Известия вузов. Математика
2008, №11, с. 48–59
http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

В.А. КЫРОВ

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Аннотация. В данной работе устанавливается связь s-метрических физических структур ранга $(s+3,2)$ с проективной геометрией. В частности, находятся явные функциональные связи, задающие феноменологическую симметрию. При $s=1$ данная связь выражается через сложное отношение четырех точек. Доказывается, что эти функциональные связи приводят к группе проективных преобразований.

Ключевые слова: физическая структура, проективная геометрия.

УДК: 514.14

Abstract. In this paper we establish connection between s-metric physical structures of rank $(s+3,2)$ and projective geometry. In particular, we find explicit functional relations determining phenomenological symmetry. For $s=1$, this relation is expressed in terms of the anharmonic ratio of four points. We prove that these functional relations lead to the group of projective transformations.

Keywords: physical structure, projective geometry.

1. s-метрическая физическая структура ранга $(s+3,2)$. Определим s-метрическую физическую структуру ранга $(n+1,m+1)$, $s\geq 1$ ([1], с. 16), которую иногда будем называть просто физической структурой. Для этого рассмотрим три многообразия R^s, R^{sm} и R^{sn}, а также функцию $f: R^{sm}\times R^{sn}\to R^s$ с областью определения S_f, которая на элементах действует так: $f:\langle i\alpha\rangle\mapsto (f^1(i\alpha),\dots,f^s(i\alpha))$, и удовлетворяет свойствам

1) S_f — открытое и плотное подмножество в $R^{sm}\times R^{sn}$,
2) функция f достаточно гладкая в области своего определения,
3) s-метрика f невырождена, т.е. открыты и плотны множества $M\subset (R^{sn})^m$ и $N\subset (R^{sm})^n$ такие, что для любых $i_1,\dots,i_n\in M$ и $\alpha_1,\dots,\alpha_m\in N$ якобианы
$$\frac{\partial(f^1(i\alpha),\dots,f^s(i\alpha),\dots,f^1(i\alpha_m),\dots,f^s(i\alpha_m))}{\partial(x_i^1,\dots,x_i^{sm})},$$
$$\frac{\partial(f^1(i_1\alpha),\dots,f^s(i_1\alpha),\dots,f^1(i_n\alpha),\dots,f^s(i_n\alpha))}{\partial(\xi_\alpha^1,\dots,\xi_\alpha^{sn})}, \qquad (*)$$
где $x_i^1,\dots,x_i^{sm}$ — координаты точки i, а $\xi_\alpha^1,\dots,\xi_\alpha^{sn}$ — координаты точки α, не равны нулю.

Определенную таким способом функцию f будем называть метрической, s-метрической или просто s-метрикой (выполнимость метрических аксиом не требуется). Введем также

Поступила 04.07.2005, окончательный вариант — 05.04.2007

функцию $F : R^{sm(n+1)} \times R^{sn(m+1)} \to R^{s(m+1)(n+1)}$, ставящая кортежу $\langle i_1 \cdots i_{n+1}; \alpha_1 \cdots \alpha_{m+1}\rangle$ в соответствие точку $(f(i_1\alpha_1), \ldots, f(i_{n+1}\alpha_{m+1})) \in R^{s(m+1)(n+1)}$. Область определения S_F этой функции открыта и плотна в $R^{sm(n+1)} \times R^{sn(m+1)}$.

Говорят, что s-метрика f задает на R^s, R^{sm} и R^{sn} *s-метрическую физическую структуру ранга* $(n+1, m+1)$, если выполняется аксиома феноменологической симметрии:

4) для каждого кортежа $\langle i_1 \ldots i_{n+1}; \alpha_1 \ldots \alpha_{m+1}\rangle$ из плотного множества в S_F и некоторой его окрестности $U(\langle i_1 \ldots i_{n+1}; \alpha_1 \ldots \alpha_{m+1}\rangle)$ найдется такая гладкая s-компонентная функция $\varPhi : \varepsilon \to R^s$, определенная в некоторой области $\varepsilon \subset R^{s(n+1)(m+1)}$, содержащей точку $F(\langle i_1 \ldots i_{n+1}; \alpha_1 \ldots \alpha_{m+1}\rangle)$, что в ней $\operatorname{rang}\varPhi = s$ и множество $F(U(\langle i_1 \ldots i_{n+1}; \alpha_1 \ldots \alpha_{m+1}\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции $\varPhi$, т. е.
$$\varPhi(f(i_1\alpha_1), \ldots, f(i_1\alpha_{m+1}), \ldots, f(i_{n+1}\alpha_1), \ldots, f(i_{n+1}\alpha_{m+1})) = 0 \tag{1}$$
для всех кортежей из $U(\langle i_1 \ldots i_{n+1}; \alpha_1 \ldots \alpha_{m+1}\rangle)$.

Ниже рассматриваются два случая $n = s+2$, $m = 1$ и $n = s+1$, $m = 1$.

Теорема 1. *s-метрика $f = (f^1, \ldots, f^s) : R^s \times R^{s(s+2)} \to R^s$ с координатным представлением*
$$\begin{aligned}
f^1 &= \frac{x^1\xi^1 + \cdots + x^s\xi^s + \xi^{s+1}}{x^1\xi^{s^2+s+1} + \cdots + x^{s-1}\xi^{s^2+2s-1} + x^s + \xi^{s^2+2s+1}},\\
f^2 &= \frac{x^1\xi^{s+2} + \cdots + x^s\xi^{2s+1} + \xi^{2s+2}}{x^1\xi^{s^2+s+1} + \cdots + x^{s-1}\xi^{s^2+2s-1} + x^s + \xi^{s^2+2s+1}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f^s &= \frac{x^1\xi^{s^2} + \cdots + x^s\xi^{s^2+s-1} + \xi^{s^2+s}}{x^1\xi^{s^2+s+1} + \cdots + x^{s-1}\xi^{s^2+2s-1} + x^s + \xi^{s^2+2s+1}}
\end{aligned} \tag{2}$$
задает физическую структуру ранга $(s+3, 2)$.

