Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2009, № 7, с. 10–21 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

В.А. КЫРОВ

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ГРУППЫ ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА R^S

Аннотация. В данной работе определяется феноменологически симметричная локальная группа Ли преобразований пространства произвольной размерности, в основе которой лежит система аксиом теории физических структур. Феноменологически симметричные группы преобразований невырождены как по координатам, так и по параметрам. Находится многоточечный инвариант этой группы преобразований. Устанавливается связь с квазигруппами Уорда. Определяется подструктура физической структуры как некоторая феноменологически симметричная подгруппа преобразований. Доказывается критерий феноменологической симметрии группы Ли преобразований и единственность структуры минимального ранга. Вводится феноменологически симметричное произведение физических структур.

Ключевые слова: физическая структура, феноменологически симметричная группа Ли преобразований.

УДК: 512.816

Abstract. In this paper we define a phenomenologically symmetric local Lie group of transformations of an arbitrary-dimensional space. We take as a basis the axiom scheme of the theory of physical structures. Phenomenologically symmetric groups of transformations are nondegenerate both with respect to coordinates and to parameters. We obtain a multipoint invariant of this group of transformations and relate it with Ward quasigroups. We define a substructure of a physical structure as a certain phenomenologically symmetric subgroup of transformations. We establish a criterion for the phenomenological symmetry of the Lie group of transformations and prove the uniqueness of a structure with the minimal rank. We also introduce the notion of a phenomenologically symmetric product of physical structures.

Keywords: physical structure, phenomenologically symmetric Lie group of transformations.

Впервые на связь физических структур с группами Ли преобразований обратил внимание Г.Г. Михайличенко при построении классификации двуметрических физических структур ранга (n+1,2) [1]. В данной работе продолжается изучение связи физической структуры ранга $(n+1, 2)$ с группами Ли преобразований.

1. Физическая структура ранга $(n+1, 2)$**.** Рассмотрим два многообразия R^s и R^{sn}, достаточно гладкую функцию $f : S_f \to R^s$, называемую *метрической*, с открытой и плотной областью определения $S_f \subset R^s \times R^{sn}$, которая паре точек $\langle i\alpha \rangle \in S_f$ ставит в соответствие s действительных чисел $f(i\alpha) \in R^s$, причем $i \in R^s$, $\alpha \in R^{sn}$.

Поступила 10.01.2007

Определение 1 ([1], с. 15; [2], с. 677)**.** Метрическая функция f на многообразиях R^s и R^{sn} задает *s-метрическую физическую структуру ранга* $(n+1,2)$, если выполняются аксиомы:

А1. для любой точки $\langle i_1,\ldots,i_n\rangle$ некоторой окрестности U произвольной точки из открытого и плотного подмногообразия $\Omega_{R^{sn}}$ многообразия R^{sn} и любой точки $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ из некоторой окрестности W произвольной точки другого открытого и плотного подмногообразия $\Omega'_{R^{sn}}$ существует единственная точка $\alpha\in R^{sn}$ такая, что $\langle i_1\alpha\rangle,\ldots,\langle i_n\alpha\rangle\in S_f$ и $f(i_k\,\alpha)=b_k$, $k=1,\ldots,n$;

А2. для любой точки α некоторой окрестности V произвольной точки из открытого и плотного подмногообразия $\omega_{R^{sn}}$ многообразия R^{sn} и любой точки b из некоторой окрестности W' произвольной точки другого открытого и плотного подмногообразия $\omega'_{R^{sn}}$ существует единственная точка $i\in R^s$ такая, что $\langle i\alpha\rangle\in S_f$ и $f(i\alpha)=b$;

А3. для любой точки $\langle i_1,\ldots,i_n,i_{n+1},\alpha_1,\alpha_2\rangle$ из открытого и плотного подмногообразия Ω многообразия $(R^s)^{n+1}\times(R^{sn})^2$ такой, что $\langle i_1\alpha_1\rangle,\ldots,\langle i_{n+1}\alpha_1\rangle,\langle i_1\alpha_2\rangle,\ldots,\langle i_{n+1}\alpha_2\rangle\in S_f$, существует функциональная связь

$$\varPhi(f(i_1\alpha_1),\ldots,f(i_{n+1}\alpha_1),f(i_1\alpha_2),\ldots,f(i_{n+1}\alpha_2))=0, \tag{1}$$

где $\varPhi$ — s-компонентная гладкая функция с $\operatorname{rang}\varPhi=s$.

В локальных координатах

$$f(i\alpha)=f(x_i^1,\ldots,x_i^s,\xi_\alpha^1,\ldots,\xi_\alpha^{sn}), \tag{2}$$

где $x_i^1,\ldots,x_i^s$ — локальные координаты точки $i\in R^s$, а $\xi_\alpha^1,\ldots,\xi_\alpha^{sn}$ — локальные координаты точки $\alpha\in R^{sn}$. По теореме об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий функция (2) является двухточечным инвариантом локальной группы Ли движений размерности sn физической структуры ранга $(n+1,2)$ ([1], с. 23; [3]). Последнее означает существование таких пребразований $\lambda: R^s\to R^s$ и $\sigma: R^{sn}\to R^{sn}$, что

$$f(\lambda(i),\sigma(\alpha))=f(i\alpha).$$

Рассмотрим новую гладкую функцию $F: R^{sn}\times R^{sn}\to R^{sn}$, которая на точках $i_1,\ldots,i_n\in R^s$, $\alpha\in R^{sn}$ таких, что $\langle i_1\alpha\rangle,\ldots,\langle i_n\alpha\rangle\in S_f$, задается формулой

$$F(i_1,\ldots,i_n,\alpha)=(f(i_1\alpha),\ldots,f(i_n\alpha)). \tag{3}$$

Приведем определение локальной гладкой квазигруппы [4].

