Михайличенко для удобства анализа физических структур ([3], с. 75).

При построении классификации воспользуемся фактом, который можно найти, например, в ([1], с. 182).

Теорема 1. *Подпространство N размерности s является подалгеброй r-мерной алгебры Ли L тогда и только тогда, когда*

$$C^{\alpha''}_{\beta'\gamma'} = 0,$$

где $\beta', \gamma' = 1, \ldots, s$, $\alpha'' = s+1, \ldots, r$,
идеалом алгебры Ли L — тогда и только тогда, когда

$$C^{\alpha''}_{\beta'\gamma} = 0,$$

где $\beta' = 1, \ldots, s$, $\alpha'' = s+1, \ldots, r$, $\gamma = 1, \ldots, r$.

Сформулированная теорема позволяет выделить в четырехмерных алгебрах Ли (3)–(13) трехмерные подалгебры. Запишем соответствующие выражения для трех возможных коммутаторов $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_1]$, $[X_2, X_3]$ базисных операторов X_1, X_2, X_3 этих подалгебр ([2], с. 72; [4], с. 46):

$$0, \quad 0, \quad 0; \tag{14}$$

$$0, \quad 0, \quad X_1; \tag{15}$$

$$0, \quad -X_1, \quad X_2; \tag{16}$$
$$0, \quad -X_1, \quad 0; \tag{17}$$
$$X_3, \quad X_2, \quad X_1; \tag{18}$$
$$X_3, \quad X_2, \quad -X_1. \tag{19}$$

Заметим, что алгебры (3)–(6) содержат подалгебру (14), алгебры (7)–(9) — подалгебру (15), алгебра (10) — подалгебру (17), алгебра (11) — подалгебру (16) и, наконец, алгебры (12) и (13) — подалгебры (18) и (19) соответственно. Перейдем теперь к рассмотрению транзитивных локальных групп Ли локальных преобразований пространства R^4.

Лемма 1. *Если четырехмерная алгебра Ли L транзитивной локальной группы Ли локальных преобразований пространства R^4 содержит трехмерную подалгебру N, то эта подалгебра эквивалентна алгебре Ли локальной группы Ли транзитивных локальных преобразований пространства R^3.*

Рассмотрим отдельно четыре следующих случая: N эквивалентна трехмерной алгебре Ли преобразований пространств R^1, R^2, R^3 и R^4 соответственно. Под эквивалентностью понимается локальная эквивалентность групп Ли преобразований.

Первый случай. N эквивалентна трехмерной алгебре Ли преобразований прямой R^1 и потому базисные операторы в подходящей системе координат имеют вид

$$X_\mu = \lambda_\mu \partial_x, \quad X_4 = \lambda_4 \partial_x + \sigma_4 \partial_y + \tau_4 \partial_z + \theta_4 \partial_w,$$

где $\lambda_\mu = \lambda_\mu(x)$, $\mu = 1, 2, 3$, причем первые три оператора составляют базис трехмерной подалгебры. Очевидно, определитель (2), составленный из коэффициентов этих операторов, равен нулю. Значит, исходная группа преобразований не является транзитивной. Противоречие.

Второй случай. N эквивалентна трехмерной алгебре Ли преобразований плоскости R^2 и поэтому в подходящей системе координат для базисных операторов имеем

$$X_\mu = \lambda_\mu \partial_x + \sigma_\mu \partial_y, \quad X_4 = \lambda_4 \partial_x + \sigma_4 \partial_y + \tau_4 \partial_z + \theta_4 \partial_w,$$

где $\lambda_\mu = \lambda_\mu(x, y)$, $\sigma_\mu = \sigma_\mu(x, y)$, $\mu = 1, 2, 3$. Очевидно, и в этом случае определитель (2) обращается в нуль. Противоречие.

Третий случай. N является трехмерной алгеброй Ли преобразований пространства R^3, поэтому базисные операторы в некоторой системе координат имеют вид

$$X_\mu = \lambda_\mu \partial_x + \sigma_\mu \partial_y + \tau_\mu \partial_z, \quad X_4 = \lambda_4 \partial_x + \sigma_4 \partial_y + \tau_4 \partial_z + \theta_4 \partial_w,$$

где $\lambda_\mu = \lambda_\mu(x, y, z)$, $\sigma_\mu = \sigma_\mu(x, y, z)$, $\tau_\mu = \tau_\mu(x, y, z)$, $\mu = 1, 2, 3$. Определитель (2) разложим по элементам четвертого столбца

$$\theta_4 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \sigma_1 & \tau_1 \\ \lambda_2 & \sigma_2 & \tau_2 \\ \lambda_3 & \sigma_3 & \tau_3 \end{vmatrix}.$$

По условию (2) определитель третьего порядка отличен от нуля, т. е. соответствующая группа преобразований R^3 транзитивна.

Четвертый случай. Пусть N является трехмерной алгеброй Ли преобразований пространства R^4. Тогда соответствующая ей группа Ли преобразований действует интранзитивно в пространстве R^4, причем инвариантное многообразие является одномерным, двумерным или трехмерным, т. е. приходим к предыдущим трем случаям. Таким образом, N является подалгеброй, эквивалентной некоторой трехмерной алгебре Ли локальной группы Ли транзитивных преобразований R^3. $\square$

Ниже понадобятся выражения для базисных операторов трехмерной алгебры Ли N группы Ли транзитивных преобразований пространства R^3 ([4], с. 47; [5]):
для алгебры (14)
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z; \tag{20}$$
для алгебры (15)
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + \partial_z; \tag{21}$$
для алгебры (17)
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + \partial_z; \tag{22}$$
для алгебры (16)
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y + \partial_z; \tag{23}$$
для алгебры (18)
$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = \operatorname{tg} y \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \sec y \sin x\partial_z, \\ X_3 = \operatorname{tg} y \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \sec y \cos x\partial_z \end{gathered} \tag{24}$$
и, наконец, для алгебры (19)
$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \exp y \sin x\partial_z, \\ X_3 = \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \exp y \cos x\partial_z. \end{gathered} \tag{25}$$