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся в существовании открытой и плотной области определения гладкой функции (2), а также в ее невырожденности. Последнее сводится к вычислению якобианов ($*$), которые отличны от нуля в открытых и плотных множествах. Доказательство феноменологической симметрии сводится к вычислению ранга матрицы Якоби отображения F
$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial f(i_1\alpha_1)}{\partial x_{i_1}} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \frac{\partial f(i_1\alpha_1)}{\partial \xi_{\alpha_1}} & 0 & \ldots & 0 & 0\\
\multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial f(i_{s+3}\alpha_2)}{\partial x_{i_{s+3}}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial f(i_{s+3}\alpha_2)}{\partial \xi_{\alpha_2}}
\end{pmatrix},$$
где введены сокращенные обозначения
$$\partial f/\partial x = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^s}\\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots}\\
\frac{\partial f^s}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^s}{\partial x^s}
\end{pmatrix}, \quad \partial f/\partial \xi = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f^1}{\partial \xi^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial \xi^{s(s+2)}}\\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots}\\
\frac{\partial f^s}{\partial \xi^1} & \cdots & \frac{\partial f^s}{\partial x^{s(s+2)}}
\end{pmatrix}.$$
Очевидно, матрица Якоби имеет $2s(s+3)$ строк и $s(3s+7)$ столбцов, причем число столбцов больше числа строк при любом натуральном s. Непосредственной проверкой убеждаемся, что ранг матрицы Якоби равен $s(2s+5)$ в открытой и плотной области определения функции F. По теореме о неявной функции из этого следует существование функциональной связи

между $f(i_1\alpha_1),\dots,f(i_{s+3}\alpha_2)$ для произвольной точки окрестности $U(\langle i_1\dots i_{s+3};\alpha_1\alpha_2\rangle)$, где $\langle i_1\dots i_{s+3};\alpha_1\alpha_2\rangle\in S_F$, т.е. приходим к тождеству (1). $\square$

Для однометрической физической структуры ранга $(4,2)$ и двуметрической физической структуры ранга $(5,2)$ в работе ([2], сс. 96, 106) доказано их существование и единственность. В теореме 1 установлено только существование. Явное выражение для функциональной связи (1) найдено только для $(4,2)$. Ниже используется

Теорема 2 ([1]). *В группе движений s-компонентной метрической функции $f(x,\xi)$ локальное действие $\lambda(x,a)$ группы $G^{s(s+2)}$ в R^s совпадает с этой функцией с точностью до масштабного преобразования $\psi: R^s\to R^s$ и локальных диффеоморфизмов $v: R^s\to R^s$ и $w: R^{s(s+2)}\to R^{s(s+2)}$. Обратно, всякое невырожденное локальное действие $\lambda(x,a)$ группы $G^{s(s+2)}$ в R^s совпадает с этой функцией с точностью до масштабного преобразования $\psi: R^s\to R^s$ и локальных диффеоморфизмов $v: R^s\to R^s$ и $w: R^{s(s+2)}\to R^{s(s+2)}$ с некоторой функцией $f(x,\xi)$, задающей на многообразиях R^s и $R^{s(s+2)}$ s-метрическую физическую структуру ранга $(s+3,2)$.*

2. Одномерная проективная геометрия. Рассмотрим однометрическую физическую структуру ранга (4,2) с метрической функцией $f: R\times R^3\to R$

$$f=\frac{x\xi+\eta}{x+\theta}, \tag{3}$$

где x — координата в R, а ξ, η, θ — координаты в R^3. Функциональная связь (1) в явном виде записывается так:

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1\\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1\\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1\\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1\end{vmatrix}=0.$$

Эту связь можно переписать

$$\frac{\begin{vmatrix} f(i\alpha) & 1\\ f(k\alpha) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f(j\alpha) & 1\\ f(k\alpha) & 1\end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} f(i\alpha) & 1\\ f(l\alpha) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f(j\alpha) & 1\\ f(l\alpha) & 1\end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} f(i\beta) & 1\\ f(k\beta) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f(j\beta) & 1\\ f(k\beta) & 1\end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} f(i\beta) & 1\\ f(l\beta) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f(j\beta) & 1\\ f(l\beta) & 1\end{vmatrix}}. \tag{4}$$

Метрическая функция (3) естественно расширяется до функции

$$f: RP^1\times RP^3\to RP^1. \tag{5}$$

В неоднородных проективных координатах эта метрическая функция имеет вид (3). Для записи (5) в однородных проективных координатах осуществим подстановки: $x\to x/y$, $\xi\to\xi/\nu$, $\eta\to\eta/\nu$, $\theta\to\theta/\nu$, $f\to f^1/f^2$. Тогда

$$f_1=x\xi+y\eta,\ \ f_2=x\nu+y\theta.$$

Левая часть тождества (4) в одномерной проективной геометрии интерпретируется как сложное отношение четырех точек $f(i\alpha)$, $f(j\alpha)$, $f(k\alpha)$, $f(l\alpha)$. Это сложное отношение можно выразить через координаты точек $i,j,k,l\in RP^1$.