Определение 2. Гладкая однозначная сюръективная функция $g: M\times M\to M$ на многообразии M задает *локальную гладкую квазигруппу* в окрестностях U_a, U_b, U_c, где a, b — любые точки из M, а $c=g(a,b)$, если выполняется система аксиом:

1. для любой окрестности $V_c\subset U_c$ существуют окрестности $V_a\subset U_a$ и $V_b\subset U_b$ такие, что для любых точек $x\in V_a$ и $y\in V_b$ существует единственная точка $z\in V_c$, удовлетворяющая уравнению $z=g(x,y)$;
2. для любой окрестности $V_a\subset U_a$ существуют окрестности $V_c\subset U_c$ и $V_b\subset U_b$ такие, что для любых точек $z\in V_c$ и $y\in V_b$ существует единственная точка $x\in V_a$, удовлетворяющая уравнению $z=g(x,y)$;
3. для любой окрестности $V_b\subset U_b$ существуют окрестности $V_a\subset U_a$ и $V_c\subset U_c$ такие, что для любых точек $x\in V_a$ и $z\in V_c$ существует единственная точка $y\in V_b$, удовлетворяющая уравнению $z=g(x,y)$.

Из определения функции f и аксиом А1 и А2 следует, что в некотором открытом и плотном подмножестве $K\subset R^{sn}$ для функции (3) выполняются аксиомы локальной гладкой квазигруппы. Поэтому имеет место

Теорема 1. *На некотором открытом и плотном подмножестве K многобразия R^{sn} функция* (3) *задает локальную гладкую квазигруппу.*

Теорема 2. *На многообразиях $(R^s)^n$ и R^{sn} функция* (3) *задает sn-метрическую физическую структуру ранга* $(2,2)$.

Доказательство. Действительно, из построения функции (3) следует существование открытой и плотной области определения и выполнение аксиом A1 и A2. Для проверки аксиомы A3 рассмотрим точку $\langle i_1,\ldots,i_n,i_{n+1},\ldots,i_{2n};\alpha_1,\alpha_2\rangle$ из открытого и плотного подмногообразия в $(R^s)^{2n}\times(R^{sn})^2$ такую, что $\langle i_1\alpha_1\rangle,\ldots,\langle i_{2n}\alpha_2\rangle\in S_f$. Тогда имеют место функциональные связи

$$\Phi(f(i_1\alpha_1),\ldots,f(i_n\alpha_1),f(i_{n+k}\alpha_1),f(i_1\alpha_2),\ldots,f(i_n\alpha_2),f(i_{n+k}\alpha_2))=0,\quad k=1,\ldots,n,$$

где Φ — s-компонентная гладкая функция с $\operatorname{rang}\Phi=s$. Ранг всей системы равен sn. Поэтому данная система sn тождеств в совокупности образует функциональную связь для sn-метрической физической структуры ранга $(2,2)$. □

Сокращенно формулу (3) можно записать также в виде

$$F(i_1,\ldots,i_n,\alpha)=(f(i_1\alpha),\ldots,f(i_n\alpha))=i\circ\alpha, \tag{3$'$}$$

где $i=(i_1,\ldots,i_n)$, а $\circ$ — локальная квазигрупповая операция. Из свойства инвариантности метрической функции (2) относительно группы движений следует инвариантность функции $(3')$ относительно локальных преобразований множества K:

$$\lambda^n(i)\circ\sigma(\alpha)=i\circ\alpha.$$

Заметим, что $\lambda^n=\lambda\times\cdots\times\lambda$. От последней формулы можно перейти к следующей:

$$\lambda^n(i)\circ\alpha=i\circ\sigma^{-1}(\alpha).$$

Следует отметить, что группа движений в K, т. е. группа движений структуры ранга $(2,2)$ с метрической функцией (3), локально действует просто транзитивно.

2. Феноменологически симметричные группы преобразований. Рассмотрим локальную гладкую квазигруппу $(K,\circ)$ с бинарной операцией $(3')$.

Теорема 3. *Локальная гладкая квазигруппа $(K,\circ)$, индуцированная физической структурой ранга $(n+1,2)$ изотопна локальной квазигруппе $(K,*,e)$ с правой единицей e, которая порождает действие группы движений этой физической структуры на первом множестве.*

Эта теорема впервые доказана Г.Г. Михайличенко при классификации двуметрических физических структур ранга $(n+1,2)$ [5]. Приведем другой метод доказательства. Прежде сформулируем определения.

Определение 3. Две гладкие локальные квазигруппы $(M,\circ)$ и $(M,*)$ называются *локально изотопными*, если существует тройка локальных диффеоморфизмов $T=(\alpha,\beta,\gamma)$ в окрестностях точек x, y, $x*y$ многообразия M таких, что $\gamma(x*y)=\alpha(x)\circ\beta(y)$.

Определение 4. Упорядоченная тройка локальных диффеоморфизмов $T=(\alpha,\beta,\gamma)$ локально гладкой квазигруппы $(Q,\circ)$ называется *автотопией*, если $\gamma^{-1}(\alpha(x)\circ\beta(y))=x\circ y$ для любых $x,y\in Q$.

Доказательство теоремы 3. Из теории квазигрупп [6] следует, что локальная гладкая квазигруппа $(K, \circ)$ изотопна локальной группе Ли $(K, \cdot, e)$, т. е. существует локальная изотопия $T = (\mu^n, \nu, \tau^n)$: для любых $i = (i_1, \ldots, i_n)$, $\alpha \in K$, $(\tau^n)^{-1}(\mu^n(i) \circ \nu(\alpha)) = i \cdot \alpha$. На элементах для групповой операции получаем

$$i \cdot \alpha = (\tau^{-1}(f(\mu(i_1)\nu(\alpha))), \ldots, \tau^{-1}(f(\mu(i_n)\nu(\alpha)))).$$

Рассмотрим еще одну изотопию $T' = (1, \theta, 1)$, $\theta(e) = e$, которая локальную группу Ли $(K, \cdot, e)$ переводит в локальную квазигруппу $(K, *, e)$ с правой единицей e:

$$F'(i_1, \ldots, i_n, \alpha) = (f'(i_1, \theta(\alpha)), \ldots, f'(i_n, \theta(\alpha))) = i * \alpha = i \cdot \theta(\alpha). \tag{4}$$