2. Классификация просто транзитивных локальных групп Ли локальных преобразований четырехмерного пространства. В данном параграфе с точностью до эквивалентности проводится классификация алгебр Ли групп Ли просто транзитивных преобразований пространства R^4. Это означает, что в R^4 можем менять координаты, не изменяя базис в алгебре Ли. Учитывая выше доказанную лемму и классификацию локальных групп Ли просто транзитивных локальных преобразований пространства R^3: (20)–(25), которая проведена также с точностью до эквивалентности, приходим к следующим выражениям для базисных операторов X_1, X_2, X_3, X_4 алгебр Ли (3)–(13) просто транзитивных локальных групп Ли локальных преобразований:
для алгебр (3)–(6)
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \;\; X_4 = \lambda_4\partial_x + \sigma_4\partial_y + \tau_4\partial_z + \theta_4\partial_w; \tag{26}$$
для алгебр (7)–(9)
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + \partial_z, \quad X_4 = \lambda_4\partial_x + \sigma_4\partial_y + \tau_4\partial_z + \theta_4\partial_w; \tag{27}$$
для алгебры (10)
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + \partial_z, \quad X_4 = \lambda_4\partial_x + \sigma_4\partial_y + \tau_4\partial_z + \theta_4\partial_w; \tag{28}$$
для алгебры (11)
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y + \partial_z, \quad X_4 = \lambda_4\partial_x + \sigma_4\partial_y + \tau_4\partial_z + \theta_4\partial_w; \tag{29}$$
для алгебры (12)
$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \operatorname{tg} y \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \sec y \sin x\partial_z, \\ X_3 = \operatorname{tg} y \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \sec y \cos x\partial_z, \quad X_4 = \lambda_4\partial_x + \sigma_4\partial_y + \tau_4\partial_z + \theta_4\partial_w; \end{gathered} \tag{30}$$
для алгебры (13)
$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \exp y \sin x\partial_z, \\ X_3 = \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \exp y \cos x\partial_z, \quad X_4 = \lambda_4\partial_x + \sigma_4\partial_y + \tau_4\partial_z + \theta_4\partial_w. \end{gathered} \tag{31}$$

Теорема 2. *Базисные операторы X_1, X_2, X_3, X_4 алгебр Ли с коммутационными соотношениями (3)–(13) локальных групп Ли транзитивных локальных преобразований пространства R^4 в надлежаще выбранной системе локальных координат задаются следующими выражениями*:

$$\partial_x,\quad \partial_y,\quad \partial_z,\quad \varepsilon x\partial_x + ky\partial_y + lz\partial_z + \partial_w; \tag{32}$$

$$\partial_x,\quad \partial_y,\quad \partial_z,\quad (kx-y)\partial_x + (x+ky)\partial_y + lz\partial_z + \partial_w; \tag{33}$$

$$\partial_x,\quad \partial_y,\quad \partial_z,\quad kx\partial_x + (x+ky)\partial_y + \varepsilon z\partial_z + \partial_w; \tag{34}$$

$$\partial_x,\quad \partial_y,\quad \partial_z,\quad kx\partial_x + (x+ky)\partial_y + (y+\varepsilon z)\partial_z + \partial_w; \tag{35}$$

$$\partial_x,\quad \partial_y,\quad y\partial_x + \partial_z,\quad cx\partial_x + y\partial_y + (c-1)z\partial_z + \partial_w; \tag{36}$$

$$\partial_x,\quad \partial_y,\quad y\partial_x + \partial_z,\quad (2x + z^2/2)\partial_x + (y+z)\partial_y + z\partial_z + \partial_w; \tag{37}$$

$$\partial_x,\quad \partial_y,\quad y\partial_x + \partial_z,\quad (qx + y^2/2 - z^2/2)\partial_x - z\partial_y + (y+qz)\partial_z + \partial_w; \tag{38}$$

$$\partial_x,\quad \partial_y,\quad x\partial_x + \partial_z,\quad y\partial_y + \partial_w; \tag{39}$$

$$\partial_x,\quad \partial_y,\quad x\partial_x + y\partial_y + \partial_z,\quad -y\partial_x + x\partial_y + \partial_w; \tag{40}$$

$$\partial_x,\quad \operatorname{tg} y \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \sec y \sin x\partial_z,\quad \operatorname{tg} y\cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \sec y\cos x\partial_z,\quad \partial_w; \tag{41}$$

$$\partial_x,\quad \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \exp y \sin x\partial_z,\quad \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \exp y\cos x\partial_z,\quad \partial_w, \tag{42}$$

где k, l, q — произвольные постоянные, а $\varepsilon = 0, 1$.

Доказательство. В R^4 перейдем к новой системе координат

$$\xi = \varphi_1(x,y,z,w),\quad \eta = \varphi_2(x,y,z,w),\quad \zeta = \varphi_3(x,y,z,w),\quad \varkappa = \varphi_4(x,y,z,w). \tag{43}$$

Рассмотрим операторы (26). Легко установить, что первые три оператора алгебры (26) сохраняют свой вид при следующих условиях:

$$\varphi_{1x} = 1,\quad \varphi_{2x} = 0,\quad \varphi_{3x} = 0,\quad \varphi_{4x} = 0,\quad \varphi_{1y} = 0,\quad \varphi_{2y} = 1,\quad \varphi_{3y} = 0,$$
$$\varphi_{4y} = 0,\quad \varphi_{1z} = 0,\quad \varphi_{2z} = 0,\quad \varphi_{3z} = 1,\quad \varphi_{4z} = 0.$$

Интегрируя, приходим к формулам допустимой замены координат

$$\xi = x + \varphi_1(w),\quad \eta = y + \varphi_2(w),\quad \zeta = z + \varphi_3(w),\quad \varkappa = \varphi_4(w),\quad \varphi_4' \neq 0. \tag{44}$$

Подставляя базисные операторы (26) в коммутационные соотношения алгебры (3) и приравнивая коэффициенты перед операторами ∂_x, ∂_y, ∂_z, ∂_w, приходим к дифференциальным уравнениям $\lambda_{4x} = \varepsilon$, $\sigma_{4x} = 0$, $\tau_{4x} = 0$, $\theta_{4x} = 0$; $\lambda_{4y} = 0$, $\sigma_{4y} = k$, $\tau_{4y} = 0$, $\theta_{4y} = 0$; $\lambda_{4z} = 0$, $\sigma_{4z} = 0$, $\tau_{4z} = l$, $\theta_{4z} = 0$. Тогда четвертый оператор системы (26) примет вид

$$X_4 = (\varepsilon x + \lambda_4(w))\partial_x + (ky + \sigma_4(w))\partial_y + (lz + \tau_4(w))\partial_z + \theta_4(w)\partial_w,\ \theta_4' \neq 0.$$

