УДК 512.816+512.548.7

ТРЕХБАЗИСНЫЕ КВАЗИГРУППЫ С ОБОБЩЕННЫМ ТОЖДЕСТВОМ УОРДА

В.А. Кыров

Горно-Алтайский государственный университет

E-mail: kfizika@gasu.ru

В данной работе изучается трехбазисная частичная квазигруппа с обобщенным тождеством Уорда. Доказывается, что эта квазигруппа является феноменологически симметричной. Изучаются феноменологически симметричные подквазигруппы.

Ключевые слова: *квазигруппа*, *тождество Уорда*, *трехбазисная квазигруппа с обобщенным тождеством Уорда*, *трехбазисная феноменологически симметричная квазигруппа.*

Как известно, квазигруппой Уорда называется квазигруппа $(C,\circ)$ с тождеством Уорда [1]:

$$(a\circ b)\circ(c\circ b) = (a\circ c),$$

где $\circ$ – бинарная операция; a, b, c – произвольные элементы множества C. В теории квазигрупп доказывается, что любая квазигруппа Уорда изотопна некоторой группе. В данной работе изучаются трехбазисные частичные квазигруппы с тождеством, обобщающим тождество Уорда, и устанавливается связь таких квазигрупп с физическими структурами. Квазигрупповая терминология приводится по монографии [2].

1. Трехбазисная квазигруппа с обобщенным тождеством Уорда

Пусть B – некоторое множество, а $\Omega_B{}^n \subset B^n$ – некоторое подмножество.

Определение 1. *Трехбазисной квазигруппой с обобщенным тождеством Уорда* называется частичная трехбазисная квазигруппа $(B, \Omega_B{}^n, B, \varphi)$ с отображением $\varphi: B\times\Omega_B{}^n \to B$ и системой аксиом К1 – К3.

К1. $\forall\ \langle x_1, \ldots, x_n\rangle, \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in \Omega_B{}^n\ \exists\,!\ y\in\Omega_B{}^n$: $\varphi(x_k, y) = b_k$, $k = 1, \ldots, n$.

К2. $\forall\ y\in\Omega_B{}^n\ \forall\ b\in\Omega_B\ \exists\,!\ x\in B$: $\varphi(x, y) = b$, где $\Omega_B\subset B$.

Построим два вспомогательных отображения: F_z: $\Omega_B{}^n \to \Omega_B{}^n$, $z = \langle z_1, ..., z_n\rangle\in\Omega_B{}^n$: $F_z(y) = (\varphi(z_1y), ..., \varphi(z_ny))$, $y\in\Omega_B{}^n$, и F_w: $B\to B$, $w\in\Omega_B$: $F_w(x) = \varphi(xw)$, $x\in B$. Из аксиом К1 и К2 следует биективность построенных отображений.

К3. Обобщенное тождество Уорда:

$$\varphi\,(\varphi(x, a_1, \ldots, a_n), \varphi(y_1, a_1, \ldots, a_n), \ldots, \varphi(y_n, a_1, \ldots, a_n)) = \varphi(x, y_1, \ldots, y_n), \tag{1}$$

где $\langle y_1, \ldots, y_n\rangle, \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in\Omega_B{}^n$, $x\in B$.

По трехбазисной квазигруппе с обобщенным тождеством Уорда $(B, \Omega_B{}^n, B, \varphi)$ можно построить квазигруппу Уорда $(\Omega_B{}^n, \rho)$ с бинарной операцией

$$\rho(X, Y) = (\varphi(x_1, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varphi(x_n, y_1, \ldots, y_n)),$$

где $X = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, $Y = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle\in\Omega_B{}^n$. Аксиомы квазигруппы $(\Omega_B{}^n, \rho)$ следуют из К1 – К3, причем тождество Уорда имеет вид

$$\rho(\rho(X, A), \rho(Y, A)) = \rho(X, Y). \tag{2}$$

Теорема 1. Квазигруппа Уорда $(\Omega_B{}^n, \rho)$ изотопна группе $(\Omega_B{}^n, \cdot)$ с бинарной операцией $X\cdot Y = \rho(X, \theta(Y))$, где $\theta(A) = \rho(E, A)$, $\rho(A, A) = E$.

