

УДК 512.816+514.142

Аффинная геометрия как физическая структура

Владимир А.Кыров*

Горно-Алтайский государственный университет,
Ленкина 1, Горно-Алтайск, 649000,
Россия

Получена 15.08.2008, окончательный вариант 10.10.2008, принята к печати 15.11.2008

В данной работе изучается физическая структура максимального ранга в аффинном пространстве V^s над алгеброй гиперкомплексных чисел V . Доказывается, что эту структуру образует группа аффинных преобразований пространства V^s .

Ключевые слова: физическая структура, гиперкомплексные числа.

Введение

Рассмотрим алгебру гиперкомплексных чисел V [1]. Ее элементами являются гиперкомплексные числа: $z = x_0 + x_1 i_1 + \dots + x_s i_s$, где x_0, x_1, \dots, x_s — действительные числа, i_1, \dots, i_s — мнимые единицы, умножение которых определяется по формулам $i_\alpha i_\beta = p_{\alpha\beta_0} + p_{\alpha\beta_1} i_1 + \dots + p_{\alpha\beta_s} i_s$, $p_{\alpha\beta_0}, p_{\alpha\beta_1}, \dots, p_{\alpha\beta_s}$ — действительные числа, $\alpha, \beta = 1, \dots, s$.

Если $s = 0$, то алгебра гиперкомплексных чисел изоморфна полю действительных чисел R . При $s = 1$ существуют три неизоморфные алгебры гиперкомплексных чисел: это алгебра комплексных чисел ($i^2 = -1$), алгебра двойных чисел ($i^2 = 1$) и алгебра дуальных чисел ($i^2 = 0$). При $s = 2$ имеем 11 неизоморфных ассоциативных алгебр гиперкомплексных чисел [2].

В данной работе изучается физическая структура в аффинном пространстве над алгеброй гиперкомплексных чисел. Примером является полная группа аффинных преобразований вещественной плоскости [3].

1. Определение физической структуры ранга $(n + 1, 2)$

Рассмотрим два множества B и N . Пусть $\Omega_{B^n} \subset B^n$ и $\Omega_N \subset N$ — некоторые максимально допустимые подмножества.

Определение 1. Говорят, что на множествах B и N определена физическая структура ранга $(n + 1, 2)$, если существует отображение $f : B \times N \rightarrow B$, называемое метрическим, и выполняются аксиомы [4]:

$$A1. \forall \langle i_1, \dots, i_n \rangle \in \Omega_{B^n}, \forall \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in \Omega_{B^n}, \exists! \alpha \in N: f(i_1, \alpha) = b_1, \dots, f(i_n, \alpha) = b_n.$$

Построим отображение $F_{j_1 \dots j_n} : N \rightarrow \Omega_{B^n}: F_{j_1 \dots j_n}(\alpha) = (f(j_1 \alpha), \dots, f(j_n \alpha))$, где $\langle j_1, \dots, j_n \rangle \in \Omega_{B^n}$, которое по аксиоме A1 является биекцией.

A2. $\forall \alpha \in \Omega_N$ отображение $f_\alpha : B \rightarrow B$, на элементах задаваемое формулой $f_\alpha(i) = f(i\alpha)$, является биекцией.

*e-mail: kfizika@gasu.ru

А3. (Аксиома феноменологической симметрии.) $\forall \langle i_0, i_1, \dots, i_n \rangle \in B \times \Omega_{B^n}$ и $\forall \langle \alpha_0, \alpha \rangle \in N \times \Omega_N$ существует функциональная связь:

$$f(i_0\alpha_0) = g(f(i_0\alpha), f(i_1\alpha), \dots, f(i_n\alpha), (i_1\alpha_0), \dots, f(i_n\alpha_0)),$$

где $g : \Omega_{B^n} \times \Omega_{B^n} \times B \rightarrow B$.

Обозначим $w_1 = f(j_1\alpha), \dots, w_n = f(j_n\alpha), z = f(i\gamma)$, где $\gamma \in \Omega_N$. Поэтому

$$f(i\alpha) = f(F_\gamma^{-1}(z), F_{j_1 \dots j_n}^{-1}(w_1, \dots, w_n)) = \bar{f}(z, w_1, \dots, w_n). \quad (1)$$

Построенное формулой (1) отображение $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \rightarrow B$ удовлетворяет аксиомам А1–А3, т.е. является метрическим отображением физической структуры ранга $(n+1, 2)$.

На Ω_{B^n} построим бинарную операцию:

$$(z_1, \dots, z_n)(w_1, \dots, w_n) = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n), \quad (2)$$

причем $\bar{f}_m = \bar{f}(z_m, w_1, \dots, w_n)$. В [4] доказывается, что бинарная операция (2) является групповой. Ее можно расширить до отображения $D : B^n \times \Omega_{B^n} \rightarrow B^n$, индуцирующее отображение $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \rightarrow B$. Явный вид D совпадает с (2) при условии $(z_1, \dots, z_n) \in B^n$. Справедливо тождество [4]:

$$(XY)Z = X(YZ), \quad (*)$$

где $X \in B^n, Y, Z \in \Omega_{B^n}$. Если $X \in \Omega_{B^n}$, то тождество (*) является аксиомой ассоциативности. Отображение D задает действие группы Ω_{B^n} в B^n , что следует из тождества (*) и аксиом А1 и А2 [5]. Оно также индуцирует транзитивное действие в B : $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \rightarrow B$.