Произведя замену координат (44), для X_4 получаем

$$(\varepsilon x + \lambda_4 + \theta_4\varphi_{1w})\partial_\xi + (ky + \sigma_4 + \theta_4\varphi_{2w})\partial_\eta + (lz + \tau_4(w) + \theta_4\varphi_{3w})\partial_\zeta + \theta_4\varphi_{4w}\partial_\varkappa.$$

Функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 возьмем из решения системы дифференциальных уравнений $\lambda_4 + \theta_4\varphi_{1w} = \varepsilon\varphi_1$, $\sigma_4 + \theta_4\varphi_{2w} = k\varphi_2$, $\tau_4 + \theta_4\varphi_{3w} = l\varphi_3$, $\theta_4\varphi_{4w} = 1$. Тогда получим $X_4 = \varepsilon\xi\partial_\xi + k\eta\partial_\eta + l\zeta\partial_\zeta + \partial_\varkappa$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, приходим к базисным операторам (32) алгебры Ли (3) локальной группы Ли просто транзитивных локальных преобразований пространства R^4.

Для алгебр Ли (4)–(6) аналогично приходим к выражениям (33)–(35).

Рассмотрим теперь систему операторов (27) и выясним, при каких ограничениях на φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 сохраняют свой вид первые три оператора из этой системы. Оказывается, должны выполняться уравнения

$$\varphi_{1x}=1,\ \ \varphi_{2x}=0,\ \ \varphi_{3x}=0,\ \ \varphi_{4x}=0,\ \ \varphi_{1y}=0,\ \ \varphi_{2y}=1,\ \ \varphi_{3y}=0,\ \ \varphi_{4y}=0,$$
$$y+\varphi_{1z}=\varphi_2,\ \ \varphi_{2z}=0,\ \ \varphi_{3z}=1,\ \ \varphi_{4z}=0,$$

после решения которых приходим к формулам допустимой замены координат

$$\xi=x+\varphi_2(w)z+\varphi_1(w),\ \ \eta=y+\varphi_2(w),\ \ \zeta=z+\varphi_3(w),\ \ \varkappa=\varphi_4(w),\ \ \varphi_4'\neq 0. \tag{45}$$

Подставляя базисные операторы (27) в коммутационные соотношения алгебры (7) и приравнивая коэффициенты перед операторами ∂_x, ∂_y, ∂_z, ∂_w, приходим к дифференциальным уравнениям $\lambda_{4x}=c$, $\sigma_{4x}=0$, $\tau_{4x}=0$, $\theta_{4x}=0$; $\lambda_{4y}=0$, $\sigma_{4y}=1$, $\tau_{4y}=0$, $\theta_{4y}=0$; $y\lambda_{4x}+\lambda_{4z}-\sigma_4=(c-1)y$, $y\sigma_{4x}+\sigma_{4z}=0$, $y\tau_{4x}+\tau_{4z}=c-1$, $y\theta_{4x}+\theta_{4z}=0$. Тогда для оператора X_4 получаем выражение

$$(x+z\sigma_4(w)+\lambda_4(w))\partial_x+(y+\sigma_4(w))\partial_y+((c-1)z+\tau_4(w))\partial_z+\theta_4(w)\partial_w,\ \ \theta_4'\neq 0.$$

Произведем допустимую замену координат (45)

$$X_4=(cx+\sigma_4z+\lambda_4+((c-1)z+\tau_4)\varphi_2+\theta_4(\varphi_{2w}z+\varphi_{1w}))\partial_\xi+$$
$$+(y+\sigma_4+\theta_4\varphi_{2w})\partial_\eta+((c-1)z+\tau_4+\theta_4\varphi_{3w})\partial_\zeta+\theta_4\varphi_{4w}\partial_\varkappa.$$

Пусть функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 будут решениями системы уравнений $\lambda_4+\tau_4\varphi_2+\theta_4\varphi_{1w}=c\varphi_1$, $\sigma_4+\theta_4\varphi_{2w}=\varphi_2$, $\tau_4+\theta_4\varphi_{3w}=(c-1)\varphi_3$, $\theta_4\varphi_{4w}=1$. Тогда $X_4=c\xi\partial_\xi+\eta\partial_\eta+(c-1)\zeta\partial_\zeta+\partial_\varkappa$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, приходим к выражениям (36).

Аналогично для алгебр Ли (8) и (9).

Для системы операторов (28) найдем ограничения на функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 замены координат (43), при которых первые три оператора сохраняют свой вид. Должны иметь место следующие уравнения:

$$\varphi_{1x}=1,\ \ \varphi_{2x}=0,\ \ \varphi_{3x}=0,\ \ \varphi_{4x}=0,\ \ \varphi_{1y}=0,\ \ \varphi_{2y}=1,\ \ \varphi_{3y}=0,\ \ \varphi_{4y}=0,$$
$$x+\varphi_{1z}=\varphi_1,\ \ \varphi_{2z}=0,\ \ \varphi_{3z}=1,\ \ \varphi_{4z}=0.$$

Тогда допустимая замена координат принимает вид

$$\xi=x+\varphi_1(w)e^z,\ \ \eta=y+\varphi_2(w),\ \ \zeta=z+\varphi_3(w),\ \ \varkappa=\varphi_4(w),\ \ \varphi_4'\neq 0. \tag{46}$$

Подставляя базисные операторы (28) в коммутационные соотношения для алгебры (10) и приравнивая коэффициенты перед операторами ∂_x, ∂_y, ∂_z, ∂_w, приходим к системе уравнений $\lambda_{4x}=0$, $\sigma_{4x}=0$, $\tau_{4x}=0$, $\theta_{4x}=0$; $\lambda_{4y}=0$, $\sigma_{4y}=1$, $\tau_{4y}=0$, $\theta_{4y}=0$; $x\lambda_{4x}+\lambda_{4z}-\lambda_4=0$, $x\sigma_{4x}+\sigma_{4z}=0$, $x\tau_{4x}+\tau_{4z}=0$, $z\theta_{4x}+\theta_{4z}=0$. Тогда оператор X_4 принимает вид

$$\lambda_4(w)e^z\partial_x+(y+\sigma_4(w))\partial_y+\tau_4(w)\partial_z+\theta_4(w)\partial_w,\ \ \theta_4'\neq 0.$$