Доказательство. Сначала в тождестве (2) положим $Y = A$, тогда $\rho(\rho(X, A), \rho(A, A)) = \rho(X, A)$. Так как точки A и X произвольные, то по свойству однозначной разрешимости уравнений квазигруппы $\rho(A, A) = E$, следовательно, $\rho(A, E) = A$. Обозначим $\theta(A) = \rho(E, A)$ (из определения квазигруппы следует биективность этого отображения). Несложно также доказать, что $\rho(E, \rho(X, A)) = \rho(A, X)$, $\theta(\theta(X)) = X$. Рассмотрим теперь квазигруппу, изотопную квазигруппе Уорда с бинарной операцией $X\cdot Y = \rho(X, \theta(Y))$. Однозначная разрешимость для новой операции очевидна.

Лемма. Квазигруппа $(\Omega_B{}^n, \cdot)$ является лупой с единицей E.

Действительно, $X\cdot E = \rho(X, \theta(E)) = \langle\theta(E) = E\rangle = X$; $E\cdot Y = \rho(E, \theta(Y)) = \theta(\theta(X)) = X$. ■

Докажем ассоциативность. Рассмотрим тождественное равенство

$$(X\cdot A)\cdot\theta(Y\cdot A) = X\cdot\theta(Y), \tag{*}$$

которое вытекает из (2). Очевидно, $X\cdot Y = \rho(X, \theta(Y)) = \rho(E, \rho(\theta(Y), X)) = \rho(E, \theta(Y)\cdot\theta(X)) = \theta(\theta(Y)\cdot\theta(X))$. Полагая в тождестве (*) $Y = E$ и пользуясь выше доказанной леммой, имеем $(X\cdot A)\cdot\theta(A) = X$. Тогда в тождестве (*) берем $A = Z$, $Y\cdot A = \theta(U)$. Заметим, что $(Y\cdot A)\cdot\theta(A) = \theta(U)\cdot\theta(A) = Y$. Элементарные расчеты дают ассоциативность $(X\cdot Z)\cdot U = X\cdot(Z\cdot U)$. ■

Докажем некоторые свойства трехбазисной квазигруппы с обобщенным тождеством Уорда.

Теорема 2. Справедливы следующие свойства трехбазисной квазигруппы $(B, \Omega_B^n, B, \varphi)$ с обобщенным тождеством Уорда (1):

1) $\varphi(a_1, a_1, \ldots, a_n) = e_1, \ldots, \varphi(a_n, a_1, \ldots, a_n) = e_n, \forall A = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \Omega_B^n$, $E = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle \in \Omega_B^n$ – постоянная точка;

2) $\varphi(x, e_1, \ldots, e_n) = x$;

3) $\varphi(e_1, a_1, \ldots, a_n) = \theta_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \varphi(e_n, a_1, \ldots, a_n) = \theta_n(a_1, \ldots, a_n)$;

4) $\varphi(e_1, \theta_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \theta_n(a_1, \ldots, a_n)) = a_1, \ldots, \varphi(e_n, \theta_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \theta_n(a_1, \ldots, a_n)) = a_n$.

