Сибирский журнал
индустриальной математики
Январь–март, 2009. Том XII, № 1(37)

УДК 517.952:512.816

КРИТЕРИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ $sn(n+1)/2$–ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^{sn}$

В. А. Кыров

Доказывается критерий невырожденности $sn(n+1)/2$-параметрической локальной группы Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^{sn}$.

Ключевые слова: невырожденная группа Ли преобразований.

1. Постановка задачи. Возьмем $sn(n+1)/2$-параметрическую локальную группу Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^{sn}$, $s, n \in \mathbb{N}$:

$$x'_r = \varphi_r(x_1, \dots, x_{sn}, a_1, \dots, a_{sn(n+1)/2}), \quad r = 1, \dots, sn,$$

где нулевым значениям параметров соответствует тождественное преобразование. Базис алгебры Ли этой группы Ли преобразований образуют операторы

$$X_\mu = \lambda^1_\mu(x_1, \dots, x_{sn})\partial_{x_1} + \dots + \lambda^{sn}_\mu(x_1, \dots, x_{sn})\partial_{x_{sn}}, \tag{1}$$

где $\mu = 1, \dots, sn(n+1)/2$, а коэффициенты λ^t_μ — дифференцируемые функции, $t = 1, \dots, sn$. Двухточечный инвариант группы преобразований — интеграл системы уравнений

$$X_\mu(i)f(i,j) + X_\mu(j)f(i,j) = 0, \quad \mu = 1, \dots, sn(n+1)/2, \tag{2}$$

обозначаемый $f(i,j) = (f^1(i,j), \dots, f^s(i,j))$ [1], где $f^m(i,j)$, $m = 1, \dots, s$, — гладкая функция от $2sn$ переменных $(x_1(i), \dots, x_{sn}(i), x_1(j), \dots, x_{sn}(j))$, $(x_1(i), \dots, x_{sn}(i))$ — локальные координаты точки i, а $X_\mu(i)$, $X_\mu(j)$ — значения оператора X_μ на точках i и j.

Определение. $sn(n+1)/2$-Параметрическая группа Ли преобразований пространства $\mathbb{R}^{sn}$ называется невырожденной, если ее двухточечный инвариант $f(i,j)$ имеет открытую и плотную область определения $N \subset \mathbb{R}^{sn} \times \mathbb{R}^{sn}$ и удовлетворяет условию невырожденности: отличны от нуля якобианы

$$\frac{\partial(f(i,i_1), \dots, f(i,i_n))}{\partial(x_1(i), \dots, x_{sn}(i))} \neq 0, \quad \frac{\partial(f(i_1,i), \dots, f(i_n,i))}{\partial(x_1(i), \dots, x_{sn}(i))} \neq 0 \tag{3}$$

на открытом и плотном множестве последовательностей $n+1$ точек $\langle i, i_1, \dots, i_n\rangle$ из $(\mathbb{R}^{sn})^{n+1}$, причем пары $\langle i, i_1\rangle, \dots, \langle i, i_n\rangle, \langle i_1, i\rangle, \dots, \langle i_n, i\rangle \in N$ [2, 3].

Теорема. *Локальная $sn(n+1)/2$-параметрическая группа Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^{sn}$ с базисными операторами* (1) *является невырожденной тогда и только тогда, когда имеет место неравенство*

$$\begin{vmatrix} M^1_{11}(i,i_1) & M^1_{12}(i,i_1) & \dots & M^1_{1(sn)}(i,i_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^1_{11}(i,i_n) & M^1_{12}(i,i_n) & \dots & M^1_{1(sn)}(i,i_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^s_{11}(i,i_1) & M^s_{12}(i,i_1) & \dots & M^s_{1(sn)}(i,i_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^s_{11}(i,i_n) & M^s_{12}(i,i_n) & \dots & M^s_{1(sn)}(i,i_n) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4}$$