Производя допустимую замену координат (46), для X_4 получаем

$$(\lambda_4e^z+\tau_4e^z\varphi_1+\theta_4e^z\varphi_{1w})\partial_\xi+(y+\sigma_4+\theta_4\varphi_{2w})\partial_\eta+(\tau_4+\theta_4\varphi_{3w})\partial_\zeta+\theta_4\varphi_{4w}\partial_\varkappa.$$

Пусть φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 — решения системы уравнений $\lambda_4+\tau_4\varphi_1+\theta_4\varphi_{1w}=0$, $\sigma_4+\theta_4\varphi_{2w}=\varphi_2$, $\tau_4+\theta_4\varphi_{3w}=0$, $\theta_4\varphi_{4w}=1$. Тогда $X_4=\eta\partial_\eta+\partial_\varkappa$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, приходим к (39).

Найдем замену координат, сохраняющую вид первых трех операторов системы (29). Тогда должны иметь место уравнения

$$\varphi_{1x}=1,\ \ \varphi_{2x}=0,\ \ \varphi_{3x}=0,\ \ \varphi_{4x}=0,\ \ \varphi_{1y}=0,\ \ \varphi_{2y}=1,\ \ \varphi_{3y}=0,\ \ \varphi_{4y}=0,$$

$$x+\varphi_{1z}=\varphi_1,\quad y+\varphi_{2z}=\varphi_2,\quad \varphi_{3z}=1,\quad \varphi_{4z}=0.$$

Поэтому для допустимой замены координат получаем

$$\xi=x+\varphi_1(w)e^z,\quad \eta=y+\varphi_2(w)e^z,\quad \zeta=z+\varphi_3(w),\quad \varkappa=\varphi_4(w),\quad \varphi_4'\neq 0. \tag{47}$$

Подставляя базисные операторы (29) в коммутационные соотношения для (11), находим $\lambda_{4x}=0,\sigma_{4x}=1,\tau_{4x}=0,\theta_{4x}=0$; $\lambda_{4y}=-1,\sigma_{4y}=0,\tau_{4y}=0,\theta_{4y}=0$; $x\lambda_{4x}+y\lambda_{4y}+\lambda_{4z}-\lambda_4=0$, $x\sigma_{4x}+y\sigma_{4y}+\sigma_{4z}-\sigma_4=0$, $x\tau_{4x}+y\tau_{4y}+\tau_{4z}=0$, $z\theta_{4x}+y\theta_{4y}+\theta_{4z}=0$. Тогда

$$X_4=(-y+\lambda_4(w)e^z)\partial_x+(x+\sigma_4(w)e^z)\partial_y+\tau_4(w)\partial_z+\theta_4(w)\partial_w,\quad \theta_4'\neq 0.$$

После допустимой замены координат (47) имеем

$$X_4=(-y+\lambda_4e^z+\tau_4e^z\varphi_1+\theta_4e^z\varphi_{1w})\partial_\xi+ \\ +(x+\sigma_4e^z+\tau_4e^z\varphi_2+\theta_4e^z\varphi_{2w})\partial_\eta+(\tau_4+\theta_4\varphi_{3w})\partial_\zeta+\theta_4\varphi_{4w}\partial_\varkappa.$$

Пусть функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 являются решениями системы $\lambda_4+\tau_4\varphi_1+\theta_4\varphi_{1w}=-\varphi_2$, $\sigma_4+\tau_4\varphi_2+\theta_4\varphi_{2w}=\varphi_1$, $\tau_4+\theta_4\varphi_{3w}=0$, $\theta_4\varphi_{4w}=1$. Значит, $X_4=-\eta\partial_\xi+\xi\partial_\eta+\partial_\varkappa$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, приходим к (40).

Найдем теперь выражения для базисных операторов локальных групп Ли локальных преобразований с алгебрами Ли (12) и (13). Несложно убедиться в том, что эти алгебры Ли представимы в виде прямой суммы идеалов J_1 и J_2 со следующими базисными операторами и коммутационными соотношениями: для алгебры (12) идеал J_1 порождается операторами X_1, X_2, X_3, причем $[X_1,X_2]=X_3$, $[X_3,X_1]=X_2$, $[X_2,X_3]=-X_1$, а идеал J_2 — оператором X_4; для алгебры (13) идеал J_1 порождается операторами X_1, X_2, X_3, $[X_1,X_2]=X_3$, $[X_3,X_1]=X_2$, $[X_2,X_3]=X_1$, а идеал J_2 — оператором X_4.

Сопоставляя идеалы J_1 и J_2 с трехмерными и одномерными алгебрами Ли групп Ли преобразований пространств R^3 и R^1, заключаем, что они изоморфны алгебрам Ли некоторых локальных групп Ли просто транзитивных локальных преобразований этих пространств.

Рассмотрим касательное пространство $T_a(R^4)$ к многообразию R^4 в точке a. Разобьем это пространство на два дополнительных друг к другу подпространства $\Delta_a(1)$ и $\Delta_a(2)$, т. е. $T_a(R^4)=\Delta_a(1)\oplus\Delta_a(2)$ так, чтобы $(X_1)_a,(X_2)_a,(X_3)_a\in\Delta_a(1)$, а $(X_4)_a\in\Delta_a(2)$. Из свойства простой транзитивности групп преобразований следует то, что векторы $(X_1)_a$, $(X_2)_a$, $(X_3)_a$ и $(X_4)_a$ образуют базисы подпространств $\Delta_a(1)$ и $\Delta_a(2)$ соответственно, а все четыре — базис пространства $T_a(R^4)$. В окрестности точки a эти векторы включаются в гладкие векторные поля X_1, X_2, X_3 и X_4. Поэтому в окрестности точки a многообразия R^4 приходим к дополнительным друг к другу гладким распределениям $\Delta(1)$ и $\Delta(2)$. Поскольку J_1 и J_2 являются идеалами, то распределения $\Delta(1)$ и $\Delta(2)$ инволютивны. Ниже воспользуемся утверждением, доказательство которого можно найти в ([6], с. 19).