Докажем, что формула (4) индуцирует локальное действие группы движений физической структуры на первом множестве. Для этого перепишем (4) в виде

$$F'(i_1, \ldots, i_n, \theta^{-1}(\alpha)) = (f'(i_1, \alpha), \ldots, f'(i_n, \alpha)) = i * \theta^{-1}(\alpha) = i \cdot \alpha. \tag{4$'$}$$

Очевидно выполнение первой аксиомы локальной группы Ли преобразований [7]:

$$F'(i_1, \ldots, i_n, e) = i * e = i \cdot \theta(e) = i.$$

Из равенства (4′) следует

$$(i * \theta^{-1}(\alpha)) * \theta^{-1}(\beta) = (i \cdot \alpha) \cdot \beta = i \cdot (\alpha \cdot \beta) = i * \theta^{-1}(\alpha \cdot \beta),$$

поэтому

$$\begin{aligned} F'(i_1, \ldots, i_n, \theta^{-1}(\alpha), \theta^{-1}(\beta)) &= (f'(f'(i_1, \alpha), \beta), \ldots, f'(f'(i_n, \alpha), \beta)) = \\ &= F'(f'(i_1, \alpha), \ldots, f'(i_n, \alpha), \theta^{-1}(\beta)) = F'(i_1, \ldots, i_n, \theta^{-1}(\alpha * \theta^{-1}(\beta))). \end{aligned}$$

Таким образом, композиция преобразований является преобразованием. И, наконец, если в окрестности правой единицы

$$i * \theta^{-1}(\alpha) = i * \theta^{-1}(\beta),$$

то $\alpha = \beta$, что следует из определения квазигруппы. Итак, все свойства локальной группы Ли локальных преобразований выполнены. Значит, метрическая функция $f'(i\alpha)$ относительно первой точки задает локальное действие группы преобразований на первом множестве, причем координаты точки α являются параметрами. Автотопия $T = (\lambda^n, \sigma, 1)$ локальной квазигруппы $(K, \circ)$ переходит в автотопию $T = ((\lambda')^n, \sigma', 1)$ локальной квазигруппы с правой единицей $(K, *, e)$:

$$(\lambda')^n(i) * \sigma'(\alpha) = i * \alpha.$$

Тогда

$$(\lambda')^n(i) * \sigma'(\alpha) = (\lambda')^n(i) \cdot \theta(\sigma'(\alpha)) = i \cdot \theta(\alpha),$$

следовательно,

$$(\lambda')^n(i) = (i \cdot \theta(\alpha)) \cdot (\theta(\sigma'(\alpha)))^{-1} = i \cdot (\theta(\alpha) \cdot (\theta(\sigma'(\alpha)))^{-1}_{\cdot}),$$

т. е.

$$(\lambda')^n(i) = i * \theta^{-1}(\theta(\alpha) * \theta^{-1}((\theta(\sigma'(\alpha)))^{-1}_{\cdot})) = i * \varphi(\alpha),$$

где $i^{-1}_{\cdot}$ — обратный к i в группе $(K, \cdot, e)$. Поэтому квазигруппа $(K, *, e)$ индуцирует локальное действие локальной группы Ли движений физической структуры ранга $(n+1, 2)$ на первом множестве

$$i' = \lambda'(i) = f'(i\beta).$$

Для поиска $\sigma'(\alpha)$ воспользуемся равенством $(\lambda')^n(i) = i * \beta$:

$$(i * \beta) * \sigma'(\alpha) = i * \alpha.$$

Переходя к групповому умножению, будем иметь

$$\sigma'(\alpha) = \theta^{-1}((\theta(\beta))^{-1}_{\cdot} * \alpha).$$

Требуемая локальная изотопия имеет вид $T = (\mu^n, \theta\nu, \tau^n)$. □

Найдем теперь $n+1$-точечные инварианты группы преобразований, индуцированной локальной квазигруппой $(K, *, e)$. Пусть i^{-1} — правый обратный элемент к i локальной квазигруппы $(K, *, e)$. В таком случае можно построить новую квазигрупповую операцию, т. е. приходим к локальной квазигруппе с правой единицей $(K, \bullet, e)$:

$$i \bullet j = i * j^{-1}. \tag{5}$$

Теорема 4. *В локальной квазигруппе $(K, *, e)$ выполняются следующие свойства:*

1.
$$(i * \alpha) * (j * \alpha)^{-1} = i * j^{-1} \tag{6}$$

для любых $i, j, \alpha \in K$;

2. *правый обратный элемент в локальной квазигруппе $(K, \bullet, e)$ совпадает с исходным элементом;*

3. $\theta(x) = e * x$ *для любого* $x \in K$;

4. *локальная изотопия $T = (\theta, 1, \theta)$ локальную квазигруппу $(K, *, e)$ переводит в локальную группу Ли с бинарной операцией*

$$xy = \theta^{-1}(\theta(x) * y)$$

для любых $x, y \in K$, которая является правой обратной к исходной относительно произвольного элемента.

Доказательство. 1. По формуле (4) $i * k = i \cdot \theta(k) = e$, значит, $k = i^{-1} = \theta^{-1}(i^{-1}_{\cdot})$, где $i^{-1}_{\cdot}$ — обратный элемент к i в группе $(K, \cdot, e)$. Перепишем сначала правую часть выражения (6) через групповую операцию. По формуле (4) $i * j^{-1} = i \cdot \theta(j^{-1}) = i \cdot \theta(\theta^{-1}(j^{-1}_{\cdot})) = i \cdot j^{-1}_{\cdot}$. Преобразуем левую часть выражения (6) $(i*\alpha)*(j*\alpha)^{-1} = (i\cdot\theta(\alpha))\cdot\theta(\theta^{-1}((j\cdot\theta(\alpha))^{-1}_{\cdot})) = i\cdot j^{-1}_{\cdot}$. Данные вычисления показывают, что левая и правая части выражения (6) совпадают, т. е. оно является тождеством.