для открытого и плотного множества последовательностей $n+1$ *точек* $\langle i, i_1, \ldots, i_n\rangle$ *из* $(\mathbb{R}^{sn})^{n+1}$, *где* $\langle i, i_1\rangle, \ldots, \langle i, i_n\rangle \in N$ *и* $M^m_{11}, \ldots, M^m_{1(sn)}$ — *миноры матрицы*

$$\begin{pmatrix} z^1 & \ldots & z^{sn} & z^{sn+1} & \ldots & z^{sn+m-1} & z^{sn+m+s-1} & \ldots & z^{2sn} \\ \lambda_1^1(i) & \ldots & \lambda_1^{sn}(i) & \lambda_1^1(j) & \ldots & \lambda_1^{m-1}(j) & \lambda_1^{m+s-1}(j) & \ldots & \lambda_1^{sn}(j) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_d^1(i) & \ldots & \lambda_d^{sn}(i) & \lambda_d^1(j) & \ldots & \lambda_d^{m-1}(j) & \lambda_d^{m+s-1}(j) & \ldots & \lambda_d^{sn}(j) \end{pmatrix},$$

$d = s(2n-1)$, $m = 1, \ldots, s$. *Минор* $M^m_{1\sigma}$ *получается в пересечении первой строки и столбца с номером* σ, $\sigma = 1, \ldots, sn$, *указанной матрицы.*

Данная теорема утверждает равносильность неравенства (4) и условия невырожденности двухточечного инварианта $f(i,j)$. Получаемые здесь результаты могут найти свое применение как в теории дифференциальных уравнений, так и в теории групп Ли преобразований. В частности, по операторам группы Ли преобразований можно выяснить, является ли она группой движений геометрии, в которой по этим преобразованиям полностью восстанавливается «метрика». Этот результат используется в теории физических структур при классификации феноменологически симметричных геометрий, поскольку группы движений этих геометрий невырождены [2–4].

2. Доказательство теоремы. Уравнения инвариантности (2) для $sn(n+1)/2$-параметрической локальной группы Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^{sn}$ с базисными операторами (1) записываются в явном виде следующим образом:

$$\lambda^1_\mu(i)\frac{\partial f^m(i,j)}{\partial x_1(i)} + \cdots + \lambda^{sn}_\mu(i)\frac{\partial f^m(i,j)}{\partial x_{sn}(i)} + \lambda^1_\mu(j)\frac{\partial f^m(i,j)}{\partial x_1(j)} + \cdots + \lambda^{sn}_\mu(j)\frac{\partial f^m(i,j)}{\partial x_{sn}(j)} = 0,$$

где $m = 1, \ldots, s$, $\mu = 1, \ldots, sn(n+1)/2$. Матрица коэффициентов системы уравнений для $f^m(i,j)$ имеет размерность $(sn(n+1)/2) \times 2sn$, причем ее ранг равен $s(2n-1)$. Тогда первые $s(2n-1)$ уравнений для каждого m можно считать функционально независимыми, в противном случае необходимое число уравнений выделяется перенумерацией. Исходная система $s^2(2n-1)$ уравнений в пространстве $\mathbb{R}^{2sn}$ координат $(x_1(i), \ldots, x_{sn}(i), x_1(j), \ldots, x_{sn}(j))$ рассматривается как $2s^2n - s^2$ скалярных произведений векторов

$$(\vec{M}^m \cdot \vec{F}_1) = 0, \ldots, (\vec{M}^m \cdot \vec{F}_{s(2n-1)}) = 0,$$

где

$$\vec{M}^m = \left(\frac{\partial f^m(i,j)}{\partial x_1(i)}, \ldots, \frac{\partial f^m(i,j)}{\partial x_{sn}(i)}, \frac{\partial f^m(i,j)}{\partial x_1(j)}, \ldots, \frac{\partial f^m(i,j)}{\partial x_{sn}(j)}\right), \quad m = 1, \ldots, s,$$
$$\vec{F}_\nu = \big(\lambda^1_\nu(i), \ldots, \lambda^{sn}_\nu(i), \lambda^1_\nu(j), \ldots, \lambda^{sn}_\nu(j)\big), \quad \nu = 1, \ldots, s(2n-1).$$

Векторы $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_{s(2n-1)}$ линейно независимы в каждой точке некоторого открытого и плотного подмножества из $\mathbb{R}^{2sn}$, так как соответствующие им базисные операторы из (1) линейно независимы.