Теорема 1. Тождество из аксиомы А3 эквивалентно следующему:

$$\tilde{f}(\tilde{f}(z, A), \tilde{f}(w_1, A), \dots, \tilde{f}(w_n, A)) = \tilde{f}(\tilde{f}(z, B), \tilde{f}(w_1, B), \dots, \tilde{f}(w_n, B)), \quad (3)$$

причем $\tilde{f}(z, W) = \bar{f}(z, W^{-1}), \forall W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle, A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle, B = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in \Omega_{B^n}, \forall z \in B, W^{-1}$ — элемент, обратный к W в группе Ω_{B^n} .

Тождество (3) несложно представить в виде

$$\tilde{f}(\tilde{f}(z, A), \tilde{f}(w_1, A), \dots, \tilde{f}(w_n, A)) = \tilde{f}(z, W). \quad (3')$$

Доказательство. Из определения отображений \bar{f} и \tilde{f} следует выполнимость аксиомы А2. Поэтому разрешая (3) относительно первого аргумента левой части, получаем тождество из А3. Докажем обратное. Для этого в (*) положим $Y = A, Z = (YA)^{-1}$. После приведения подобных имеем $(XA)(YA)^{-1} = XY^{-1}$. Каждая компонента этого тождества совпадает с (3'). \square

Отметим, что (3') является обобщением тождества Уорда для квазигруппы с бинарной операцией \bullet [6, 7]:

$$(x \bullet a) \bullet (y \bullet a) = x \bullet y.$$

2. Аффинная геометрия как физическая структура ранга $(s+2, 2)$

Полагаем $n = s+1, s \in \mathbb{N}$. Пусть $B = V^s$. Метрическое отображение $\bar{f} : V^s \times \Omega_{(V^s)^{s+1}} \rightarrow V^s$ задает действие группы $\Omega_{(V^s)^{s+1}}$ в V^s .

Теорема 2. Физическая структура ранга $(s+2, 2)$, $s \geq 1$, с метрическим отображением $\bar{f} : V^s \times \Omega_{(V^s)^{s+1}} \rightarrow V^s$ в аффинном пространстве V^s над ассоциативной алгеброй гиперкомплексных чисел V существует и с точностью до системы аффинных координат единственна. Явный вид метрического отображения:

$$z'^1 = a_1^1 z^1 + a_2^1 z^2 + \dots + a_s^1 z^s + a^1, \dots, z'^s = a_1^s z^1 + a_2^s z^2 + \dots + a_s^s z^s + a^s, \quad (4)$$

где z^1, \dots, z^s — аффинные координаты точки z , матрица коэффициентов системы обратима.

Заметим, что в аффинной геометрии прямой V метрическое отображение (4) интерпретируется как аффинное преобразование. Если $V = R$, то (4) — аффинное преобразование вещественной прямой [8].

Доказательство. Аффинные координаты в V^s обозначим $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$. Левая часть тождества (3) является записью метрического отображения в аффинных координатах $(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_s)$, а правая часть — запись этого же отображения в координатах $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_s)$. Поэтому тождество можно записать системой равенств: $\bar{\lambda}_1 = \lambda'_1, \dots, \bar{\lambda}_s = \lambda'_s$. В аффинной геометрии такое отображение \bar{f} является аффинным. Две различные аффинные системы координат, как известно, связаны линейными функциями, тогда

$$\lambda'_1 = c_{11}\lambda_1 + \dots + c_{1s}\lambda_s + c_1, \dots, \lambda'_s = c_{s1}\lambda_1 + \dots + c_{ss}\lambda_s + c_s, \quad (**)$$

причем матрица коэффициентов обратима. Поэтому аффинное преобразование \bar{f} задается уравнениями (**) или (4). Этим самым существование доказано. Единственность следует из построения аффинных координат. \square

Зафиксируем точки общего положения $e_{k+1}, \dots, e_{s+1} \in V^s$. Пусть $V^s(e_{k+1}, \dots, e_{s+1})$ — множество подвижных точек в V^s относительно преобразований, оставляющих неподвижными точки e_{k+1}, \dots, e_{s+1} . Тогда можно показать, что отображение

$$z' = \bar{f}(z, w_1, \dots, w_k, e_{k+1}, \dots, e_{s+1}), e_l = \bar{f}(e_l, w_1, \dots, w_k, e_{k+1}, \dots, e_{s+1}), \quad (5)$$

где $l = k+1, \dots, s+1$, на $V^s(e_{k+1}, \dots, e_{s+1})$ задает физическую структуру ранга $(k+1, 2)$, т.е. группу преобразований. Если фиксируется другой набор точек общего положения $e_{k+1}^*, \dots, e_{s+1}^*$, то получаем новое метрическое отображение, также задающее структуру ранга $(k+1, 2)$ на $V^s(e_{k+1}^*, \dots, e_{s+1}^*)$:

$$z' = \bar{f}(z, w_1, \dots, w_k, e_{k+1}^*, \dots, e_{s+1}^*), e_l^* = \bar{f}(e_l^*, w_1, \dots, w_k, e_{k+1}^*, \dots, e_{s+1}^*). \quad (5')$$

Заметим, что группа (5) является стационарной подгруппой транзитивной группы преобразований (4) с неподвижными точками e_{k+1}, \dots, e_{s+1} . Известно, что любые две стационарные подгруппы транзитивной группы преобразований изоморфны.