Если T' и T'' — два инволютивных распределения на n-мерном многообразии M, которые дополнительны в каждой точке из M, то для каждой точки y из M существует локальная система координат $x^1,\dots,x^n$ с началом в y такая, что $(\partial_{x^1},\dots,\partial_{x^k})$ и $(\partial_{x^{k+1}},\dots,\partial_{x^n})$ образуют локальный базис для T' и T'' соответственно.

Произвольная точка $a\in R^4$ принадлежит интегральным многообразиям $\delta(1)$ и $\delta(2)$ распределений $\Delta(1)$ и $\Delta(2)$, в которых просто транзитивно действуют локальные группы Ли локальных преобразований с алгебрами Ли J_1 и J_2. Из последнего утверждения следует, что в точке a можно ввести такую локальную систему координат, чтобы первые три координаты были локальными координатами на подмногообразии $\delta(1)$, а четвертая координата — локальной координатой на $\delta(2)$. Эти координаты обозначим x, y, z и w соответственно. Тогда базисные операторы алгебр Ли (12) и (13) локальной группы Ли просто транзитивных локальных преобразований пространства R^4 примут вид

$$X_\mu = \lambda_\mu(x,y,z)\partial_x + \sigma_\mu(x,y,z)\partial_y + \tau_\mu(x,y,z)\partial_z, \quad X_4 = \theta_4(w)\partial_w, \tag{48}$$

где $\mu = 1,2,3$. Совмещая (30) и (31) с (48), получаем
для алгебры (12)

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \operatorname{tg} y \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \sec y \sin x\partial_z, \\ &X_3 = \operatorname{tg} y \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \sec y \cos x\partial_z, \quad X_4 = \theta_4(w)\partial_w; \end{aligned} \tag{49}$$

для алгебры (13)

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \exp y \sin x\partial_z, \\ &X_3 = \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \exp y \cos x\partial_z, \quad X_4 = \theta_4(w)\partial_w. \end{aligned} \tag{50}$$

Следует заметить, что операторы (49) и (50) инвариантны относительно замены координат

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z, \quad \varkappa = \varphi_4(w), \quad \varphi_4' \neq 0.$$

Полагая $\theta_4(w)\varphi'(w) = 1$, получаем в R^4 такую систему координат, относительно которой четвертый оператор из (49) или (50) принимает простейший вид $X_4 = \partial_\varkappa$. Тогда в прежних обозначениях координат базисные операторы локальной группы Ли преобразований пространства R^4 с алгеброй Ли (12) и (13) принимают вид (41) и (42). $\square$

3. **4-метрическая физическая структура ранга 3 на одном множестве.** Рассмотрим 4-мерное гладкое многообразие M, элементы которого будем обозначать $i, j, k, \ldots$ Определим гладкую функцию пары точек $f : M \times M \to R^4$, которую будем называть 4-метрикой или просто метрической функцией. Компоненты метрической функции обозначим f^1, f^2, f^3, f^4. Пусть $M_f \subset M \times M$ — область определения метрической функции f. Если в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j таких, что $U(i) \times U(j) \subset M_f$, ввести локальные координаты $i = (x_i, y_i, z_i, w_i)$ и $j = (x_j, y_j, z_j, w_j)$, то метрическая функция f будет иметь следующее координатное представление: $f(ij) = f^\alpha(ij) = f^\alpha(x_i, y_i, z_i, w_i, x_j, y_j, z_j, w_j)$, где $\alpha = 1,2,3,4$.

Будем говорить, что 4-метрика f на многообразии M задает 4-метрическую физическую структуру ранга 3, если выполняются следующие условия [7], [8].

1. Область определения $M_f \subset M \times M$ — открытое и плотное подмножество.
2. Метрическая функция f невырождена, т. е. отличны от нуля якобианы

$$\frac{\partial(f^1(ij), f^2(ij), f^3(ij), f^4(ij))}{\partial(x_i, y_i, z_i, w_i)}, \quad \frac{\partial(f^1(ij), f^2(ij), f^3(ij), f^4(ij))}{\partial(x_j, y_j, z_j, w_j)}.$$

3. Для любой тройки точек $\langle ijk\rangle$ такой, что пары $\langle ij\rangle$, $\langle ik\rangle$, $\langle jk\rangle$ принадлежат M_f, существует четырехкомпонентная функция двенадцати переменных $\varPhi_\alpha = (\varPhi_1, \varPhi_2, \varPhi_3, \varPhi_4)$, где $\alpha = 1,2,3,4$, $\operatorname{grad} \varPhi = 4$, такая, что имеет место система тождеств

$$\varPhi_\alpha(f(ij), f(ik), f(jk)) = 0.$$

Последнее условие называется аксиомой феноменологической симметрии. Геометрию многообразия с выше определенной метрической функцией будем называть феноменологически симметричной ранга 3.

В монографии ([4], с. 36) доказывается, что феноменологически симметричная геометрия с 4-метрикой $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)$ допускает 4-параметрическую группу движений, по которой она восстанавливается как двухточечный инвариант. Поэтому метрическая функция является двухточечным инвариантом группы движений, т. е. по критерию инвариантности имеют место четыре уравнения ([1], с. 34):

$$X_\alpha(i)f(ij) + X_\alpha(j)f(ij) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \tag{51}$$

где X_1, X_2, X_3, X_4 — базисные операторы алгебры Ли группы движений.

Сформулируем теперь лемму, метод доказательства которой разработан в монографии ([4], с. 71) и приведен там для случая трехмерного пространства.

Лемма 2. *Если 4-метрика $f(ij)$ невырождена, то базисные операторы $X_1(i)$, $X_2(i)$, $X_3(i)$, $X_4(i)$ и $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$, $X_4(j)$ определяют просто транзитивные локальные группы Ли локальных преобразований в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ соответственно.*

Лемма 3. *Двухточечный инвариант $f(ij)$ четырехпараметрической просто транзитивной локальной группы Ли локальных преобразований четырехмерного многообразия, алгебра Ли которой изоморфна прямой сумме алгебры Ли трехпараметрической локальной подгруппы Ли и алгебры Ли однопараметрической локальной подгруппы Ли, в подходящих координатах представим в виде*

$$\begin{aligned} &f^1(ij) = f^1(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), \quad f^2(ij) = f^2(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), \\ &f^3(ij) = f^3(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), \quad f^4(ij) = f^4(w_i, w_j). \end{aligned} \tag{52}$$

В таком случае операторы алгебры Ли группы преобразований имеют вид (41) или (42), и поэтому, интегрируя (51), приходим к (52).