Далее воспользуемся определением векторного произведения $2q-1$ векторов $\vec{a}_1 = \big(a^1_1, \ldots, a^{2q}_1\big), \ldots, \vec{a}_{2q-1} = \big(a^1_{2q-1}, \ldots, a^{2q}_{2q-1}\big)$ в пространстве $\mathbb{R}^{2q}$. Под векторным произведением $2q-1$ векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{2q-1}$ в пространстве $\mathbb{R}^{2q}$ понимается вектор $\vec{a} = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{2q-1}]$ с координатами $\vec{a} = (a^1, \ldots, a^{2q})$:

$$a^\tau = (-1)^{\tau+1} M_{1\tau}, \quad \tau = 1, \ldots, 2q,$$

где $M_{1\tau}$ — минор, получающийся при пересечении первой строки и столбца под номером τ матрицы

$$\begin{pmatrix} a^1 & a^2 & \dots & a^{2q} \\ a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2q-1}^1 & a_{2q-1}^2 & \dots & a_{2q-1}^{2q} \end{pmatrix}.$$

Лемма. *Векторное произведение $\vec{a} = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{2q-1}]$ линейно независимых векторов $\vec{a}_1 = \left(a_1^1, \dots, a_1^{2q}\right), \dots, \vec{a}_{2q-1} = \left(a_{2q-1}^1, \dots, a_{2q-1}^{2q}\right)$ в пространстве $\mathbb{R}^{2q}$ нормально к гиперпространству, натянутому на эти векторы.*

Вернемся к доказательству теоремы. Рассмотрим проекцию $\vec{F}_\nu^m$ вектора $\vec{F}_\nu$ на подпространство $\mathbb{R}^{2sn-s+1}$:

$$\vec{F}_\nu^m = \left(\lambda_\nu^1(i), \dots, \lambda_\nu^{sn}(i), \lambda_\nu^1(j), \dots, \lambda_\nu^{m-1}(j), \lambda_\nu^{m+s-1}(j), \dots, \lambda_\nu^{sn}(j)\right).$$

По сформулированной выше лемме векторное произведение $\vec{K}^m = \left[\vec{F}_1^m, \dots, \vec{F}_{2sn-s}^m\right]$ нормально к совокупности векторов $\vec{F}_\nu^m$, $\nu = 1, \dots, s(2n-1)$. Согласно определению координаты вектора $\vec{K}^m$ записываются в следующем виде:

$$\vec{K}^m = \left(M_{11}^m, \dots, (-1)^{2sn-s+1} M_{1(2sn-s+1)}^m\right), \quad m = 1, \dots, s.$$

Построенный вектор является проекцией вектора $\vec{K}_0^m$ из пространства $\mathbb{R}^{2sn}$ на $\mathbb{R}^{2sn-s+1}$. У вектора $\vec{K}_0^m$ ненулевые координаты совпадают с координатами вектора $\vec{K}^m$, а на местах $sn+m, \dots, sn+m+s-1$ стоят нули, причем последовательность ненулевых координат вектора $\vec{K}_0^m$ такая же, как и последовательность координат у вектора $\vec{K}^m$. Из построения вытекает, что $\left(\vec{F}_\nu, \vec{K}_0^m\right) = 0$, где $\nu = 1, \dots, s(2n-1)$, $m = 1, \dots, s$. По построению векторы $\vec{K}^1, \dots, \vec{K}^s$ линейно независимы в открытом и плотном подмножестве пространства координат $(x_1(i), \dots, x_{sn}(i), x_1(j), \dots, x_{sn}(j))$, где задана система уравнений. Из определения векторов $\vec{K}_0^1, \dots, \vec{K}_0^s$ и $\vec{M}^1, \dots, \vec{M}^s$ следует, что они линейно независимы и лежат в одном и том же подпространстве из $\mathbb{R}^{2sn}$. Тогда компоненты вектора $\vec{M}^m$ возьмем пропорциональными соответствующим компонентам вектора $\vec{K}_0^m$, что возможно, поскольку двухточечный инвариант $f(i,j)$ является общим решением системы уравнений (2):

$$\frac{\partial f^m(i,j)}{\partial x_1(i)} = (-1)^{1+1} \omega^m M_{11}^m(i,j), \dots, \frac{\partial f^m(i,j)}{\partial x_{sn}(i)} = (-1)^{sn+1} \omega^m M_{1(sn)}^m(i,j),$$
$$\frac{\partial f^m(i,j)}{\partial x_1(j)} = (-1)^{1+1} \omega^m M_{11}^m(ji), \dots, \frac{\partial f^m(i,j)}{\partial x_{sn}(j)} = (-1)^{sn+1} \omega^m M_{1(sn)}^m(ji),$$