Лемма. *Для произвольных четырех точек $i,j,k,l\in RP^1$ и $\alpha\in RP^3$ справедливо тождество*

$$\frac{f(i\alpha)-f(k\alpha)}{f(j\alpha)-f(k\alpha)}\div\frac{f(i\alpha)-f(l\alpha)}{f(j\alpha)-f(l\alpha)}=\frac{x_i-x_k}{x_j-x_k}\div\frac{x_i-x_l}{x_j-x_l}.$$

Для доказательства необходимо в левую часть тождества (4) подставить явное выражение для метрической функции (3). □

Как известно, в проективной геометрии сложное отношение четырех точек является инвариантом проективных преобразований ([3], с. 432). При этом метрическая функция $f(i\alpha)$ с произвольной точкой α рассматривается как множество проективных преобразований проективной прямой, причем координаты точки α выступают как параметры группы, а метрическая функция — как координата преобразованной точки.

Группа движений физической структуры ранга $(4,2)$ с метрической функцией (3) действует сразу на двух множествах: R и R^3. Действие на первом множестве задается уравнением

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{6}$$

а на втором множестве — системой уравнений

$$\xi' = \frac{d\xi - c\eta}{d - c\theta}, \quad \eta' = \frac{a\eta - b\xi}{d - c\theta}, \quad \theta' = \frac{a\theta - b}{d - c\theta}.$$

Эти формулы легко обобщаются на проективные пространства. Заметим, что если в (6) a, b, c, d рассмотреть как однородные координаты в RP^3, а x — как неоднородную координату в RP^1, то x' можно интерпретировать как метрическую функцию. Из уравнения (6) следует, что группа проективных преобразований прямой RP^1 имеет три независимых параметра, поэтому инварианты этой группы можно построить минимум на четырех точках.

Теорема 3. *Четырехточечный инвариант группы проективных преобразований* (6) *проективной прямой RP^1 является функцией от сложного отношения четырех точек i, j, k, l, который в неоднородных координатах представим в виде*

$$\varphi = \varphi\left((ijkl)\right), \quad (ijkl) = \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \div \frac{x_i - x_l}{x_j - x_l}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала R и произвольные четыре точки $i, j, k, l \in R$. Пусть $\psi(x_i, x_j, x_k, x_l)$ — четырехточечный инвариант группы (6), где, например, x_i — координата точки i. Условие инвариантности записывается так: $\psi(x'_i, x'_j, x'_k, x'_l) = \psi(x_i, x_j, x_k, x_l)$, причем штрихованные координаты выражаются через нештрихованные по формуле (6). Дифференцируя это тождество по независимым параметрам в окрестности тождественного преобразования, получаем к уравнения

$$\begin{aligned} x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + x_j\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + x_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + x_l\frac{\partial\psi}{\partial x_l} &= 0, \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi}{\partial x_j} + \frac{\partial\psi}{\partial x_k} + \frac{\partial\psi}{\partial x_l} &= 0, \\ x_i^2\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + x_j^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + x_k^2\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + x_l^2\frac{\partial\psi}{\partial x_l} &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя найденную систему, приходим к утверждению теоремы для R. На проективную прямую RP^1 этот инвариант обобщается естественным образом. □

Справедлива также и обратная

Теорема 4. *Преобразования проективной прямой RP^1, сохраняющие сложное отношение четырех точек $(ijkl)$ — это в точности проективные преобразования.*

Доказательство проведем в области действия неоднородных координат, а затем обобщим результаты на всю проективную прямую. Зададим локальное преобразование в RP^1 уравнением $x' = \lambda(x)$. Условие инвариантности сложного отношения записывается так:

$$\frac{\lambda_i - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}\frac{\lambda_j - \lambda_l}{\lambda_i - \lambda_l} = \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k}\frac{x_j - x_l}{x_i - x_l}, \tag{$**$}$$

где, например, $\lambda_i = \lambda(x_i)$. Разрешая тождество $(**)$ относительно λ_i, затем фиксируя точки j, k, l и от i переходя к безындексным обозначениям, получаем (6), т. е. проективные преобразования в неоднородных координатах. Как уже известно, эта формула легко обобщается на проективную прямую. □

Из теорем 3 и 4 следует, что по сложному отношению четырех точек проективной прямой RP^1 находится группа проективных преобразований, а по этой группе восстанавливается сложное отношение.

3. Двумерная проективная геометрия. Рассмотрим двуметрическую физическую структуру ранга (5,2). Двуметрическую функцию $f : R^2 \times R^8 \to R^2$ в координатах можно записать так [1]:

$$f^1 = \frac{x\xi + y\eta + \rho}{x + y\varphi + \omega}, \quad f^2 = \frac{x\mu + y\nu + \tau}{x + y\varphi + \omega}, \tag{7}$$

где x, y — координаты в R^2, а ξ, η, μ, ν, ρ, τ, φ, ω — координаты в R^8. Она естественно расширяется на проективные пространства

$$f : RP^2 \times RP^8 \to RP^2. \tag{8}$$

В неоднородных проективных координатах функция (8) записывается формулами (7), а в однородных проективных координатах — в виде

$$f_1 = x\xi + y\eta + z\varrho, \quad f_2 = x\mu + y\nu + z\tau, \quad f_3 = x\theta + y\varphi + z\omega,$$

причем неоднородные координаты связаны с однородными: x/z, y/z, ξ/θ, η/θ, ρ/θ, μ/θ, ν/θ, τ/θ, φ/θ, ω/θ, f_1/f_3, f_2/f_3.