Итак, требуется найти все двухточечные инварианты локальных просто транзитивных групп преобразований, классификация которых была проведена в п. 2.

Теорема 3. *С точностью до эквивалентности, т. е. взаимно обратного преобразования метрической функции, и в специально выбранной системе локальных координат 4-метрика, задающая 4-метрическую физическую структуру ранга 3, принимает вид для группы преобразований с алгеброй* (32)

$$\begin{aligned} &f^1(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp[\varepsilon(w_i + w_j)], \quad f^2(ij) = (y_i - y_j)^2 \exp[k(w_i + w_j)], \\ &f^3(ij) = (z_i - z_j)^2 \exp[l(w_i + w_j)], \quad f^4(ij) = w_i - w_j; \end{aligned}$$

для группы преобразований с алгеброй (33)

$$\begin{aligned} &f^1(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \exp\left[-2k \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right], \\ &f^2(ij) = 2 \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + (w_i + w_j), \\ &f^3(ij) = (z_i - z_j)^2 \exp[l(w_i + w_j)], \quad f^4(ij) = w_i - w_j; \end{aligned}$$

для группы преобразований с алгеброй (34)

$$\begin{aligned} &f^1(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp\left[-2k \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right], \quad f^2(ij) = 2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + (w_i + w_j), \\ &f^3(ij) = (z_i - z_j)^2 \exp[\varepsilon(w_i + w_j)], \qquad f^4(ij) = w_i - w_j; \end{aligned}$$

для группы преобразований с алгеброй (35) (*при $k = 0$, $\varepsilon = 0$*)

$$f^1(ij) = x_i - x_j, \quad f^2(ij) = 2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} - (w_i + w_j),$$

$$f^3(ij) = z_i - z_j - \frac{(y_i - y_j)^2}{2(x_i - x_j)}, \quad f^4(ij) = w_i - w_j,$$

(*при* $k = 0$, $\varepsilon = 1$)

$$f^1(ij) = x_i - x_j, \quad f^2(ij) = 2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} - (w_i + w_j),$$

$$f^3(ij) = (x_i - x_j)\ln(z_i - z_j + y_i - y_j + x_i - x_j) - y_i + y_j, \quad f^4(ij) = w_i - w_j,$$

(*при* $k \neq 0$, $\varepsilon = 0$)

$$f^1(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp\left[-2k\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right], \quad f^2(ij) = 2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} - (w_i + w_j),$$

$$f^3(ij) = k(y_i - y_j) - (x_i - x_j) - k^2(z_i - z_j), \quad f^4(ij) = w_i - w_j,$$

(*при* $k \neq 0$, $\varepsilon = 1$)

$$f^1(ij),\ f^2(ij) \ \textit{сохраняются},$$

$$f^3(ij) = 2\frac{z_i - z_j}{x_i - x_j} - k\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right)^2, \quad f^4(ij) = w_i - w_j;$$

для группы преобразований с алгеброй (36)

$$f^1(ij) = (x_i - x_j - z_i(y_i - y_j))^2 \exp[c(w_i + w_j)],$$
$$f^2(ij) = (x_i - x_j - z_j(y_i - y_j))^2 \exp[c(w_i + w_j)],$$
$$f^3(ij) = (y_i - y_j)^2 \exp[(w_i + w_j)], \quad f^4(ij) = w_i - w_j;$$

для группы преобразований с алгеброй (37)

$$f^1(ij) = f^1(x_i - x_j - z_i(y_i - y_j), x_i - x_j - z_j(y_i - y_j), y_i - y_j, w_i, w_j),$$
$$f^2(ij) = f^2(x_i - x_j - z_i(y_i - y_j), x_i - x_j - z_j(y_i - y_j), y_i - y_j, w_i, w_j),$$
$$f^3(ij) = f^3(x_i - x_j - z_i(y_i - y_j), x_i - x_j - z_j(y_i - y_j), y_i - y_j, w_i, w_j), \quad f^4(ij) = w_i - w_j,$$

причем функции f^1, f^2, f^3 *и* f^4 *— независимые интегралы уравнения*

$$\left(2u - \frac{1}{2}\left(\frac{v-u}{\vartheta}\right)^2\right)\frac{\partial F}{\partial u} + \left(2v + \frac{1}{2}\left(\frac{v-u}{\vartheta}\right)^2\right)\frac{\partial F}{\partial v} + \left(2v + \frac{v-u}{\vartheta}\right)\frac{\partial F}{\partial \vartheta} + \frac{\partial F}{\partial w_i} + \frac{\partial F}{\partial w_j} = 0, \quad (53.1)$$

где введены обозначения $u = (x_i - x_j) - (y_i - y_j)z_i$, $v = (x_i - x_j) - (y_i - y_j)z_j$, $\vartheta = y_i - y_j$; *для группы преобразований с алгеброй* (38) *— как для группы преобразований с алгеброй* (37), *причем функции* f^1, f^2, f^3 *и* f^4 *— независимые интегралы уравнения*

$$\left(qu - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{v-u}{\vartheta}\right)^2\right)\frac{\partial F}{\partial u} + \left(qv + \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{v-u}{\vartheta}\right)^2\right)\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{v-u}{\vartheta}\frac{\partial F}{\partial \vartheta} + \frac{\partial F}{\partial w_i} + \frac{\partial F}{\partial w_j} = 0; \quad (53.2)$$

для группы преобразований с алгеброй (39)

$$f^1(ij) = (x_i - x_j)e^{z_i}, \quad f^2(ij) = (x_i - x_j)e^{z_j}, \quad f^3(ij) = (y_i - y_j)e^{w_i}, \quad f^4(ij) = (y_i - y_j)e^{w_j};$$

для группы преобразований с алгеброй (40)

$$f^1(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]\exp[(z_i + z_j)],$$

$$f^2(ij) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + w_i + w_j, \quad f^3(ij) = z_i - z_j, \quad f^4(ij) = w_i - w_j;$$