где $\omega^m = \omega^m(x_1(i), \dots, x_{sn}(i), x_1(j), \dots, x_{sn}(j))$ — ненулевая дифференцируемая функция. Подставляя найденные производные в якобианы (3), приходим к неравенству (4). Таким образом, если группа преобразований невырождена, т. е. выполняются неравенства (3), то имеет место неравенство (4), и наоборот. □

3. Примеры для $s = 2$, $n = 1$. В этом случае утверждение теоремы состоит в том, что локальная двухпараметрическая группа Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^2$ с базисными операторами

$$X_1 = \lambda_1^1(x_1, x_2)\partial_{x_1} + \lambda_1^2(x_1, x_2)\partial_{x_2}, \quad X_2 = \lambda_2^1(x_1, x_2)\partial_{x_1} + \lambda_2^2(x_1, x_2)\partial_{x_2} \qquad (1')$$

является невырожденной тогда и только тогда, когда имеет место неравенство

$$\begin{vmatrix} M_{11}^1(i,i_1) & M_{12}^1(i,i_1) \\ M_{11}^2(i,i_1) & M_{12}^2(i,i_1) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4$'$}$$

для открытого и плотного множества пар точек из $\mathbb{R}^4$, где $\langle i, i_1\rangle \in N$, M_{11}^1, M_{12}^1, M_{11}^2, M_{12}^2 — миноры матриц

$$\begin{pmatrix} z^1 & z^2 & z^3 \\ \lambda_1^1(i) & \lambda_1^2(i) & \lambda_1^2(j) \\ \lambda_2^1(i) & \lambda_2^2(i) & \lambda_2^2(j) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z^1 & z^2 & z^3 \\ \lambda_1^1(i) & \lambda_1^2(i) & \lambda_1^1(j) \\ \lambda_2^1(i) & \lambda_2^2(i) & \lambda_2^1(j) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Рассмотрим два примера [4]. Возьмем сначала группу преобразований плоскости с базисными операторами алгебры Ли $X_1 = \partial_{x_1}$, $X_2 = x_1\partial_{x_1} + \partial_{x_2}$. Определители матриц (5) тогда принимают вид

$$\begin{vmatrix} z^1 & z^2 & z^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ x_1(i) & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z^1 & z^2 & z^3 \\ 1 & 0 & 1 \\ x_1(i) & 1 & x_1(j) \end{vmatrix}.$$

Поэтому $M_{11}^1 = 0$, $M_{12}^1 = 1$, $M_{11}^2 = -1$, $M_{12}^2 = x_1(j) - x_1(i)$. Определитель неравенства (4$'$) равен единице. Тогда неравенство (4$'$) в $\mathbb{R}^4$ отлично от нуля. Таким образом, описываемая группа преобразований невырождена. В этом можно также убедиться, вычисляя явно двухточечный инвариант и исследуя его на невырожденность. Действительно, двухточечный инвариант находится интегрированием уравнений (1$'$): $f^1(i,j) = (x_1(i) - x_1(j))e^{-x_2(i)}$, $f^2(i,j) = (x_1(i) - x_1(j))e^{-x_2(j)}$. Тогда первый якобиан из (3) равен

$$\frac{\partial(f^1(i,j), f^2(i,j))}{\partial(x_1(i), x_2(i))} = (x_1(i) - x_1(j))e^{-(x_2(i)+x_2(j))} \neq 0.$$

Аналогично и для второго якобиана:

$$\frac{\partial(f^1(i,j), f^2(i,j))}{\partial(x_1(j), x_2(j))} = (x_1(i) - x_1(j))e^{-(x_2(i)+x_2(j))} \neq 0.$$