Доказательство. Воспользуемся связью трехбазисной квазигруппы $(B, \Omega_B^n, B, \varphi)$ с квазигруппой Уорда (Ω_B^n, ρ). Тогда свойства 1 – 4 будут результатом покомпонентной записи соответствующих свойств квазигруппы (Ω_B^n, ρ). Другими словами, 1 – это покомпонентная запись равенства $\rho(A, A) = E$, 2 – соответственно тождества $\rho(A, E) = A$, 3 – равенства $\rho(E, A) = \theta(A)$ и, наконец, 4 – тождества $\theta(\theta(X)) = X$. ■

2. Трехбазисная феноменологически симметричная квазигруппа ранга (*n*+1, 2) и ее связь с трехбазисной квазигруппой с обобщенным тождеством Уорда

Рассмотрим три множества M, N, B и отображение $f: M\times N \to B$, называемое метрическим. Пусть выполняются аксиомы [2]:

А1. $\forall\ \langle i_1, \ldots, i_n\rangle \in \Omega_M^n\ \forall\ \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in \Omega_B^n\ \exists!\ \alpha \in N: f(i_k\alpha) = b_k$, $k = 1, \ldots, n$, где $\Omega_M^n \subset M^n$ и $\Omega_B^n \subset B^n$.

А2. $\forall\ \alpha \in \Omega_N\ \forall\ b \in B\ \exists!\ i \in M: f(i\alpha) = b$, где $\Omega_N \subset N$.

А3. $\forall\ \langle i_0, i_1, \ldots, i_n\rangle \in M\times\Omega_M^n\ \forall\ \langle \alpha_0, \alpha_1\rangle \in N\times\Omega_N$ существует связь

$$f_{00} = g(f_{01}, f_{11}, \ldots, f_{n1}, f_{10}, \ldots, f_{n0}),$$

где $f_{mn} = f(i_m, \alpha_n)$.

Построим два вспомогательных отображения: F_j: $N \to \Omega_B^n$, $j = \langle j_1, \ldots, j_n\rangle \in \Omega_M^n$, с явным видом $F_j(\alpha) = (f(j_1\alpha), \ldots, f(j_n\alpha))$, и F_γ: $M \to B$, $\gamma \in \Omega_N$: $F_\gamma(i) = f(i\gamma)$. Из аксиом А1 и А2 следует биективность этих отображений.

Определение 2. Говорят, что на множествах M, N, B с метрическим отображением $f: M\times N \to B$ задана *физическая структура ранга* $(n+1, 2)$, если выполняются аксиомы А1 – А3.

Из аксиом А1, А2 также следует, что на множествах M, N, B определена частичная трехбазисная квазигруппа с операцией f. По аксиоме А3 это специальная трехбазисная квазигруппа, которую будем называть *феноменологически симметричной ранга* $(n+1, 2)$ и обозначать (M, N, B, f).

Обозначим $x = f(i\gamma)$, $y_1 = f(j_1\alpha), \ldots, y_n = f(j_n\alpha)$. Тогда метрическое отображение можно переписать так:

$$f(i\alpha) = f(F^{-1}_\gamma(x), F^{-1}_j(y_1, \ldots, y_n)) = \bar{f}(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Построенное отображение $\bar{f}: B\times\Omega_B^n \to B$, очевидно, удовлетворяет таким аксиомам:

Б1. $\forall\ \langle x_1, \ldots, x_n\rangle, \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in \Omega_B^n\ \exists!\ y \in B$: $\bar{f}(x_k y) = b_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Б2. $\forall\ y \in \Omega_B^n\ \forall\ b \in \Omega_B\ \exists!\ x \in B$: $\bar{f}(x, y) = b$.

Б3. $\forall\ \langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in B\times\Omega_B^n\ \forall\ \langle z_0, z_1\rangle \in \Omega_B^n\times\Omega_B^n$ существует связь

$$\bar{f}_{00} = g(\bar{f}_{01}, \bar{f}_{11}, \ldots, \bar{f}_{n1}, \bar{f}_{10}, \ldots, \bar{f}_{n0}),$$

где $\bar{f}_{ij} = \bar{f}(x_i, z_j)$.

Таким образом, отображение $\bar{f}$ задает физическую структуру ранга $(n+1, 2)$. Другими словами, определена феноменологически симметричная трехбазисная квазигруппа ранга $(n+1, 2)$, которую обозначим $(B, \Omega_B^n, B, \bar{f})$.

