

В. А. Кыров, Р. М. Мурадов

НЕКОТОРЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ИХ ИНВАРИАНТЫ

В данной работе устанавливается связь физической структуры ранга $(n+1, 2)$ с группами Ли преобразований. Находятся инварианты групп Ли преобразований, задающих однометрические и двуметрические физические структуры.

Ключевые слова: физическая структура, квазигруппа, группа преобразований, инвариант.

§ 1. Физическая структура ранга $(n+1, 2)$

Рассмотрим гладкие многообразия N и B , $\dim B = s$, а также гладкое отображение $f : B \times N \rightarrow B$, называемое *метрическим*. Построим вспомогательное отображение $F : B^n \times N \rightarrow B^n$ по формуле

$$F(i_1, \dots, i_n; \alpha) = (f(i_1\alpha), \dots, f(i_n\alpha)),$$

где n — натуральное число, $B^n = \underbrace{B \times \dots \times B}_n$, $\langle i_1, \dots, i_n \rangle \in B^n$, $\alpha \in N$. Обозначим $\Omega_N \subset N$, $\Omega_{B^n} \subset B^n$ — открытые и плотные подмногообразия, причем область значений ограничения отображения F на подмногообразии $\Omega_{B^n} \times \Omega_N$ равна Ω_{B^n} . Пусть выполняются аксиомы [1]:

A1. $\forall \langle i_1, \dots, i_n \rangle \in \Omega_{B^n}$ и $\forall \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in \Omega_{B^n}$, $\exists! \alpha \in N$ такая, что $F(i_1, \dots, i_n; \alpha) = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$.

A2. $\forall \alpha \in \Omega_N$ и $\forall b \in B$, $\exists! i \in M$ такая, что $f(i\alpha) = b$.

Зафиксируем точки $\langle j_1, \dots, j_n \rangle \in \Omega_{B^n}$ и $\beta \in \Omega_N$. Из A1 и A2 следует существование биекций

$$\varphi_{j_1, \dots, j_n} : N \rightarrow \Omega_{B^n}, \quad \psi_\beta : B \rightarrow B. \quad (1)$$

На элементах эти биекции задаются формулами

$$\varphi_{j_1, \dots, j_n}(\alpha) = (f(j_1\alpha), \dots, f(j_n\alpha)) = \langle \alpha^1, \dots, \alpha^n \rangle, \quad \psi_\beta(i) = f(i\beta) = i^1,$$

где $i^1 \in B$, $\langle \alpha^1, \dots, \alpha^n \rangle \in \Omega_{B^n}$.

A3. Отображения (1) — диффеоморфизмы.

Построим новое отображение $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \rightarrow B$, также называемое *метрическим*:

$$\bar{f}(i^1, \alpha^1, \dots, \alpha^n) = f(i\alpha) = f(\psi_\beta^{-1}(i^1), \varphi_{j_1, \dots, j_n}^{-1}(\alpha^1, \dots, \alpha^n)), \quad (2)$$

где $i^1 \in B$, $\langle \alpha^1, \dots, \alpha^n \rangle \in \Omega_{B^n}$. Из определения метрического отображения f и аксиомы A3 следует гладкость отображения (2). Введем еще одно отображение $\bar{F} : B^n \times \Omega_{B^n} \rightarrow B^n$:

$$\bar{F}(i^1, \dots, i^n; \alpha^1, \dots, \alpha^n) = (\bar{f}(i^1, \alpha^1, \dots, \alpha^n), \dots, \bar{f}(i^n, \alpha^1, \dots, \alpha^n)), \quad (3)$$

гладкость которого следует из построения. Заметим, что каждая компонента отображения \bar{F} — это \bar{f} . Отображения \bar{f} и \bar{F} удовлетворяют аксиомам:

Б1. $\forall \langle i^1, \dots, i^n \rangle, \langle b^1, \dots, b^n \rangle \in \Omega_{B^n}, \exists! \langle \alpha^1, \dots, \alpha^n \rangle \in \Omega_{B^n}$, что $\bar{F}(i^1, \dots, i^n; \alpha^1, \dots, \alpha^n) = \langle b^1, \dots, b^n \rangle$.

Б2. $\forall \langle \alpha^1, \dots, \alpha^n \rangle \in \Omega_{B^n}$ и $\forall b \in B, \exists! i^1 \in B$ такая, что $\bar{f}(i^1, \alpha^1, \dots, \alpha^n) = b$.