2. Действительно, $i \bullet j = e$, следовательно, $(i^{-1})_\bullet = j$. С другой стороны, $i \bullet j = i * j^{-1} = e$, поэтому $i * ((i^{-1})_\bullet)^{-1} = e$, значит, $i^{-1} = ((i^{-1})_\bullet)^{-1}$, следовательно, $i = (i^{-1})_\bullet$, т. е. свойство доказано.

3. В формуле (4) положим $i = e$, $\alpha = x$.

4. Из построения функции θ следуют квазигрупповые свойства бинарной операции. Докажем ассоциативность $(xy)z = \theta^{-1}(\theta(x) \cdot \theta(y))z = (\theta(x) \cdot \theta(y)) \cdot \theta(z)$, $x(yz) = x\theta^{-1}(\theta(y) \cdot \theta(z)) = \theta(x) \cdot (\theta(y) \cdot \theta(z))$. Так как операция $(\cdot)$ является групповой, поэтому свойство ассоциативности выполнено. Для любого $a \in K$ правая обратная операция A_a определяется как решение уравнения $(a * x) * y = a * z$ относительно z и обозначается $z = A_a(x, y)$ [6]. По формуле (4) $(a * x) * y = (a \cdot \theta(x)) \cdot \theta(y) = a \cdot (\theta(x) \cdot \theta(y))$. С другой стороны, $a * z = a \cdot \theta(z)$, значит, $a \cdot (\theta(x) \cdot \theta(y)) = a \cdot \theta(z)$, следовательно, $z = A_a(x, y) = \theta^{-1}(\theta(x) * y)$. Видно, что бинарная операция от a не зависит. □

Тождество (6) можно, очевидно, записать в виде

$$(i * \alpha) * (j * \alpha)^{-1} = (i * \beta) * (j * \beta)^{-1}. \tag{6'}$$

Из доказательства теоремы 4 следует, что формула (5) задает инвариант локальной квазигруппы $(K, *, e)$. Учитывая связь этой квазигруппы с физической структурой ранга

$(n+1,2)$, заключаем, что формула (5) определяет $n+1$-точечный инвариант группы движений физической структуры на первом многообразии, а формула $(6')$ – функциональную связь (1). Любая компонента формул (5) и $(6')$ задает требуемый инвариант.

Определение 5. Локальная группа Ли преобразований, действующая в пространстве R^s и определяемая по квазигруппе $(K,*,e)$ равенством $i'=f(i\alpha)$, называется *феноменологически симметричной.*

Заметим, что в отличие от общего случая, когда свойство невырожденности выполняется только относительно первой точки, в данном случае невырожденность имеет место и относительно второй точки, координаты которой интерпретируются как параметры группы преобразований. В теореме 4 дается общий метод вычисления $n+1$-точечного инварианта такой группы. Следует также заметить, что функция (4) задает феноменологически симметричную локальную группу Ли преобразований многообразия R^{sn}.

Для локальной квазигруппы $(K,\bullet,e)$ тождество (6) можно записать также в виде

$$(x\bullet z)\bullet(y\bullet z)=x\bullet y.$$

Квазигруппа с таким тождеством называется *квазигруппой Уорда* [8]. Таким образом, квазигруппа $(K,\bullet,e)$ локально является квазигруппой Уорда.

3. Подструктура физической структуры. Рассмотрим физическую структуру ранга $(n+1,2)$ с метрической функцией $f: R^s\times R^{sn}\to R^s$. Эта метрическая функция, как сказано в предыдущем разделе, задает в R^s локальную феноменологически симметричную группу Ли преобразований. По метрической функции f построим квазигруппу $(K,*,e)$ с операцией

$$F(i_1,\dots,i_n,\alpha)=(f(i_1\alpha),\dots,f(i_n\alpha))=i*\alpha=i\cdot\theta(\alpha), \tag{4''}$$

которая задает sn-метрическую физическую структуру ранга $(2,2)$. Рассмотрим подмножество $K(\nu,a,b)\subset K$, получающееся фиксированием элементов $i_\nu=a$, $f(a,\alpha)=b$. На этом подмножестве рассматривается бинарная операция $(4'')$:

$$F(i_1,\dots,a,\dots,i_n,\alpha)=(f(i_1\alpha),\dots,b,\dots,f(i_n\alpha))=i*\alpha. \tag{7}$$

Заметим, что так определенное подмножество $K(\nu,a,b)$ задает локально в R^{sn} поверхность

$$f(a,\alpha_1,\dots,\alpha_{sn})=b. \tag{8}$$

Теорема 5. *Подмножество $K(\nu,a,b)\subset K$ с бинарной операцией* (7) *образует локальную подквазигруппу $(K(\nu,a,b),*)$ локальной квазигруппы $(K,*,e)$, которая является группой преобразований только при $a=b$ и обозначается $(K(\nu,a),*)$.*

Доказательство. Согласно определению квазигруппы $(K,*,e)$ система уравнений

$$f(i_1\alpha)=b_1,\dots,f(i_\nu\alpha)=b_\nu,\dots,f(i_n\alpha)=b_n,$$

где $\langle i_1\alpha\rangle,\dots,\langle i_\nu\alpha\rangle,\dots,\langle i_n\alpha\rangle\in S_f$, однозначно разрешима относительно α. Это же, очевидно, имеет место и для системы уравнений, определенной операцией (7), т. е. когда $i_\nu=a$, $b_\nu=b$. Значит, $(K(\nu,a,b),*)$ — подквазигруппа. Если подквазигруппа $(K(\nu,a,b),*)$ обладает правой единицей, то она совпадает с e, поэтому $a=b$. Из доказательства теоремы 3 вытекает, что квазигруппа $(K(\nu,a),*)$ индуцирует локальную группу Ли преобразований. □

Уравнения локальной группы Ли преобразований, действующей в пространстве R^s и индуцированной локальной квазигруппой $(K(\nu,a),*)$, имеют вид

$$i'=f(i,\alpha_1,\dots,\alpha_{sn}),\quad a=f(a,\alpha_1,\dots,\alpha_{sn}). \tag{9}$$

Эта группа преобразований также является феноменологически симметричной. Ниже доказывается, что группа (9) $s(n-1)$-параметрическая и действует локально транзитивно в R^s. Заметим, что точка a является инвариантной.