По квазигруппе $(B, \Omega_B^n, B, \bar{f})$ строится новая частичная трехбазисная квазигруппа $(B^n, \Omega_B^n, B^n, \bar{F})$ с бинарной операцией

$$\bar{F}(XY) = (\bar{f}(x_1, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \bar{f}(x_n, y_1, \ldots, y_n)), \tag{3}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n) \in B^n$; $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Omega_B^n$.

Теорема 3. Для трехбазисной квазигруппы $(B^n, \Omega_B^n, B^n, \bar{F})$ выполняется тождество, обобщающее ассоциативность

$$X(YZ) = (XY)Z,$$

где $X \in B^n$, $Y, Z \in \Omega_B^n$.

Доказательство можно найти в работе [3].

Если в бинарной операции (3) $X \in \Omega_B^n$, то $\bar{F}(XY) \in \Omega_B^n$. Из теоремы 3 тогда следует, что Ω_B^n является группой с бинарной операцией (3) и единицей $E = (e_1, \ldots, e_n) = (f(j_1\gamma), \ldots, f(j_n\gamma))$. Поэтому трехбазисная квазигруппа $(B^n, \Omega_B{}^n, B^n, \overline{F})$ является почти просто транзитивной группой преобразований множества B^n с параметрической группой $\Omega_B{}^n$. Тогда, очевидно, феноменологически симметричная трехбазисная квазигруппа ранга $(n+1, 2)$ $(B, \Omega_B{}^n, B, \overline{f})$ является транзитивной группой преобразований множества B с параметрической группой $\Omega_B{}^n$.

Теорема 4. Тождество из аксиомы Б3 для феноменологически симметричной трехбазисной квазигруппы ранга $(n+1, 2)$ $(B, \Omega_B{}^n, B, \overline{f})$ эквивалентно обобщенному тождеству Уорда:

$$\tilde{f}\,(\tilde{f}\,(x, a_1, \ldots, a_n), \tilde{f}\,(y_1, a_1, \ldots, a_n), \ldots, \tilde{f}\,(y_n, a_1, \ldots, a_n)) = \tilde{f}\,(x, y_1, \ldots, y_n) \tag{4}$$

или

$$\tilde{f}\,(\tilde{f}\,(x, a_1, \ldots, a_n), \tilde{f}\,(y_1, a_1, \ldots, a_n), \ldots, \tilde{f}\,(y_n, a_1, \ldots, a_n)) =$$
$$= \tilde{f}\,(\tilde{f}\,(x, b_1, \ldots, b_n), \tilde{f}\,(y_1, b_1, \ldots, b_n), \ldots, \tilde{f}\,(y_n, b_1, \ldots, b_n)), \tag{4$'$}$$

где $\tilde{f}\,(x, y_1, \ldots, y_n) = \overline{f}\,(x, (y_1, \ldots, y_n)^{-1})$, $\forall < y_1, \ldots, y_n>, < a_1, \ldots, a_n>, < b_1, \ldots, b_n> \in \Omega_B{}^n$, $x \in B$.

Доказательство. Из определения отображений $\overline{f}$ и $\tilde{f}$ следует выполнимость аксиомы Б2, т. е. однозначная разрешимость этих функций относительно первого аргумента. Поэтому, разрешая тождество (4′) относительно первого аргумента левой части, получаем аксиому Б3.

Докажем теперь обратное. Для этого в тождестве теоремы 3 положим $Y = A$, $Z = (YA)^{-1}$. После приведения подобных имеем $(XA)(YA)^{-1} = XY^{-1}$. Каждая компонента этого тождества совпадает с (4). ■

Из теоремы 4 следует, что четверка $(B, \Omega_B{}^n, B, \tilde{f})$ также образует феноменологически симметричную трехбазисную квазигруппу ранга $(n+1, 2)$, изотопную квазигруппе $(B, \Omega_B{}^n, B, \overline{f})$.