Группа движений двуметрической физической структуры ранга $(5, 2)$ с метрической функцией (7) действует сразу на двух множествах: R^2 и R^8. Действие на первом множестве задается уравнениями

$$x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + c_3}, \quad y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + c_3}, \tag{9}$$

причем

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Действие на втором множестве найдем в следующем пункте. Заметим, что если в уравнениях (9) параметры a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 рассмотреть как однородные координаты в RP^8, а x, y — как неоднородную координату в RP^2, то x', y' по теореме 2 интерпретируются как компоненты двуметрической функции физической структуры ранга $(5, 2)$. Таким образом, задание физической структуры на $RP^2 \times RP^8$ с метрической функцией (8) определяет проективную геометрию в RP^2. Как следует из предыдущих рассуждений и теоремы об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий, это равносильно заданию в RP^2 проективной группы. Данный подход согласуется с "Эрлангенской программой" Ф. Клейна: геометрия — множество с группой преобразований на нем. Найдем теперь функциональную связь для двуметрической физической структуры ранга $(5, 2)$.

Теорема 5. *Функциональная связь, выражающая феноменологическую симметрию ранга* $(5,2)$ *с двуметрической функцией* (8)*, задается для произвольных пяти точек* $i,j,k,l,m \in RP^2$ *и* $\alpha,\beta \in RP^8$ *парой тождеств*

$$\frac{f(\langle ikl\rangle)}{f(\langle jkl\rangle)} \div \frac{f(\langle ikm\rangle)}{f(\langle jkm\rangle)} = (\alpha \to \beta), \qquad \frac{f(\langle ikl\rangle)}{f(\langle jkl\rangle)} \div \frac{f(\langle ilm\rangle)}{f(\langle jlm\rangle)} = (\alpha \to \beta), \tag{10}$$

где, например,

$$f(\langle ikl\rangle) = \begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \end{vmatrix}$$

и выражения, стоящие справа в (10)*, — это левые части с заменой координат точки* α *на координаты точки* β*.*

Доказательство. Воспользуемся методами двумерной проективной геометрии ([3], с. 432). В проективной геометрии доказывается, что на произвольных пяти точках из RP^2 можно построить инвариант, представляемый двухкомпонентной функцией $\phi = (\phi^1, \phi^2)$, причем число точек уменьшить нельзя (это устанавливается непосредственными рассуждениями). Последнее также вытекает из следующих качественных рассуждений. Из уравнений проективной группы (9) следует, что группа проективных преобразований плоскости RP^2 имеет восемь независимых параметров, поэтому инварианты этой группы можно построить минимум на пяти точках, у которых 10 координат $(2 = 10 - 8)$. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 — произвольные пять точек из RP^2. Пусть прямые M_1M_2 и M_5M_4 пересекаются в точке P, M_1M_2 и M_3M_4 — в точке Q, а M_5M_4 и M_3M_2 — в R. Тогда, как доказано в проективной геометрии, искомые инварианты — это сложные отношения $\phi^1 = (M_1QM_2P)$, $\phi^2 = (M_5RM_4P)$. Расписывая эти инварианты через координаты пяти точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, а затем вместо них подставляя значения двуметрики $f = (f^1, f^2)$ с различными α и β, которые можно интерпретировать как преобразования из проективной группы, приходим к тождествам (10). □

Определим правило записи функциональных связей. Выделим на плоскости пять упорядоченных точек i, j, k, l, m и выделим шесть троек (симплексов): $\langle ikl\rangle$ состоит из первой, третьей и четвертой, $\langle jkl\rangle$ — из второй, третьей и четвертой, $\langle ikm\rangle$ — из первой, третьей и пятой, $\langle jkm\rangle$ — из второй, третьей и четвертой, $\langle ilm\rangle$ — из первой, четвертой и пятой, $\langle jlm\rangle$ — из второй, четвертой и пятой точек. Тогда левая часть первой искомой функциональной связи — это отношение объемов симплексов $V(ikl)/V(jkl) \div V(ikm)/V(jkm)$, а вторая — $V(ikl)/V(jkl) \div V(ilm)/V(jlm)$.

Теорема 6. *Для произвольных пяти точек* $i,j,k,l,m \in RP^2$ *и точки* $\alpha \in RP^8$ *справедливы тождества*

$$\frac{f(\langle ikl\rangle)}{f(\langle jkl\rangle)} \div \frac{f(\langle ikm\rangle)}{f(\langle jkm\rangle)} = \frac{\langle ikl\rangle}{\langle jkl\rangle} \div \frac{\langle ikm\rangle}{\langle jkm\rangle} = (ijklm)_1,$$
$$\frac{f(\langle ikl\rangle)}{f(\langle jkl\rangle)} \div \frac{f(\langle ilm\rangle)}{f(\langle jlm\rangle)} = \frac{\langle ikl\rangle}{\langle jkl\rangle} \div \frac{\langle ilm\rangle}{\langle jlm\rangle} = (ijklm)_2,$$

где

$$\langle ikl\rangle = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}.$$

Для доказательства необходимо в левые части тождеств (10) подставить значения двуметрики (7).

Теорема 7. *На подпространстве* $RP^1 \times RP^3 \subset RP^2 \times RP^8$ *реализуется однометрическая физическая структура ранга* $(4,2)$.

Доказательство. Рассмотрим двуметрику (8) физической структуры ранга (5,2) в однородных проективных координатах

$$f^1 = \frac{x\xi + y\eta + z\varrho}{x\theta + y\varphi + z\omega}, \quad f^2 = \frac{x\mu + y\nu + z\tau}{x\theta + y\varphi + z\omega}.$$

Зададим произвольную проективную прямую в RP^2 и проективное трехмерное пространство в RP^8 уравнениями