Теорема 6. *Поверхность* (8) *в открытом и плотном подмножестве своих точек является регулярной поверхностью размерности* $s(n-1)$.

Доказательство. Согласно определению 1 и аксиоме A1 на открытом и плотном подмножестве точек поверхности (8) ранг матрицы Якоби функции f, входящей в уравнение (8), максимален и равен s. Тогда размерность поверхности в этих точках равна $s(n-1)$. □

Теорема 7. *Справедливы утверждения*:

1) *локальная подквазигруппа* $(K(\nu,a),*,e)$ *квазигруппы* $(K,*,e)$ *индуцирует физическую структуру ранга* $(n,2)$;

2) *феноменологически симметричная локальная группа Ли преобразований, соответствующая подквазигруппе* $(K(\nu,a),*,e)$, *действующая с уравнениями* (9), *на первом множестве задает действие группы движений индуцированной физической структуры.*

Доказательство. 1) Выполнение аксиом A1 и A2 определения физической структуры ранга $(n,2)$ следует из теоремы 5. Для проверки аксиомы A3 в тождество (1):

$$\varPhi(f(i_1\alpha_1),\ldots,f(i_\nu\alpha_1),\ldots,f(i_\nu\alpha_2),\ldots,f(i_{n+1}\alpha_2))=0,$$

вместо точки i_ν подставим a:

$$\varPhi(f(i_1\alpha_1),\ldots,a,\ldots,a,\ldots,f(i_{n+1}\alpha_2))=0,\quad a=f(a\alpha).$$

Эту точку можно выбрать так, чтобы ранг функционального уравнения (1) не уменьшился. В результате получается новое функциональное уравнение, выражающее функциональную связь для s-метрической физической структуры ранга $(n,2)$.

2) Для метрической функции физической структуры ранга $(n+1,2)$ выполняется условие инвариантности группы движений $f(i'\alpha')=f(i\alpha)$, которое имеет место и для любого преобразования из (9). □

Определение 6. Выделенная в теореме 7 s-метрическая физическая структура ранга $(n,2)$ из s-метрической физической структуры ранга $(n+1,2)$ называется *подструктурой.*

На первом множестве физической структуры ранга $(n+1,2)$ рассмотрим r точек $a_1,\ldots,a_r$ таких, что $a_1=f(a_1\alpha),\ldots,a_r=f(a_r\alpha)$. Эта система уравнений на втором многообразии задает r регулярных поверхностей размерности $s(n-1)$

$$f(a_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_{sn})=a_1,\ldots,f(a_r,\alpha_1,\ldots,\alpha_{sn})=a_r. \tag{10}$$

Определение 7. Система точек $a_1,\ldots,a_r$ называется *базисной*, если ранг системы уравнений (10) максимальный относительно открытого и плотного подмножества точек α, т. е. равный sr.

Тогда система (10) в точках открытого и плотного подмножества задает регулярную поверхность размерности $s(n-r)$. Определение поверхности (10) в R^{sn} приводит к заданию $s(n-r)$-параметрической локальной группы Ли преобразований в R^s согласно уравнениям

$$i'=f(i,\alpha_1,\ldots,\alpha_{sn}),\quad f(a_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_{sn})=a_1,\ldots,f(a_r,\alpha_1,\ldots,\alpha_{sn})=a_r. \tag{11}$$

Очевидно, для этой группы точки $a_1,\ldots,a_r$ являются инвариантными.

Теорема 8. *Уравнения* (11) *задают подструктуру ранга* $(n-r+1,2)$ *физической структуры ранга* $(n+1,2)$. *Локальная группа Ли преобразований* (11) *является феноменологически симметричной и задает действие группы движений физической подструктуры ранга* $(n-r+1,2)$ *на первом множестве. Число базисных точек для группы* (11) *не больше* $n-1$.

Доказательство. Рассмотрим локальную квазигруппу $(K,*,e)$ и две произвольные точки $i,\alpha\in K$, причем $i=(i_1,\dots,i_n)$, $i_\mu\in R^s$, $\mu=1,\dots,n$, $\langle i_1\alpha\rangle,\dots,\langle i_n\alpha\rangle\in S_f$. Бинарная операция $(4'')$ задается уравнениями $b_1=f(i_1\alpha),\dots,b_{n-r}=f(i_{n-r}\alpha)$, $b_{n-r+1}=f(i_{n-r+1}\alpha),\dots,b_n=f(i_n\alpha)$. Рассмотрим r базисных точек $a_1,\dots,a_r$, определяющих поверхность (10). Тогда будем иметь уравнения

$$b_1=f(i_1\alpha),\dots,b_{n-r}=f(i_{n-r}\alpha),\ a_1=f(a_1\alpha),\dots,a_r=f(a_r\alpha). \tag{12}$$

Из аксиом А1 и А2 следует, что данная система однозначно разрешима относительно α, а первое уравнение относительно i_1. Для проверки аксиомы А3 сделаем в тождестве (1) подстановки $i_{n-r+1}=a_1,\dots,i_n=a_r$. Эти точки можно выбрать так, чтобы ранг функционального уравнения (1) не уменьшился. В результате получается новое уравнение, выражающее функциональную связь для s-метрической физической структуры ранга $(n-r+1,2)$. Уравнения (12), очевидно, задают локальную подквазигруппу $K(a_1,\dots,a_r)$ с правой единицей e квазигруппы $(K,*,e)$. Значит, уравнения (11) — действие феноменологически симметричной локальной группы Ли преобразований, являющейся действием группы движений физической подструктуры ранга $(n-r+1,2)$ на первом множестве. Из определения базисных точек следует, что их число не больше $n-1$. □

Совокупность базисных точек $a_1,\dots,a_r$ многообразия R^s будем называть *линейно независимой*, если векторы $a_2-a_1,\dots,a_r-a_1$ линейно независимы.