Из теоремы 4 вытекает, что трехбазисная феноменологически симметричная квазигруппа $(B, \Omega_B{}^n, B, \tilde{f})$ ранга $(n+1, 2)$ является трехбазисной квазигруппой с обобщенным тождеством Уорда (1). Верно и обратное.

Теорема 5. Трехбазисная квазигруппа $(B, \Omega_B{}^n, B, \varphi)$ с обобщенным тождеством Уорда является трехбазисной феноменологически симметричной квазигруппой ранга $(n+1, 2)$.

Доказательство. Пусть $(B, \Omega_B{}^n, B, \varphi)$ – трехбазисная квазигруппа с обобщенным тождеством Уорда (1). С ее помощью строится квазигруппа Уорда $(\Omega_B{}^n, \rho)$, изотопная группе. Для этого изотопа, очевидно, можно записать тождество (4). Тогда все свойства феноменологически симметричной трехбазисной квазигруппы ранга $(n+1, 2)$ будут выполнены. ■

Таким образом, существует два способа определения физической структуры ранга $(n+1, 2)$. Первый основан на аксиоме А3, а второй – на обобщенном тождестве Уорда (1).

3. Феноменологически симметричные трехбазисные подквазигруппы ранга (k+1, 2)

Рассмотрим феноменологически симметричную трехбазисную квазигруппу $(B, \Omega_B{}^n, B, \overline{f})$ ранга $(n+1, 2)$, которая, напомним, является группой преобразований множества B. Из аксиомы Б1 вытекает транзитивность этой группы преобразований. Рассмотрим ее стационарную подгруппу $G_{e_n} = (B', \Omega'_B{}^{n-1}, B', \overline{f})$ [4], оставляющую на месте точку e_n, $B' \subset B$ – совокупность точек, подвижных относительно этой подгруппы. Заметим, что параметрическая группа $\Omega'_B{}^{n-1}$ стационарной подгруппы G_{e_n} изоморфна группе, состоящей из совокупности точек $X = <x_1, \ldots, x_{n-1}, e_n>$, $Y = <y_1, \ldots, y_{n-1}, e_n> \in \Omega'_B{}^{n-1} \subset \Omega_B{}^n$: $\overline{F}\,(XY) \in \Omega'_B{}^{n-1}$. Тогда

$$\overline{f}\,(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, e_n) = x',\ \ \overline{f}\,(e_p, y_1, \ldots, y_{n-1}, e_n) = y_p,\ \ \overline{f}\,(e_n, y_1, \ldots, y_{n-1}, e_n) = e_n, \tag{5}$$

где $p = 1,\ldots, n-1$. Несложно проверить, что для множества $(B', \Omega'_B{}^{n-1}, B', \overline{f})$ выполняются аксиомы Б1 – Б3. Легко доказываются аксиомы Б1, Б2. Для проверки аксиомы Б3 необходимо в тождестве (4) положить $a_n = y_n = e_n$, а затем воспользоваться равенствами (5). Таким образом, $(B', \Omega'_B{}^{n-1}, B', \overline{f})$ – феноменологически симметричная частичная трехбазисная подквазигруппа ранга $(n, 2)$ в $(B, \Omega_B{}^n, B, \overline{f})$. Эта подквазигруппа задает физическую структуру ранга $(n, 2)$.

Две феноменологически симметричные квазигруппы $(B, \Omega_B{}^n, B, \overline{f})$ и $(B', \Omega'_B{}^n, B', \overline{f}')$ ранга $(n+1, 2)$ будем называть эквивалентными, если группы $\Omega_B{}^n$ и $\Omega'_B{}^n$ изоморфны.

Теорема 6. Две феноменологически симметричные трехбазисные подквазигруппы $(B', \Omega'_B{}^{n-1}, B', \overline{f}')$ и $(B'', \Omega''_B{}^{n-1}, B'', \overline{f}'')$ ранга $(n, 2)$ квазигруппы $(B, \Omega_B{}^n, B, \overline{f})$ с неподвижными точками e_n и e'_n, эквивалентны.