для RP^1

$$x = a_1u + b_1v, \quad y = a_2u + b_2v, \quad z = a_3u + b_3v;$$

для RP^3

$$\begin{gathered}
\xi = k_1\alpha + l_1\beta + m_1\gamma + n_1\delta, \quad \eta = k_2\alpha + l_2\beta + m_2\gamma + n_2\delta, \\
\varrho = k_3\alpha + l_3\beta + m_3\gamma + n_3\delta, \quad \theta = k_4\alpha + l_4\beta + m_4\gamma + n_4\delta, \\
\varphi = k_5\alpha + l_5\beta + m_5\gamma + n_5\delta, \quad \omega = k_6\alpha + l_6\beta + m_6\gamma + n_6\delta, \\
\mu = k_7\alpha + l_7\beta + m_7\gamma + n_7\delta, \quad \nu = k_8\alpha + l_8\beta + m_8\gamma + n_8\delta, \\
\tau = k_9\alpha + l_9\beta + m_9\gamma + n_9\delta
\end{gathered}$$

соответственно. Подставляя найденные уравнения в выписанные выше выражения для двуметрических функций, приходим к однометрике физической структуры ранга $(4,2)$ на подмножестве $RP^1 \times RP^3$. □

Теорема 8. *Пятиточечный инвариант группы проективных преобразований* (9) *проективной плоскости* RP^2 *является двухкомпонентной функцией от пяти точек* i, j, k, l, m:

$$\varphi_1 = (ijklm)_1, \quad \varphi_2 = (ijklm)_2.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала R^2 и произвольные пять точек $i, j, k, l, m \in R^2$. Пусть $\psi(x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l, x_m, y_m)$ — пятиточечный инвариант группы (9), где, например, x_i, y_i — координаты точки i. Условие инвариантности записывается так:

$$\psi(x_i', y_i', x_j', y_j', x_k', y_k', x_l', y_l', x_m', y_m') = \psi(x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l, x_m, y_m),$$

причем штрихованные координаты выражаются через нештрихованные по формуле (9). Дифференцируя это тождество по независимым параметрам в окрестности тождественного преобразования, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}
x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + x_j\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + x_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + x_l\frac{\partial\psi}{\partial x_l} + x_m\frac{\partial\psi}{\partial x_m} &= 0, \\
y_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + y_j\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + y_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + y_l\frac{\partial\psi}{\partial x_l} + y_m\frac{\partial\psi}{\partial x_m} &= 0, \\
\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi}{\partial x_j} + \frac{\partial\psi}{\partial x_k} + \frac{\partial\psi}{\partial x_l} + \frac{\partial\psi}{\partial x_m} &= 0, \\
x_i\frac{\partial\psi}{\partial y_i} + x_j\frac{\partial\psi}{\partial y_j} + x_k\frac{\partial\psi}{\partial y_k} + x_l\frac{\partial\psi}{\partial y_l} + x_m\frac{\partial\psi}{\partial y_m} &= 0, \\
y_i\frac{\partial\psi}{\partial y_i} + y_j\frac{\partial\psi}{\partial y_j} + y_k\frac{\partial\psi}{\partial y_k} + y_l\frac{\partial\psi}{\partial y_l} + y_m\frac{\partial\psi}{\partial y_m} &= 0, \\
\frac{\partial\psi}{\partial y_i} + \frac{\partial\psi}{\partial y_j} + \frac{\partial\psi}{\partial y_k} + \frac{\partial\psi}{\partial y_l} + \frac{\partial\psi}{\partial y_m} &= 0,
\end{aligned}$$

$$x_i^2\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+x_iy_i\frac{\partial\psi}{\partial y_i}+x_j^2\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+x_jy_j\frac{\partial\psi}{\partial y_j}+x_k^2\frac{\partial\psi}{\partial x_k}+x_ky_k\frac{\partial\psi}{\partial y_k}+$$
$$+x_l^2\frac{\partial\psi}{\partial x_l}+x_ly_l\frac{\partial\psi}{\partial y_l}+x_m^2\frac{\partial\psi}{\partial x_m}+x_my_m\frac{\partial\psi}{\partial y_m}=0,$$
$$x_iy_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+y_i^2\frac{\partial\psi}{\partial y_i}+x_jy_j\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+y_j^2\frac{\partial\psi}{\partial y_j}+x_ky_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}+y_k^2\frac{\partial\psi}{\partial y_k}+$$
$$+x_ly_l\frac{\partial\psi}{\partial x_l}+y_l^2\frac{\partial\psi}{\partial y_l}+x_my_m\frac{\partial\psi}{\partial x_m}+y_m^2\frac{\partial\psi}{\partial y_m}=0.$$

Интегрируя найденную систему, приходим к утверждению теоремы для R^2. Полученный результат естественно обобщается на проективную плоскость. □

Справедлива также и обратная

Теорема 9. *Преобразования, сохраняющие инварианты на пяти точках* $(ijklm)_1$, $(ijklm)_2$ *проективной плоскости* RP^2, *— это в точности проективные преобразования.*

Доказательство проведем в координатной окрестности, а затем обобщим результат на проективную плоскость. Зададим локальные преобразования в RP^2 уравнениями

$$x'=\lambda(x,y),\quad y'=\sigma(x,y).$$

Условие инвариантности исходных функций $(ijklm)_1$ и $(ijklm)_2$ — $(i'j'k'l'm')_1=(ijklm)_1$ и $(i'j'k'l'm')_2=(ijklm)_2$ в координатах запишется так:

$$\frac{\begin{vmatrix}\lambda_i&\sigma_i&1\\\lambda_k&\sigma_k&1\\\lambda_l&\sigma_l&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_j&\sigma_j&1\\\lambda_k&\sigma_k&1\\\lambda_l&\sigma_l&1\end{vmatrix}}\div\frac{\begin{vmatrix}\lambda_i&\sigma_i&1\\\lambda_k&\sigma_k&1\\\lambda_m&\sigma_m&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_j&\sigma_j&1\\\lambda_k&\sigma_k&1\\\lambda_m&\sigma_m&1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}x_i&y_i&1\\x_k&y_k&1\\x_l&y_l&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_j&y_j&1\\x_k&y_k&1\\x_l&y_l&1\end{vmatrix}}\div\frac{\begin{vmatrix}x_i&y_i&1\\x_k&y_k&1\\x_m&y_m&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_j&y_j&1\\x_k&y_k&1\\x_m&y_m&1\end{vmatrix}},$$
$$\frac{\begin{vmatrix}\lambda_i&\sigma_i&1\\\lambda_k&\sigma_k&1\\\lambda_l&\sigma_l&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_j&\sigma_j&1\\\lambda_k&\sigma_k&1\\\lambda_l&\sigma_l&1\end{vmatrix}}\div\frac{\begin{vmatrix}\lambda_i&\sigma_i&1\\\lambda_l&\sigma_l&1\\\lambda_m&\sigma_m&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_j&\sigma_j&1\\\lambda_l&\sigma_l&1\\\lambda_m&\sigma_m&1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}x_i&y_i&1\\x_k&y_k&1\\x_l&y_l&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_j&y_j&1\\x_k&y_k&1\\x_l&y_l&1\end{vmatrix}}\div\frac{\begin{vmatrix}x_i&y_i&1\\x_l&y_l&1\\x_m&y_m&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_j&y_j&1\\x_l&y_l&1\\x_m&y_m&1\end{vmatrix}},$$

где, например, $\lambda_i=\lambda(x_i,y_i)$, $\sigma_i=\sigma(x_i,y_i)$. Разрешая эти тождества относительно λ_i и σ_i, затем фиксируя точки j, k, l, m и от i переходя к безындексным обозначениям, получаем систему (9). □

Из теорем 8 и 9 следует, что по пятиточечным инвариантам $(ijklm)_1$ и $(ijklm)_2$ проективной плоскости RP^2 находится группа проективных преобразований, а по этой группе восстанавливаются сами инварианты.

4. $(s+1)$**-метрическая физическая структура ранга** $(s+2,2)$**.** Определение $(s+1)$-метрической физической структуры ранга $(s+2,2)$ дано в п. 1. Рассмотрим $(s+1)$-метрическую функцию $f: R^{s+1}\times R^{s(s+2)+1}\to R^{s+1}$

$$\begin{aligned}
f^1 &= x^1\xi^1+\cdots+x^s\xi^s+x^{s+1}\xi^{s+1},\\
f^2 &= x^1\xi^{s+2}+\cdots+x^s\xi^{2s+1}+x^{s+1}\xi^{2s+2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f^s &= x^1\xi^{s^2}+\cdots+x^s\xi^{s^2+s-1}+x^{s+1}\xi^{s^2+s},\\
f^{s+1} &= x^1\xi^{s^2+s+1}+\cdots+x^s\xi^{s^2+2s}+x^{s+1}\xi^{s^2+2s+1}.
\end{aligned}\tag{11}$$

Теорема 10. $(s+1)$-*метрическая функция* (11) *задает физическую структуру ранга* $(s+2,2)$.

Доказывается так же, как и теорема 1. Сначала проверяются аксиомы 1)–3) $s+1$-метрической функции (11). Затем показывается, что ранг матрицы Якоби отображения $F:(R^{s+1})^{s+2}\times(R^{(s+1)(s+1)})^2\to R^{2(s+1)(s+2)}$ равен $(s+1)(2s+3)$ для открытой и плотной области определения. Утверждение тогда следует из теоремы о неявной функции. □

Группа движений $(s{+}1)$-метрической физической структуры ранга $(s{+}2,2)$ с метрической функцией (11) действует сразу на двух множествах: R^{s+1} и $R^{(s+1)(s+1)}$. Найдем уравнения этих действий.

Теорема 11. *На первом множестве действие группы движений* $(s+1)$-*метрической физической структуры ранга* $(s+2,2)$ *с метрической функцией* (11) *задается уравнениями*

$$x'^1=a^1_1x^1+\cdots+a^1_sx^s+a^1_{s+1}x^{s+1},\ \dots,\ x'^{s+1}=a^{s+1}_1x^1+\cdots+a^{s+1}_sx^s+a^{s+1}_{s+1}x^{s+1},\tag{12}$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_{s+1}\\ \dots & \dots & \dots\\ a^{s+1}_1 & \dots & a^{s+1}_{s+1}\end{pmatrix},\quad \det A\neq 0,$$

а на втором множестве — уравнениями

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix}\xi'^1 & \xi'^2 & \dots & \xi'^{s+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^{s+1}\end{pmatrix}A^{-1},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\begin{pmatrix}\xi'^{s^2+s+1} & \xi'^{s^2+s+2} & \dots & \xi'^{s^2+2s+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi^{s^2+s+1} & \xi^{s^2+s+2} & \dots & \xi^{s^2+2s+1}\end{pmatrix}A^{-1}.
\end{gathered}\tag{13}$$

Доказательство. Запишем сначала $(s+1)$-метрическую функцию в матричной форме

$$\begin{pmatrix} f^1\\ f^2\\ \dots\\ f^s\\ f^{s+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^s & \xi^{s+1}\\ \xi^{s+2} & \xi^{s+3} & \dots & \xi^{2s+1} & \xi^{2s+2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \xi^{s^2} & \xi^{s^2+1} & \dots & \xi^{s^2+s-1} & \xi^{s^2+s}\\ \xi^{s^2+s+1} & \xi^{s^2+s+2} & \dots & \xi^{s^2+2s} & \xi^{s^2+2s+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ \dots\\ x^s\\ x^{s+1}\end{pmatrix}.$$