Теорема 9. *Пусть для локальной феноменологически симметричной группы Ли преобразований пространства* R^s *с уравнениями* (11) *число базисных точек не больше* $s+1$. *Тогда имеет место неравенство* $n\le s+2$.

Доказательство. Предположим, что базисных точек локальной феноменологически симметричной группы Ли преобразований пространства R^s с уравнениями (11) равно $s+2$, т. е. больше $s+1$. Тогда векторы $a_2-a_1,\dots,a_{s+1}-a_1,a_{s+2}-a_1$ линейно зависимы, следовательно, $a_{s+2}-a_1=c_2(a_2-a_1)+\dots+c_{s+1}(a_{s+1}-a_1)$ или $a_{s+2}=a_1+c_2(a_2-a_1)+\dots+c_{s+1}(a_{s+1}-a_1)$. Значит, получаем систему уравнений

$$f(a_1,\alpha_1,\dots,\alpha_{sn})=a_1,\dots,f(a_r,\alpha_1,\dots,\alpha_{sn})=a_r,$$

$$a_1+c_2(a_2-a_1)+\dots+c_{s+1}(a_{s+1}-a_1)=\\ =f(a_1\alpha)+c_2(f(a_2\alpha)-f(a_1\alpha))+\dots+c_{s+1}(f(a_{s+1}\alpha)-f(a_1\alpha)).$$

Ранг данной системы, очевидно, меньше максимального значения $s(s+2)$, следовательно, произвольная система $s+2$ точек не является базисной. Аналогичное имеет место и для системы из большего количества точек. Из данного доказательства, в частности, следует неравенство $n\le s+2$. □

Таким образом, в пространстве R^s феноменологически симметричная группа преобразований имеет, самое большее, размерность $s(s+2)$.

Пусть $X_1,\dots,X_{sn}$ — операторы алгебры Ли действия группы движений s-метрической физической структуры ранга $(n+1,2)$ на первом множестве, другими словами, операторы феноменологически симметричной группы преобразований. В явном виде

$$X_l = X_l^1 \partial_{x^1} + \cdots + X_l^s \partial_{x^s}, \quad l = 1, \ldots, sn. \tag{13}$$

По теореме 2 система функций (3) задает sn-метрическую физическую структуру ранга (2,2), группа движений которой локально действует просто транзитивно. Алгебра Ли группы движений данной структуры образована операторами

$$X_1(i_1, \ldots, i_n), \ldots, X_{sn}(i_1, \ldots, i_n), \tag{13'}$$

где $X_l(i_1, \ldots, i_n) = X_l(i_1) + \cdots + X_l(i_n)$. Матрица коэффициентов операторов $(13')$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} X_1^1(i_1) & \cdots & X_1^s(i_1) & \cdots & X_1^1(i_n) & \cdots & X_1^s(i_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{sn}^1(i_1) & \cdots & X_{sn}^s(i_1) & \cdots & X_{sn}^1(i_n) & \cdots & X_{sn}^s(i_n) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Теорема 10 (критерий феноменологической симметрии группы Ли преобразований)**.** *Локальная группа Ли преобразований пространства R^s, действующая по закону $i' = f(i\alpha)$, является локальной феноменологически симметричной тогда и только тогда, когда образованная по ней группа Ли преобразований с уравнениями* (3) *пространства R^{sn} локально просто транзитивна, т.е. ранг матрицы* (14) *максимален.*

Доказательство. Необходимость. Если группа преобразований с уравнениями $i' = f(i\alpha)$ феноменологически симметрична, то она задает физическую структуру ранга $(n+1, 2)$, первым множеством является R^s, а вторым – пространство параметров. По теореме 2 система функций (3) задает физическую структуру ранга $(2, 2)$. Поэтому ранг матрицы (14) максимален.

Достаточность. Если для системы функций (3), составленной по уравнениям $i' = f(i\alpha)$ группы преобразований пространства R^s, ранг матрицы (14) максимален, то она задает структуру ранга $(2, 2)$. Тогда из аксиом А1, А2, А3 следует, что функция $f(i\alpha)$ задает физическую структуру ранга $(n+1, 2)$. Поэтому группа Ли преобразований с уравнениями $i' = f(i\alpha)$ феноменологически симметрична. □

Теорема 11. *Любая s-мерная алгебра Ли L локально порождает s-метрическую физическую структуру ранга* $(2, 2)$ *и эта структура единственна.*

Доказательство. Запишем уравнения группы преобразований пространства R^s с алгеброй Ли L

$$x'^l = f^l(x^1, \ldots, x^s, a^1, \ldots, a^s), \quad l = 1, \ldots, s.$$

По определению локальной группы Ли преобразований якобиан $\frac{\partial(f^1,\ldots,f^s)}{\partial(x^1,\ldots,x^s)}$ не равен нулю. Докажем существование функций $f^1, \ldots, f^s$ таких, что $\frac{\partial(f^1,\ldots,f^s)}{\partial(a^1,\ldots,a^s)} \neq 0$. Последнее следует из следующей леммы.

Лемма. *Любая s-мерная алгебра Ли L является алгеброй Ли некоторой локально просто транзитивной локальной группы Ли преобразований пространства R^s.*

Доказательство. По теоремам Софуса Ли [7] любая s-мерная алгебра Ли L порождает s-мерную группу Ли, которая на себе действует транзитивно. В окрестности единицы эта группа диффеоморфна пространству R^s. Поэтому в пространстве R^s локально просто транзитивно действует группа Ли преобразований с алгеброй Ли L.

При $s = 1, 2, 3$ доказательство леммы можно взять из монографии [9].