Доказательство. Из определения стационарной подгруппы следует, что группы $(B', \Omega'_B{}^{n-1}, B', \overline{f}')$ и $(B'', \Omega''_B{}^{n-1}, B'', \overline{f}'')$ сопряжены [4], следовательно, изоморфны. ■

Если в стационарной подгруппе $G_{e_n} = (B', \Omega'^{\,n-1}_B, B', \bar f\,)$ зафиксировать еще одну точку, то, очевидно, получится феноменологически симметричная частичная трехбазисная подквазигруппа ранга $(n, 2)$ в $(B, \Omega_B^n, B, \bar f\,)$, значит, по теореме 6 эта подквазигруппа будет единственна, с точностью до эквивалентности.

Продолжая фиксировать точки, получим феноменологически симметричную частичную трехбазисную подквазигруппу ранга $(k+1, 2)$ в $(B, \Omega_B^n, B, \bar f\,)$, $k < n$, причем имеет место следующая теорема, аналогичная 6.

Теорема 6′. Две феноменологически симметричные трехбазисные подквазигруппы $(B', \Omega'^{\,k}_B, B', \bar f'\,)$ и $(B'', \Omega''^{\,k}_B, B'', \bar f''\,)$ ранга $(k+1, 2)$ квазигруппы $(B, \Omega_B^n, B, \bar f\,)$ с неподвижными точками $\{e_m\}$ *и* $\{e'_m\}$, эквивалентны. ■

4. Пример

Рассмотрим феноменологически симметричную трехбазисную квазигруппу ранга (4, 2) на проективной прямой RP. В таком случае $B = \mathrm{RP}$, а метрическое отображение – это проективное преобразование в RP:

$$\bar f = \frac{ax+b}{cx+d},\ u = \frac{ae_1+b}{ce_1+d},\ v = \frac{ae_2+b}{ce_2+d},\ w = \frac{ae_3+b}{ce_3+d},$$

где $\langle e_1, e_2, e_3\rangle \in \Omega_{\mathrm{RP}}$, матрица из коэффициентов обратима. Обобщенное тождество Уорда (4) выражается через сложное отношение четырех точек. Рассмотрим теперь феноменологически симметричную трехбазисную подквазигруппу ранга (3, 2), т. е. зафиксируем точку e_3:

$$\bar f = \frac{ax+b}{cx+d},\ u = \frac{ae_1+b}{ce_1+d},\ v = \frac{ae_2+b}{ce_2+d},\ e_3 = \frac{ae_3+b}{ce_3+d}.$$

Эта подквазигруппа эквивалентна полной аффинной группе преобразований прямой R (теорема 6):

$$\bar f = ax + b.$$

И наконец, рассмотрим феноменологически симметричную трехбазисную подквазигруппу ранга (2, 2), т.е. зафиксируем две точки e_2 и e_3:

$$\bar f = \frac{ax+b}{cx+d},\ u = \frac{ae_1+b}{ce_1+d},\ e_2 = \frac{ae_2+b}{ce_2+d},\ e_3 = \frac{ae_3+b}{ce_3+d}.$$

В явном виде метрическое отображение следующее:

$$\bar f = \frac{xu(e_2+e_3-e_1) - xe_2e_3 - ue_2e_3 + e_1e_2e_3}{xu - xe_1 - ue_1 - e_2e_3 + e_1(e_2+e_3)}.$$

Оно задает групповую бинарную операцию в $B' = \mathrm{RP}/\{e_2, e_3\}$ с единицей e_1, которая изоморфна мультипликативной группе поля действительных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chatterjea S.K.* On Ward quasigroups // Pure Math. Manuscript. 1987. V. 6. P. 31 – 34.
2. *Белоусов В.Д.* Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.
3. *Симонов А.А.* Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур // Приложение к книге Ю.И. Кулакова «Теория физических структур». М., 2004.
4. *Горбацевич В.В.*, *Онищик А.Л.* Группы Ли преобразований // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1988. Т. 20. С. 108 – 248.