Уравнения действия группы движений представим в виде $x'^1=\lambda^1(x^1,\dots,x^{s+1}),\dots,x'^{s+1}=\lambda^{s+1}(x^1,\dots,x^{s+1})$ для первого множества R^{s+1} и $\xi'^1=\sigma^1(\xi^1,\dots,\xi^{s^2+2s+1}),\dots,\xi'^{s^2+2s+1}=\sigma^{s^2+2s+1}(\xi^1,\dots,\xi^{s^2+2s+1})$, для второго множества $R^{s(s+2)+1}$. Условие инвариантности метрической функции относительно группы движений $f'^1=f^1,\dots,f'^{s+1}=f^{s+1}$ приводит к функциональному тождеству

$$\begin{pmatrix} \sigma^1 & \sigma^2 & \dots & \sigma^s & \sigma^{s+1} \\ \sigma^{s+2} & \sigma^{s+3} & \dots & \sigma^{2s+1} & \sigma^{2s+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma^{s^2} & \sigma^{s^2+1} & \dots & \sigma^{s^2+s-1} & \sigma^{s^2+s} \\ \sigma^{s^2+s+1} & \sigma^{s^2+s+2} & \dots & \sigma^{s^2+2s} & \sigma^{s^2+2s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \dots \\ \lambda^s \\ \lambda^{s+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^s & \xi^{s+1} \\ \xi^{s+2} & \xi^{s+3} & \dots & \xi^{2s+1} & \xi^{2s+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^{s^2} & \xi^{s^2+1} & \dots & \xi^{s^2+s-1} & \xi^{s^2+s} \\ \xi^{s^2+s+1} & \xi^{s^2+s+2} & \dots & \xi^{s^2+2s} & \xi^{s^2+2s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^s \\ x^{s+1} \end{pmatrix}.$$

Разрешая эту систему относительно функций $\lambda^1, \dots, \lambda^{s+1}$ и фиксируя координаты точки второго множества, приходим к уравнениям (12) действия группы движений на первом множестве. Подставляя уравнения (12) в последнюю систему тождеств, приходим к уравнениям (13) действия группы движений на втором множестве. $\square$

5. Проективные пространства RP^3, RP^4 и обобщения. Рассмотрим s-метрическую физическую структуру ранга $(s+3, 2)$. Ее координатное представление задается выражениями (2) (теорема 1). Рассмотрим расширение отображения (2)

$$f : RP^s \times RP^{s(s+2)} \to RP^s. \tag{14}$$

В неоднородных проективных координатах функция (14) задается формулами (2), а в однородных координатах — равенствами

$$\begin{aligned} f_1 &= x^1\xi^1 + \dots + x^s\xi^s + x^{s+1}\xi^{s+1}, \\ f_2 &= x^1\xi^{s+2} + \dots + x^s\xi^{2s+1} + x^{s+1}\xi^{2s+2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_s &= x^1\xi^{s^2} + \dots + x^s\xi^{s^2+s-1} + x^{s+1}\xi^{s^2+s}, \\ f_{s+1} &= x^1\xi^{s^2+s+1} + \dots + x^s\xi^{s^2+2s} + x^{s+1}\xi^{s^2+2s+1}, \end{aligned} \tag{15}$$

причем неоднородные координаты связаны с однородными так: $x^1 \to x^1/x^{s+1}, \dots, x^s \to x^s/x^{s+1}$, $\xi^1 \to \xi^1/\xi^{s(s+2)}, \dots, \xi^{s(s+2)+1} \to \xi^{s(s+2)+1}/\xi^{s(s+2)}$, $f^1 \to f_1/f_{s+1}, \dots, f^s \to f_s/f_{s+1}$. Если ограничить (11) на прямые, проходящие через одну точку в R^{s+1} и $R^{(s+1)(s+2)}$, то получим (15), т. е. физическую структуру ранга $(s+3, 2)$.

Теорема 12. *На первом множестве действие группы движений s-метрической физической структуры ранга $(s+3, 2)$ с метрической функцией (2) задается уравнениями*

$$x'^1 = \frac{a_1^1x^1 + \dots + a_s^1x^s + a_{s+1}^1}{a_1^{s+1}x^1 + \dots + a_s^{s+1}x^s + a_{s+1}^{s+1}}, \dots, x'^s = \frac{a_1^sx^1 + \dots + a_s^sx^s + a_{s+1}^s}{a_1^{s+1}x^1 + \dots + a_s^{s+1}x^s + a_{s+1}^{s+1}}, \tag{16}$$

а на втором множестве в однородных координатах — уравнениями

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \xi'^1 & \xi'^2 & \dots & \xi'^{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^{s+1} \end{pmatrix} A^{-1}, \dots \\ \begin{pmatrix} \xi'^{s^2+s+1} & \xi'^{s^2+s+2} & \dots & \xi'^{s^2+2s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^{s^2+s+1} & \xi^{s^2+s+2} & \dots & \xi^{s^2+2s+1} \end{pmatrix} A^{-1}, \end{gathered} \tag{17}$$

матрица A определяется в теореме 11.

Для доказательства необходимо (12) и (13) рассмотреть как уравнения преобразований прямых в пространствах R^{s+1} и $R^{s(s+2)}$, т. е. от независимых координат перейти к однородным.

Из приведенных выше рассуждений следует, что задание физической структуры на $RP^s \times RP^{s(s+2)}$ с метрической функцией (16) определяет проективную геометрию в RP^s. Это равносильно заданию в RP^s проективной группы. Найдем функциональную связь s-метрической физической структуры ранга $(s+3,2)$.