Единственность теоремы следует из утверждения [10]: *любые две изоморфные просто транзитивные группы преобразований пространства R^s подобны.*

В данной работе подобие групп преобразований совпадает с изотопией. □

Теорема 12. *s-метрическая физическая структура ранга $(n+1,2)$ с алгеброй Ли L единственна.*

Доказательство. Любая s-метрическая физическая структура ранга $(n+1,2)$ с алгеброй Ли L согласно теореме 2 дополняется до sn-метрической физической структуры ранга $(2,2)$ с этой же алгеброй Ли L. Тогда из теоремы 11 вытекает утверждение теоремы 12. □

Рассмотрим локальную феноменологически симметричную группу Ли преобразований пространства R^s с уравнениями (11), задающими физическую подструктуру ранга $(n-r+1,2)$ структуры ранга $(n+1,2)$. Из уравнения (10) следует, что независимых параметров будет $s(n-r)$, в качестве которых возьмем $\alpha_1,\ldots,\alpha_{s(n-r)}$. Разрешая уравнения (10) относительно остальных параметров, получаем

$$\alpha_m=\varphi_m(\alpha_1,\ldots,\alpha_{s(n-r)}), m=s(n-r)+1,\ldots,sn.$$

Найдем производные от уравнений (11) по $\alpha_1,\ldots,\alpha_{s(n-r)}$ при $\alpha=e$

$$Y_\mu=X_\mu+c^\nu_\mu X_{s(n-r)+\nu},\quad Y^l_\mu(i)=X^l_\mu(i)+c^\nu_\mu X^l_{s(n-r)+\nu}(i), \tag{15}$$
$$Y^l_\mu(a_t)=X^l_\mu(a_t)+c^\nu_\mu X^l_{s(n-r)+\nu}(a_t)=0,$$

где $c^\nu_\mu=\frac{\partial\varphi^{s(n-r)+\nu}}{\partial\alpha_\mu}|_{\alpha=e}$, $t=1,\ldots,r,l$, $\nu=1,\ldots,sr$, $\mu=1,\ldots,s(n-r)$. Операторы (15) составляют базис алгебры Ли группы преобразований (11). Видно, что для векторных полей Y_μ точки $a_1,\ldots,a_r$ являются стационарными.

Коммутаторы алгебры Ли для базисных операторов X_l имеют вид

$$[X_m,X_l]=C^k_{ml}X_k,\ \ m,l,k=1,\ldots,sn. \tag{16}$$

Вычислим теперь коммутаторы операторов (15).

Теорема 13. *Коммутаторы операторов* (15) *алгебры Ли локальной феноменологически симметричной группы Ли преобразований* (11) *имеют вид*

$$[Y_{\mu_1},Y_{\mu_2}]=C'^{\mu_3}_{\mu_1\mu_2}Y_{\mu_3},$$
$$C'^{\mu_3}_{\mu_1\mu_2}=C^{\mu_3}_{\mu_1\mu_2}+c^{\nu_2}_{\mu_2}C^{\mu_3}_{\mu_1\nu_2}+c^{\nu_1}_{\mu_1}C^{\mu_3}_{\nu_1\mu_2}+c^{\nu_1}_{\mu_1}c^{\nu_2}_{\mu_2}C^{\mu_3}_{\nu_1\nu_2},$$
$$C^{\mu_3}_{\mu_1\mu_2}c^\nu_{\mu_3}+c^{\nu_2}_{\mu_2}C^{\mu_3}_{\mu_1\nu_2}c^\nu_{\mu_3}+c^{\nu_1}_{\mu_1}C^{\mu_3}_{\nu_1\mu_2}c^\nu_{\mu_3}+c^{\nu_1}_{\mu_1}c^{\nu_2}_{\mu_2}C^{\mu_3}_{\nu_1\nu_2}c^\nu_{\mu_3}=0,$$

где $\mu_1,\mu_2,\mu_3=1,\ldots,s(n-r)$, $\nu_1,\nu_2=1,\ldots,sr$.

Доказательство. Вычисляя коммутаторы $[Y_{\mu_1},Y_{\mu_2}]$ и учитывая формулы (16), получаем $[Y_{\mu_1},Y_{\mu_2}]=C^k_{\mu_1\mu_2}X_k+c^{\nu_2}_{\mu_2}C^k_{\mu_1\nu_2}X_k+c^{\nu_1}_{\mu_1}C^k_{\nu_1\mu_2}X_k+c^{\nu_1}_{\mu_1}c^{\nu_2}_{\mu_2}C^k_{\nu_1\nu_2}X_k$, $k=1,\ldots,sn$. Согласно (15) и тому, что правая часть коммутаторов $[Y_{\mu_1},Y_{\mu_2}]$ есть линейная комбинация операторов Y_μ, приходим к утверждению теоремы. □

4. Феноменологически симметричное произведение физических структур. Рассмотрим две физические структуры различного ранга. Первая структура ранга $(n_1+1,2)$, ее метрическая функция $f_1: R^{s_1}\times R^{s_1n_1}\to R^{s_1}$, а вторая структура ранга $(n_2+1,2)$, $f_2: R^{s_2}\times R^{s_2n_2}\to R^{s_2}$. Рассмотрим функцию

$$f_1\times f_2:(R^{s_1}\times R^{s_1n_1})\times(R^{s_2}\times R^{s_2n_2})\to R^{s_1+s_2}, \tag{17}$$

которая задает $s_1n_1+s_2n_2$-параметрическую локальную группу Ли преобразований в $R^{s_1}\times R^{s_2}$. Запишем действие группы преобразований (17) в явном виде

$$i'=f_1(i,a_1,\dots,a_{s_1n_1}),\quad j'=f_2(j,b_1,\dots,b_{s_2n_2}). \tag{17'}$$

Обозначим $a=(a_1,\dots,a_{s_1n_1})$, $b=(b_1,\dots,b_{s_2n_2})$. Тождественному преобразованию соответствуют значения $a=b=e$. Предположим, что параметры группы преобразований (17′) связаны уравнениями

$$b_l=\varphi_l(a_1,\dots,a_{s_1n_1}),\quad l=1,\dots,s_2n_2, \tag{18}$$

причем $\varphi(e)=e$. Пусть ранг системы (18) равен r.