Теорема 1. Многообразие Ω_{B^n} является гладкой лупой с бинарной операцией $\bar{F} : \Omega_{B^n} \times \Omega_{B^n} \rightarrow \Omega_{B^n}$, определенной по формуле (3), причем единицей является набор $e = (e^1, \dots, e^n) = (f(j_1\beta), \dots, f(j_n\beta)) \in \Omega_{B^n}$.

Определение квазигруппы хорошо известно [2]. Многообразие является *гладкой квазигруппой*, если на нем определена гладкая квазигрупповая операция. Гладкая квазигруппа с единицей называется *гладкой лупой*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Квазигрупповые свойства отображения (3) следуют из его определения и выше сформулированных аксиом Б1 и Б2. Докажем теперь, что единицей является набор $e = (e^1, \dots, e^n) = (f(j_1\beta), \dots, f(j_n\beta)) \in \Omega_{B^n}$ (метод доказательства приведен в [1]). Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{F}(e^1, \dots, e^n; \alpha^1, \dots, \alpha^n) &= \\ &= (\bar{f}(e^1, \alpha^1, \dots, \alpha^n), \dots, \bar{f}(e^n, \alpha^1, \dots, \alpha^n)) = (f(j_1\alpha), \dots, f(j_n\alpha)) = (\alpha^1, \dots, \alpha^n), \end{aligned}$$

т. е. e — левая единица. Аналогично проверяется, что e — правая единица. Значит, отображение (3) в Ω_{B^n} определяет лупу. Из выше сформулированных аксиом следует гладкость этой лупы. \square

Лупу, определенную в теореме 1, обозначим (Ω_{B^n}, \circ, e) :

$$\bar{F}(i^1, \dots, i^n; \alpha^1, \dots, \alpha^n) = I \circ A, \quad (3')$$

где $I = \langle i^1, \dots, i^n \rangle \in \Omega_{B^n}$, $A = \langle \alpha^1, \dots, \alpha^n \rangle \in \Omega_{B^n}$.

Квазигруппа называется *частичной*, если квазигрупповые аксиомы выполняются для открытого и плотного подмножества.

Теорема 1'. Отображение (3) на многообразии B^n задает *частичную гладкую лупу* с бинарной операцией $\bar{F} : B^n \times \Omega_{B^n} \rightarrow B^n$ и единицей e . Эту *частичную лупу* обозначим (B^n, \circ, e) .

Сформулируем теперь аксиому феноменологической симметрии [1; 3; 4].

А4. Для некоторой достаточно гладкой функции $g : \Omega_{B^n} \times \Omega_{B^n} \times B \rightarrow B$ и любых точек $\langle i_1, i_2, \dots, i_{n+1} \rangle \in B \times \Omega_{B^n}$ и $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \in N \times \Omega_N$ таких, что $\langle f(i_1\alpha_1), f(i_2\alpha_1), \dots, f(i_{n+1}\alpha_1), f(i_2\alpha_2), \dots, f(i_{n+1}\alpha_2), f(i_1\alpha_2)) \rangle \in B \times \Omega_{B^n} \times \Omega_{B^n} \times B$, существует связь:

$$f(i_1\alpha_1) = g(f(i_2\alpha_1), \dots, f(i_{n+1}\alpha_1), f(i_2\alpha_2), \dots, f(i_{n+1}\alpha_2), f(i_1\alpha_2)).$$

Определение 1. Будем говорить, что метрическое отображение $f : B \times N \rightarrow B$ на многообразиях N, B задает *физическую структуру ранга* $(n + 1, 2)$, если выполняются аксиомы А1–А4.

Для отображения $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \rightarrow B$ также выполняется аксиома феноменологической симметрии:

БЗ. $\forall \langle i_1, \dots, i_{n+1} \rangle \in B \times \Omega_{B^n}$ и $\forall \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \in N \times \Omega_N$ существует связь:

$$\bar{f}_{11} = g(\bar{f}_{21}, \dots, \bar{f}_{(n+1)1}, \bar{f}_{22}, \dots, \bar{f}_{(n+1)2}, \bar{f}_{12}), \quad (4)$$

где, например, $\bar{f}_{11} = f(i_1 \alpha_1)$.

Итак, $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \rightarrow B$ также задает физическую структуру ранга $(n+1, 2)$.