для группы преобразований с алгеброй (41)

$$f^1(ij) = \sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j, \quad f^2(ij) = z_i - \varepsilon(i) \arcsin\left(\frac{\sin(x_i - x_j)\sin y_j}{\sqrt{1 - (f^1(ij))^2}}\right),$$

$$f^3(ij) = z_j + \varepsilon(j) \arcsin\left(\frac{\sin(x_i - x_j)\sin y_i}{\sqrt{1 - (f^1(ij))^2}}\right), \quad f^4(ij) = w_i - w_j;$$

для группы преобразований с алгеброй (42)

$$f^1(ij) = (x_i - x_j)y_i y_j, \qquad f^2(ij) = z_i + 1/(x_i - x_j)y_i^2,$$
$$f^3(ij) = z_j - 1/(x_i - x_j)y_j^2, \quad f^4(ij) = w_i - w_j,$$

где k, l, c, q — произвольные постоянные, $\varepsilon = 0, 1$, $\varepsilon(i) = \operatorname{sign}\left(\frac{\partial f^1(ij)}{\partial y_i}\right)$, $\varepsilon(j) = \operatorname{sign}\left(\frac{\partial f^1(ij)}{\partial y_j}\right)$.

Под взаимно обратным преобразованием метрической функции понимается обратимое преобразование ее компонент.

Доказательство проводится прямым интегрированием системы (51).

4. 4-метрическая физическая структура ранга (2, 2) на двух множествах. Рассмотрим два 4-мерных гладких многообразия M и N. Элементы многообразий M и N будем обозначать $i, j, k, l, \ldots$ и $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ соответственно. На прямом произведении $M \times N$ определим гладкую функцию пары точек $f : M \times N \to R^4$, которую будем называть 4-метрикой или просто метрической функцией. Пусть $\mathcal{M}_f \subset M \times N$ — область определения метрической функции $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)$. Если в окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$ точек i и α, причем $U(i) \times U(\alpha) \subset \mathcal{M}_f$, ввести локальные координаты x, y, z, w и ξ, η, ζ, ϑ, относительно которых $i = (x_i, y_i, z_i, w_i)$ и $\alpha = (\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha, \vartheta_\alpha)$, то метрическую функцию f можно записать так: $f(i\alpha) = f^\mu(i\alpha) = f^\mu(x_i, y_i, z_i, w_i; \xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha, \vartheta_\alpha)$, причем $\mu = 1, 2, 3, 4$. Ниже индексы у координат будут часто опускаться.

Будем говорить, что 4-метрика f на многообразиях M и N задает 4-метрическую физическую структуру ранга $(2, 2)$, если выполняются следующие условия ([3], с. 16).

1. Область определения $\mathcal{M}_f \subset M \times N$ — открытое и плотное подмножество.

2. Метрическая функция f невырождена, т. е. относительно локальных координат точек i и α отличны от нуля якобианы

$$\frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^3(i\alpha), f^4(i\alpha))}{\partial(x_i, y_i, z_i, w_i)}, \quad \frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^3(i\alpha), f^4(i\alpha))}{\partial(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha, \vartheta_\alpha)}.$$

3. Для любой четверки произвольных точек $\langle ij, \alpha\beta\rangle$ такой, что пары $\langle i\alpha\rangle$, $\langle i\beta\rangle$, $\langle j\alpha\rangle$, $\langle j\beta\rangle$ принадлежат $\mathcal{M}_f$, существует четырехкомпонентная функция шестнадцати переменных $\varPhi_\mu = (\varPhi_1, \varPhi_2, \varPhi_3, \varPhi_4,)$, где $\mu = 1, 2, 3, 4$, $\operatorname{grad} \varPhi = 4$, такая, что имеет место система тождеств

$$\varPhi_\mu(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) = 0.$$

Последнее условие называется аксиомой феноменологической симметрии.

В монографии ([3], с. 23) доказывается, что в многообразиях M и N с 4-метрикой $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)$ действует 4-параметрическая группа движений, т. е. группа преобразований, сохраняющих 4-метрику f, по которым она восстанавливается как двухточечный инвариант. Согласно критерию инвариантности для метрической функции f выполняются уравнения

$$X_\mu(i) f(i\alpha) + \Xi_\mu(\alpha) f(i\alpha) = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \tag{54}$$

где X_1, X_2, X_3, X_4 и Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3, Ξ_4 — операторы действия группы движений в многообразиях M и N соответственно.

Ниже понадобится лемма, аналогичная лемме 2.

Лемма 4. *Если 4-метрическая функция $f(i\alpha)$ невырождена, то базисные операторы X_1, X_2, X_3, X_4 и Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3, Ξ_4 натягивают просто транзитивные локальные группы Ли локальных преобразований в окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$ многообразий M и N соответственно.*

Итак, группа движений в многообразиях M и N действует локально просто транзитивно. Операторы действия этой группы в многообразии M приведены в теореме 2, а выражения для операторов Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3, Ξ_4 совпадают с выражениями для операторов X_1, X_2, X_3, X_4 после переобозначений: $x \to \xi$, $y \to \eta$, $z \to \zeta$, $w \to \vartheta$. Решая уравнения (54), приходим к классификации метрических функций для 4-метрической физической структуры ранга $(2,2)$. Эти результаты можно также получить, введя соответствующие переобозначения в 4-метриках, приведенных в теореме 3.

Теорема 4. *С точностью до эквивалентности, т. е. взаимно обратного преобразования метрической функции, и в специально выбранной системе локальных координат 4-метрика, задающая 4-метрическую физическую структуру ранга* $(2,2)$*, принимает вид для группы преобразований с алгеброй* (32)

$$f^1 = (x+\xi)^2 \exp[\varepsilon(w+\vartheta)], \quad f^2 = (y+\eta)^2 \exp[k(w+\vartheta)],$$
$$f^3 = (z+\zeta)^2 \exp[l(w+\vartheta)], \quad f^4 = w-\vartheta;$$

для группы преобразований с алгеброй (33)

$$f^1 = [(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2] \exp\left[-2k \operatorname{arctg} \frac{y+\eta}{x+\xi}\right],$$
$$f^2 = 2 \operatorname{arctg} \frac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta, \quad f^3 = (z+\zeta)^2 \exp[l(w+\vartheta)], \quad f^4 = w-\vartheta;$$