Две физические структуры ранга $(n+1, 2)$ с метрическими отображениями $f, f' : B \times N \rightarrow B$ называются эквивалентными, если группы Ω_B и Ω'_B изоморфны.

Теорема 3. Две физические структуры ранга $(k+1, 2)$ с метрическими отображениями (5) и (5') эквивалентны.

Теорема 4. В аффинном пространстве V^s существует физическая структура ранга $(s+2, 2)$ тогда и только тогда, когда алгебра гиперкомплексных чисел V ассоциативна.

Доказательство. Рассмотрим физическую структуру ранга $(s+2, 2)$ в пространстве V^s с метрическим отображением (4). Фиксируя s точек, приходим к физической структуре ранга $(2, 2)$, эквивалентной структуре

$$z'^1 = z^1 + a_1 z^s, \dots, z'^{s-1} = z^{s-1} + a_{s-1} z^s, z'^s = a_s z^s.$$

Это метрическое отображение, в которую входит произведение гиперкомплексных чисел, задает квазигрупповую операцию. Данная операция ассоциативна тогда и только тогда, когда алгебра гиперкомплексных чисел ассоциативна. \square

Теорема 5. *Физическая структура ранга $(n+1, 2)$, $n \geq s+2$, с метрическим отображением $f : V^s \times N \rightarrow V^s$ не существует.*

Доказательство. Пусть физическая структура ранга $(n+1, 2)$, $n \geq s+2$, существует. В тождестве (3') положим $a_k = e_k$, $k = s+2, \dots, n$, а также зафиксируем произвольные точки w_k :

$$\tilde{f}(\tilde{f}(z, A), \tilde{f}(w_1, A), \dots, \tilde{f}(w_{s+1}, A), w_{s+2}, \dots, w_n) = \tilde{f}(z, W).$$

Тогда метрическое отображение (1) при фиксированных w_k , $k = s+2, \dots, n$ удовлетворяет аксиомам А1, А2, А3 для $n = s+1$, т.е. задает физическую структуру ранга $(s+2, 2)$. Поэтому для метрического отображения, согласно теореме 2, получаем

$$z'^1 = a_1^1(w_{s+2}, \dots, w_n) z^1 + \dots + a_s^1(w_{s+2}, \dots, w_n) z^s + a^1(w_{s+2}, \dots, w_n),$$

$$z'^s = a_1^s(w_{s+2}, \dots, w_n) z^1 + \dots + a_s^s(w_{s+2}, \dots, w_n) z^s + a^s(w_{s+2}, \dots, w_n).$$

Это общий вид метрического отображения структуры ранга $(n+1, 2)$, $n \geq s+2$ в Ω_{V^s} . Данное отображение не содержит точек w_1, \dots, w_{s+1} , следовательно, не задает структуру ранга $(n+1, 2)$, $n \geq s+2$. \square

Список литературы

- [1] И.Л.Кантор, А.С.Солодовников, Гиперкомплексные числа, М., Наука, 1973.
- [2] Р.М.Мурадов, Гиперкомплексные числа ранга 3, Наука. Культура. Образование, Горно-Алтайск, 2004, № 15/16, 107.
- [3] В.А.Кыров, Квазигрупповые свойства аффинных групп, Доклады VI Сибирской научной школы-семинара с международным участием „Компьютерная безопасность и криптография — SIBECRYPT'07 Приложение к журналу *Вестник Томского государственного университета. Серия Математика. Кибернетика. Информатика*, 2007, № 23, 37-41.
- [4] А.А.Симонов, Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур, Приложение к книге Кулакова Ю.И. "Теория физических структур", М., 2004.
- [5] Л.С.Понтрягин, Непрерывные группы, М., Наука, 1973.
- [6] В.Д.Белоусов, Основы теории квазигрупп и луп, М., Наука, 1967.
- [7] S.K.Chatterjea, On Ward quasigroups, *Pure Math. Manuscript*, (1987), no. 6, 31-34.

[8] Н.В.Ефимов, Высшая геометрия, М., ФМ, 1961.

Affine Geometry as a Physical Structure

Vladimir A.Kyrov

We consider the physical structure of maximal rank in the affine space V^s over the algebra of hypercomplex numbers V . It is proved that this structure is given by the group of affine transformations of the space V^s .

Keywords: physical structure, hypercomplex numbers.