Теорема 2. В частичной лупе (B^n, \circ, e) выполняется тождество $(I \circ A) \circ B = I \circ (A \circ B)$, где $I \in B^n$, $A, B \in \Omega_{B^n}$.

Это тождество следует из аксиомы БЗ [1]. \square

Теорема 3. Лупа (Ω_{B^n}, \circ, e) с бинарной операцией $\circ : \Omega_{B^n} \times \Omega_{B^n} \rightarrow \Omega_{B^n}$ является группой Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ассоциативность вытекает из теоремы 2 в предположении, что $I \in \Omega_{B^n}$. Затем надо воспользоваться тем, что ассоциативная квазигруппа есть группа [2]. \square

§ 2. Феноменологически симметричные группы Ли преобразований

Дадим два определения [5].

Определение 2. Говорят, что множество достаточно гладких отображений $q : X \times G \rightarrow X$, где X — гладкое многообразие, а G — группа Ли, причем $\dim X = n$, $\dim G = r$, задает почти эффе́ктивно и почти просто транзитивно действующую группу Ли преобразований многообразия X , если выполняются свойства:

1°. Отображение $y = g(x, a)$, где $x, y \in X$, $a \in G$, обратимо относительно точки x .

2°. $g(x, e) = x$, для любого $x \in X$.

3°. $g(g(x, a), b) = g(x, \varphi(a, b))$, $\forall a, b \in G$, φ — групповая операция в G .

4°. Если $a \in G$ и $g(x, a) = x$, для любого $x \in \Omega_X \subset X$, то $a = e$, где Ω_X — открытое и плотное подмногообразие в X .

5°. $\forall x, y \in \Omega_X$, $\exists! a \in G$ такой, что $g(x, a) = y$.

Определение 3. Говорят, что множество достаточно гладких отображений $q : X \times G \rightarrow X$, где X — гладкое многообразие, а G — группа Ли, причем $\dim X = n$, $\dim G = r$, задает эффе́ктивно и транзитивно действующую группу Ли преобразований многообразия X , если выполняются свойства:

1°. Отображение $y = g(x, a)$, где $x, y \in X$, $a \in G$, обратимо относительно точки x .

2°. $g(x, e) = x$, для любого $x \in X$.

3°. $g(g(x, a), b) = g(x, \varphi(a, b))$, $\forall a, b \in G$, φ — групповая операция в G .

4°. Если $a \in G$ и $g(x, a) = x$, для любого $x \in X$, то $a = e$.

5°. $\forall x, y \in X$, $\exists a \in G$ такой, что $g(x, a) = y$.

Пусть \circ и $*$ две операции, определенные на гладкой квазигруппе Q . Операция $*$ называется изотопной операции \circ , если существует тройка диффеоморфизмов α, β, γ

многообразия Q таких, что

$$x * y = \gamma^{-1}(\alpha(x) \circ \beta(y)),$$

для любых $x, y \in Q$. Упорядоченная тройка $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ называется *изотопией*.

Теорема 4. *Справедливы утверждения:*

1. Частичная лупа (B^n, \circ, e) является группой Ли преобразований с почти эффективным и почти просто транзитивным действием на многообразии B^n группы Ли (Ω_{B^n}, \circ, e) .

2. Изотопия $T = (1, \theta, 1)$, где $\theta : \Omega_{B^n} \rightarrow \Omega_{B^n}$ — диффеоморфизм, причем $\theta(e) = e$, 1 — тождественный диффеоморфизм в B^n , частичную лупу (B^n, \circ, e) переводит в частичную лупу $(B^n, *, e)$ с бинарной операцией

$$I * a = I \circ \theta(a), \quad (5)$$

$\forall a \in \Omega_{B^n}, \forall I \in B^n$, которая также является группой Ли преобразований с почти эффективным и почти просто транзитивным действием на B^n группы Ли (Ω_{B^n}, \cdot, e) с бинарной операцией

$$a \cdot b = \theta^{-1}(\theta(a) \circ \theta(b)), \quad (6)$$

$\forall a, b \in \Omega_{B^n}$.

3. Группа Ли преобразований (B^n, \circ, e) индуцирует эффективную и транзитивную группу Ли преобразований многообразия B с параметрической группой (Ω_{B^n}, \circ, e) . Действие задается метрическим отображением \bar{f} физической структуры ранга $(n + 1, 2)$.

4. Группа Ли преобразований $(B^n, *, e)$ индуцирует эффективную и транзитивную группу преобразований многообразия B с параметрической группой (Ω_{B^n}, \cdot, e) .