Теорема 13. *Функциональная связь, выражающая феноменологическую симметрию ранга* $(s+3,2)$ *с* s*-метрической функцией* (16), *задается для произвольных* $s+3$ *точек* $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, \ldots, i_{s+3} \in RP^s$ *и пары точек* $\alpha, \beta \in RP^{s(s+2)}$ *системой* s *тождеств*

$$\begin{aligned} &\frac{f(\langle i_1 i_3 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle)}{f(\langle i_2 i_3 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle)} \div \frac{f(\langle i_1 i_3 \ldots i_{s+1} i_{s+3}\rangle)}{f(\langle i_2 i_3 \ldots i_{s+1} i_{s+3}\rangle)} = (\alpha \to \beta), \ldots, \\ &\frac{f(\langle i_1 i_3 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle)}{f(\langle i_2 i_3 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle)} \div \frac{f(\langle i_1 i_4 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle)}{f(\langle i_2 i_4 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle)} = (\alpha \to \beta), \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$f(\langle i_1 i_3 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle) = \begin{vmatrix} f^1(i_1\alpha) & \ldots & f^s(i_1\alpha) & 1 \\ f^1(i_3\alpha) & \ldots & f^s(i_3\alpha) & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^1(i_{s+3}\alpha) & \ldots & f^s(i_{s+3}\alpha) & 1 \end{vmatrix},$$

а выражения, стоящие справа в (18), *— это левые части с заменой координат точки* α *на координаты точки* β.

Доказательство. Заметим для начала, что система тождеств (18) функционально независима. Подставляя в (18) компоненты s-метрической функции (2), приходим к тождествам. Эту проверку можно провести на компьютере в математической системе Maple 9. □

Теорема 14. *Для произвольных* $s+3$ *точек* $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, \ldots, i_{s+3} \in RP^s$ *и точки* $\alpha \in RP^{s(s+2)}$ *справедливы* s *тождеств*

$$\begin{aligned} &\frac{f(\langle i_1 i_3 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle)}{f(\langle i_2 i_3 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle)} \div \frac{f(\langle i_1 i_3 \ldots i_{s+1} i_{s+3}\rangle)}{f(\langle i_2 i_3 \ldots i_{s+1} i_{s+3}\rangle)} = \\ &\quad = \frac{\langle i_1 i_3 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle}{\langle i_2 i_3 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle} \div \frac{\langle i_1 i_3 \ldots i_{s+1} i_{s+3}\rangle}{\langle i_2 i_3 \ldots i_{s+1} i_{s+3}\rangle} = (i_1 i_2 \ldots i_{s+3})_1, \ldots, \\ &\frac{f(\langle i_1 i_3 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle)}{f(\langle i_2 i_3 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle)} \div \frac{f(\langle i_1 i_4 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle)}{f(\langle i_2 i_4 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle)} = \\ &\quad = \frac{\langle i_1 i_3 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle}{\langle i_2 i_3 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle} \div \frac{\langle i_1 i_4 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle}{\langle i_2 i_4 \ldots i_{s+2} i_{s+3}\rangle} = (i_1 i_2 \ldots i_{s+3})_s, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\langle i_1 i_3 \ldots i_{s+3}\rangle = \begin{vmatrix} x^1_{i_1} & \ldots & x^s_{i_1} & 1 \\ x^1_{i_3} & \ldots & x^s_{i_3} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^1_{i_{s+3}} & \ldots & x^s_{i_{s+3}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Для доказательства необходимо в левые части тождеств (19) подставить значения s-метрики (2) и привести подобные.

Теорема 15. *Преобразования, сохраняющие инварианты на произвольных $s+3$ точках $(i_1 i_2 \dots i_{s+3})_1, \dots, (i_1 i_2 \dots i_{s+3})_s$ проективного пространства RP^s — это в точности проективные преобразования.*

Доказательство проведем в координатной окрестности U, а затем обобщим результат на проективное пространство. Зададим локальные преобразования в U из RP^s уравнениями

$$x'^1 = \lambda^1(x^1, \dots, x^s), \quad x'^s = \lambda^s(x^1, \dots, x^s).$$

Условие инвариантности функций $(i_1 i_2 \dots i_{s+3})_1, \dots, (i_1 i_2 \dots i_{s+3})_s$ относительно преобразований приводит к функциональным уравнениям

$$(i'_1 i'_2 \dots i'_{s+3})_1 = (i_1 i_2 \dots i_{s+3})_1, \dots, (i'_1 i'_2 \dots i'_{s+3})_s = (i_1 i_2 \dots i_{s+3})_s,$$

где, например, $i'_1 = (\lambda^1(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}), \dots, \lambda^s(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}))$. Разрешая данные тождества относительно $\lambda^1_{i_1}, \dots, \lambda^s_{i_1}$, затем фиксируя точки $i_2, \dots, i_{s+3}$ и от i_1 переходя к безындексным обозначениям, получаем (16). □

Заметим, что из теоремы 15 следуют теоремы 4 и 9.

Полученные выше результаты дают способ определения проективной геометрии. Его суть состоит в задании на прямом произведении проективных пространств $RP^s \times RP^{s(s+2)}$ s-метрической физической структуры ранга $(s+3, 2)$ с s-метрикой (2).

Литература

[1] Михайличенко Г.Г. *Двуметрические физические структуры ранга* $(n+1, 2)$ // Сиб. матем. журн. – 1993. – Т. 34. – № 3. – С. 132–143.

[2] Михайличенко Г.Г. *Групповая симметрия физических структур.* – Барнаул–Горно-Алтайск, 2003. – 203 с.

[3] Ефимов Н.В. *Высшая геометрия.* – М.: ГИФМЛ, 1961. – 580 с.

В.А. Кыров

доцент, кафедра физики и методики преподавания физики,
Горно-Алтайский государственный университет,
649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1,

e-mail: kfizika@gasu.ru

V.A. Kyrov

Associate Professor, Chair of Physics and Physics Teaching Principles,
Gorny Altai State University,
1 Lenkin str., Gorno-Altaisk, 649000 Russia,

e-mail: kfizika@gasu.ru