Теорема 14. *Если существует натуральное число m такое, что $(s_1+s_2)m=s_1n_1+s_2n_2-r$, то гладкая функция* (17) *задает s_1+s_2-метрическую физическую структуру ранга* $(\frac{s_1n_1+s_2n_2-r}{s_1+s_2}+1,2)$.

Доказательство. Рассмотрим локальную феноменологически симметричную группу Ли преобразований (17). Предположим, что параметры этих групп связаны системой уравнений (18) ранга r. В пространстве R^{s_1} возьмем n_1 точек $i_1,\dots,i_{n_1}$, а в пространстве R^{s_2} — n_2 точек $j_1,\dots,j_{n_2}$. Получаем систему уравнений

$$i'_l=f_l(i,a_1,\dots,a_{s_1n_1}),\quad j'_k=f_k(j,b_1,\dots,b_{s_2n_2}),\quad b_k=\varphi_k(a_1,\dots,a_{s_1n_1}),$$

причем $k=1,\dots,s_2n_2$, $l=1,\dots,s_1n_1$. Данная система, очевидно, удовлетворяет аксиомам феноменологической симметрии, если существует натуральное число m такое, что $(s_1+s_2)m=s_1n_1+s_2n_2-r$. В таком случае функция (17) задает физическую структуру ранга $(\frac{s_1n_1+s_2n_2-r}{s_1+s_2}+1,2)$. □

Определение 8. Построенная в теореме 14 s_1+s_2-метрическая физическая структура ранга $(\frac{s_1n_1+s_2n_2-r}{s_1+s_2}+1,2)$ называется *феноменологически симметричным произведением* s_1-метрической физической структуры ранга $(n_1+1,2)$ на s_2-метрическую физическую структуру ранга $(n_2+1,2)$. Если параметры a и b не зависят друг от друга, то произведение будем называть *прямым.*

Следствие. Если $n_1=n_2=n$, то ранг феноменологически симметричного прямого произведения равен $(n+1-\frac{r}{s_1+s_2},2)$.

Рассмотрим феноменологически симметричное произведение двух физических структур рангов $(n_1+1,2)$ и $(n_2+1,2)$, задаваемое уравнениями (17′). Независимые параметры обозначим $\alpha_1,\dots,\alpha_{s_1n_1+s_2n_2-r}$. Тогда

$$a_l=\varphi_l(\alpha_1,\dots,\alpha_{s_1n_1+s_2n_2-r}),\quad b_l=\psi_l(\alpha_1,\dots,\alpha_{s_1n_1+s_2n_2-r}), \tag{19}$$

причем тождественному преобразованию группы (17′) соответствуют параметры $\alpha_1,\dots,\alpha_{s_1n_1+s_2n_2-r}$, при которых $a=b=e$. Пусть X_m и Y_k — базисные операторы группы преобразований (17′). Найдем теперь базисные операторы алгебры Ли, для этого вычислим производные от уравнений (17′) и (19) по $\alpha_1,\dots,\alpha_{s_1n_1+s_2n_2-r}$ при $a=b=e$

$$Z_l=c_l^mX_m(i)+d_l^kY_k(j), \tag{20}$$

где $c_l^m=\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha_l}|_{a=b=e}$, $d_l^k=\frac{\partial\psi_k}{\partial\alpha_l}|_{a=b=e}$, $l=1,\dots,s_1n_1+s_2n_2-r$; $m=1,\dots,s_1n_1$; $k=1,\dots,s_2n_2$. Коммутаторы операторов (20) имеют следующий вид:

$$[Z_{l_1},Z_{l_2}]=c_{l_1}^{m_1}c_{l_2}^{m_2}C_{m_1m_2}^{m_3}X_{m_3}(i)+d_{l_1}^{k_1}d_{l_2}^{k_2}D_{k_1k_2}^{k_3}Y_{k_3}(i),$$

где $l_1,l_2=1,\dots,s_1n_1+s_2n_2-r$; $m_1,m_2,m_3=1,\dots,s_1n_1$; $k_1,k_2,k_3=1,\dots,s_2n_2$; $C_{m_1m_2}^{m_3}$, $D_{k_1k_2}^{k_3}$ — структурные константы группы преобразований (17′).

Литература

[1] Михайличенко Г.Г. *Групповая симметрия физических структур.* – Барнаул, Горно-Алтайск, 2003. – 204 с.

[2] Симонов А.А. *Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур* // Прилож. к книге Кулакова Ю.И. “Теория физических структур”. – М.: ООО “Компания Юниверс Контракт”, 2004. – 847 с.

[3] Михайличенко Г.Г. *Феноменологическая и групповая симметрия в геометрии двух множеств* (*теории физических структур*) // ДАН СССР. – 1985. – Т. 28. – № 1. – С. 39–41.

[4] Акивис М.А., Шелехов А.М. *Введение в теорию три-тканей.* – Калинин: КГУ, 1985. – 84 с.

[5] Михайличенко Г.Г. *Двуметрические физические структуры ранга* $(n+1,2)$ // Сиб. матем. журн. – 1993. – Т. 34. – № 3. – С. 132–143.

[6] Белоусов В.Д. *Основы теории квазигрупп и луп.* – М.: Наука, 1967. – 224 с.

[7] Понтрягин Л.С. *Непрерывные группы.* – М.: Наука, 1973. – 527 с.

[8] Chatterjea S.K. *On Ward quasigroups* // Pure Math. Manuscript. – 1987. – V. 6. – P. 31–34.

[9] Михайличенко Г.Г. *Полиметрические геометрии.* – Новосибирск: НГУ, 2001. – 146 с.

[10] Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 399 с.

В.А. Кыров

доцент, кафедра физики и методики преподавания физики,
Горно-Алтайский государственный университет,
649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1,

e-mail: kfizika@gasu.ru

V.A. Kyrov

Associate Professor, Chair of Physics and Teaching Principles,
Gorny Altai State University,
1 Lenkin str., Gorno-Altaisk, 649000 Russia,

e-mail: kfizika@gasu.ru