для группы преобразований с алгеброй (34)

$$f^1 = (x+\xi)^2 \exp\left[-2k \frac{y+\eta}{x+\xi}\right], \quad f^2 = 2\frac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta,$$
$$f^3 = (z+\zeta)^2 \exp[\varepsilon(w-\vartheta)], \qquad f^4 = w-\vartheta;$$

для группы преобразований с алгеброй (35)
(*при* $k=0$, $\varepsilon=0$)

$$f^1 = x+\xi, \quad f^2 = 2\frac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta, \quad f^3 = z+\zeta - \frac{(y+\eta)^2}{2(x+\xi)}, \quad f^4 = w-\vartheta,$$

(*при* $k=0$, $\varepsilon=1$)

$$f^1 = x+\xi, \quad f^2 = 2\frac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta,$$
$$f^3 = (x+\xi)\ln(z+\zeta+y+\eta+x+\xi) - y - \eta, \quad f^4 = w-\vartheta,$$

(*при* $k \neq 0$, $\varepsilon=0$)

$$f^1 = (x+\xi)^2 \exp\left[-2k \frac{y+\eta}{x+\xi}\right], \qquad f^2 = 2\frac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta,$$
$$f^3 = k(y+\eta) - x - \xi - k^2(z+\zeta), \quad f^4 = w-\vartheta,$$

(*при* $k \neq 0$, $\varepsilon = 1$)

$$f^1 = (x+\xi)^2 \exp\left[-2k\frac{y+\eta}{x+\xi}\right], \quad f^2 = 2\frac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta,$$
$$f^3 = 2\frac{z+\zeta}{x+\xi} - k\left(\frac{y+\eta}{x+\xi}\right)^2, \qquad f^4 = w - \vartheta;$$

для группы преобразований с алгеброй (36)

$$f^1 = (x+\xi - z(y+\eta))^2 \exp[c(w+\vartheta)], \quad f^2 = (x+\xi+\zeta(y+\eta))^2 \exp[c(w+\vartheta)],$$
$$f^3 = (y+\eta)^2 \exp[w+\vartheta], \quad f^4 = w - \vartheta;$$

для группы преобразований с алгеброй (37) (*и* (38))

$$f^1 = f^1(x+\xi - z(y+\eta), x+\xi+\zeta(y+\eta), y+\eta, w, \vartheta),$$
$$f^2 = f^2(x+\xi - z(y+\eta), x+\xi+\zeta(y+\eta), y+\eta, w, \vartheta),$$
$$f^3 = f^3(x+\xi - z(y+\eta), x+\xi+\zeta(y+\eta), y+\eta, w, \vartheta), \quad f^4 = w + \vartheta,$$

причем функции f^1, f^2, f^3 *и* f^4 *— независимые интегралы уравнения* (53.1) (*уравнения* (53.2));
для группы преобразований с алгеброй (39)

$$f^1 = (x+\xi)e^z, \quad f^2 = (x+\xi)e^\zeta, \quad f^3 = (y+\eta)e^w, \quad f^4 = (y+\eta)e^\vartheta;$$

для группы преобразований с алгеброй (40)

$$f^1 = [(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2]\exp[z+\zeta], \quad f^2 = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta, \quad f^3 = z - \zeta, \quad f^4 = w - \vartheta;$$

для группы преобразований с алгеброй (41)

$$f^1 = \sin y \sin\eta \cos(x+\xi) + \cos y \cos\eta, \quad f^2 = z + \varepsilon(1)\arcsin\left(\frac{\sin(x+\xi)\sin\eta}{\sqrt{1-(f^1)^2}}\right),$$
$$f^3 = \zeta + \varepsilon(2)\arcsin\left(\frac{\sin(x+\xi)\sin y}{\sqrt{1-(f^1)^2}}\right), \quad f^4 = w + \vartheta;$$

для группы преобразований с алгеброй (42)

$$f^1 = (x+\xi)y\eta, \quad f^2 = z + 1/(x+\xi)y^2, \quad f^3 = \zeta + 1/(x+\xi)\eta^2, \quad f^4 = w + \vartheta,$$

причем k, l, c, q *— произвольные постоянные,* $\varepsilon = 0, 1$, $\varepsilon(1) = \mathrm{sign}\left(\frac{\partial f^1}{\partial y}\right)$, $\varepsilon(2) = \mathrm{sign}\left(\frac{\partial f^1}{\partial \eta}\right)$.

В конце статьи заметим, что используемый здесь метод может быть применен при классификации остальных физических структур минимального ранга (5-метрических, 6-метрических и т. д.). Для ее построения необходима классификация алгебр Ли просто транзитивных локальных групп Ли локальных преобразований пространств R^5, R^6 и т. д. Заметим также, что этим методом Г.Г. Михайличенко построил классификацию триметрических физических структур минимального ранга ([3], с. 124; [4], с. 68), а предварительно — классификацию трехмерных алгебр Ли просто транзитивных локальных групп Ли локальных преобразований пространства R^3 ([9], [5], с. 42).

Литература

[1] Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978 – 400 с.
[2] Петров А.З. *Новые методы в общей теории относительности.* – М.: Наука, 1966 – 496 с.
[3] Михайличенко Г.Г. *Групповая симметрия физических структур.* – Барнаул, Горно-Алтайск, 2003. – 203 с.
[4] Михайличенко Г.Г. *Полиметрические геометрии.* – Новосибирск: НГУ, 2001. – 143 с.
[5] Михайличенко Г.Г. *Трехмерные алгебры Ли локально транзитивных преобразований пространства* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 9. – С. 41–48.
[6] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
[7] Михайличенко Г.Г. *Простейшие полиметрические геометрии* // Докл. РАН. – 1996. – Т. 348. – № 1. – С. 22–24.
[8] Михайличенко Г.Г. *Простейшие полиметрические геометрии.* I // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – № 2. – С. 377–395.
[9] Михайличенко Г.Г. *Некоторые замечания к классификации Ли групп преобразований* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 1986. – № 5. – С. 98.

В.А. Кыров

доцент, кафедра физики и методики преподавания физики,
Горно-Алтайский государственный университет,
649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1,

e-mail: kfizika@gasu.ru

V.A. Kyrov

Associate Professor, Chair of Physics and Physics Teaching Principles,
Gorny Altai State University,
1 Lenkin str., Gorno-Altaisk, 649000, Russia,

e-mail: kfizika@gasu.ru