Рассмотрим еще одну группу преобразований с базисными операторами $X_1 = \partial_{x_1}$, $X_2 = x_2\partial_{x_1}$. Определители (5) имеют вид

$$\begin{vmatrix} z^1 & z^2 & z^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ x_2(i) & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z^1 & z^2 & z^3 \\ 1 & 0 & 1 \\ x_2(i) & 0 & x_2(j) \end{vmatrix}.$$

Поэтому $M_{11}^1 = 0$, $M_{12}^1 = 0$, $M_{11}^2 = 0$, $M_{12}^2 = x_2(j) - x_2(i)$. Определитель неравенства (4$'$) тогда равен нулю. Поэтому группа преобразований не является невырожденной. В этом можно убедиться, вычисляя двухточечный инвариант, который вырожден: $f^1(i,j) = x_2(i)$, $f^2(i,j) = x_2(j)$.

4. Примеры для $s = 1$, $n = 2$. В этом случае утверждение теоремы состоит в том, что локальная трехпараметрическая группа Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^2$ с базисными операторами

$$X_1 = \lambda_1^1\partial_{x_1} + \lambda_1^2\partial_{x_2}, \quad X_2 = \lambda_2^1\partial_{x_1} + \lambda_2^2\partial_{x_2}, \quad X_3 = \lambda_3^1\partial_{x_1} + \lambda_3^2\partial_{x_2} \tag{1$''$}$$

является невырожденной тогда и только тогда, когда имеет место неравенство

$$\begin{vmatrix} M_{11}^1(i,i_1) & M_{12}^1(i,i_1) \\ M_{11}^1(i,i_2) & M_{12}^1(i,i_2) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4$''$}$$

для открытого и плотного множества троек из $(\mathbb{R}^2)^3$, где $\langle i, i_1\rangle, \langle i, i_2\rangle \in N$, M_{11}, M_{12} — миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} z^1 & z^2 & z^3 & z^4 \\ \lambda_1^1(i) & \lambda_1^2(i) & \lambda_1^1(j) & \lambda_1^2(j) \\ \lambda_2^1(i) & \lambda_2^2(i) & \lambda_2^1(j) & \lambda_2^2(j) \\ \lambda_3^1(i) & \lambda_3^2(i) & \lambda_3^1(j) & \lambda_3^2(j) \end{pmatrix}.$$

Приведем два примера [3]. Рассмотрим сначала группу движений евклидовой плоскости

$$x_1' = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + c, \quad x_2' = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha + d.$$

Базис алгебры Ли образуют операторы $X_1 = \partial_{x_1}$, $X_2 = \partial_{x_2}$, $X_3 = -x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2}$. Очевидно, что $M_{11}(i,j) = x_1(j) - x_1(i)$, $M_{12}(i,j) = x_2(j) - x_2(i)$. Тогда определитель неравенства (4) равен $(x_1(k) - x_1(i))(x_2(j) - x_2(i)) - (x_2(k) - x_2(i))(x_1(j) - x_1(i))$. Данное выражение отлично от нуля на открытом и плотном подмножестве из $(\mathbb{R}^2)^3$. Таким образом, группа движений плоскости Евклида невырождена.

Рассмотрим еще одну группу преобразований

$$x_1' = x_1 + c, \quad x_2' = ax_1 + x_2 + d$$

с базисом ее алгебры Ли $X_1 = \partial_{x_1}$, $X_2 = \partial_{x_2}$, $X_3 = x_1\partial_{x_2}$. Легко вычисляются миноры $M_{11}(i,j) = x_1(j) - x_1(i)$, $M_{12}(i,j) = 0$. Тогда определитель неравенства (4) равен нулю. Поэтому группа преобразований не является невырожденной. Двухточечный инвариант имеет вид $f(i,j) = x_1(i) - x_1(j)$ и, следовательно, является вырожденным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Михайличенко Г. Г.* О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 2. С. 284–288.
3. *Михайличенко Г. Г.* Полиметрические геометрии. Новосибирск, 2001.
4. *Михайличенко Г. Г.* Простейшие полиметрические геометрии // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 1. С. 22–24.

Кыров Владимир Александрович
Горно-Алтайский госуниверситет
ул. Социалистическая, 14
649000 г. Горно-Алтайск
E-mail: kfizika@gasu.ru

Статья поступила 19 мая 2008 г.