Докажем сначала первую часть теоремы. Действительно, свойства 1° и 2° вытекают из определения частичной лупы (B^n, \circ, e) . Свойство 3° следует из тождества $(I \circ a) \circ b = I \circ (a \circ b)$, где $a, b \in \Omega_{B^n}, I \in B^n$. Пусть выполняется равенство $I \circ a = I, \forall I \in \Omega_{B^n}$, тогда из аксиомы Б1 следует единственность решения $a = e$, т.е. выполняется свойство 4°. Свойство 5° вытекает также из аксиомы Б1.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Изотопом частичной лупы (B^n, \circ, e) при изотопии T , очевидно, является частичная лупа $(B^n, *, e)$. Проверим выполнимость свойств группы Ли преобразований. Очевидно, выполняются свойства 1°, 2°, 4° и 5° для частичной лупы $(B^n, *, e)$. По определению бинарной операции (5) $(I * a) * b = (I \circ \theta(a)) \circ \theta(b) = I \circ (\theta(a) \circ \theta(b)) = I * \theta^{-1}(\theta(a) \circ \theta(b)) = I * (a \cdot b)$, где $a, b \in \Omega_{B^n}, I \in B^n$. Свойство 3° тогда следует из леммы.

Лемма 1. *Бинарная операция (6) в Ω_{B^n} является групповой, причем группы Ли (Ω_{B^n}, \circ, e) и (Ω_{B^n}, \cdot, e) изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как θ — диффеоморфизм, а \circ — групповая операция, то в (6) имеет место однозначная разрешимость относительно любого аргумента. Выполняется ассоциативность. Действительно, $\forall a, b, c \in \Omega_{B^n} (a \cdot b) \cdot c = \theta^{-1}(\theta(a) \circ \theta(b)) \cdot c = \theta^{-1}((\theta(a) \circ \theta(b)) \circ \theta(c)) = \theta^{-1}(\theta(a) \circ (\theta(b) \circ \theta(c))) = \theta^{-1}(\theta(a) \circ (\theta(b \cdot c))) = a \cdot (b \cdot c)$. Единицей является элемент e . Изоморфизм осуществляет диффеоморфизм $\theta : \Omega_{B^n} \rightarrow \Omega_{B^n}$, так как по (6) $\theta(a \cdot b) = \theta(a) \circ \theta(b)$.

Докажем третью часть теоремы. По определению, бинарная операция \circ задается формулой (3), причем каждая компонента отображения \bar{F} — метрическое отображение \bar{f} . Докажем, что $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \rightarrow B$ задает эффективное действие группы Ли Ω_{B^n} на многообразии B . Свойство 1° вытекает из Б2, свойства 2° и 3° следуют из покомпонентной записи этих свойств для частичной лупы (B^n, \circ, e) . Для установления 4° следует выбрать n точек из B , составляющих точку из Ω_{B^n} , а затем воспользоваться первой частью данной теоремы. Транзитивность вытекает из аксиомы Б1.

Четвертая часть теоремы доказывается, как и третья, только относительно частичной лупы $(B^n, *, e)$ с бинарной операцией (5). Теорема 4 полностью доказана. \square

Заметим, что действие группы Ли (Ω_{B^n}, \circ, e) на многообразии B задается метрическим отображением $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \rightarrow B$, а действие группы Ли (Ω_{B^n}, \cdot, e) — отображением $\check{f} = \bar{f}(x, \theta(a)) : B \times \Omega_{B^n} \rightarrow B$, $x \in B$, $a \in \Omega_{B^n}$. В частном случае $\theta(x) = x$ и $\theta(x) = x^{-1}$.

Определение 4. Группа Ли преобразований многообразия B с параметрической группой, изоморфной (Ω_{B^n}, \cdot, e) , называется *феноменологически симметричной*, если она на многообразиях B и Ω_{B^n} задает физическую структуру ранга $(n + 1, 2)$.

Найдем теперь $n + 1$ -точечные инварианты феноменологически симметричной группы Ли преобразований $(B^n, *, e)$. Эти инварианты задают функциональную связь (4). Пусть I^{-1} — правый обратный к элементу I в (Ω_{B^n}, \cdot, e) . Тогда можно построить новую квазигруппу (Ω_{B^n}, \bullet) с правой единицей и бинарной операцией

$$I \bullet J = I \cdot J^{-1}. \quad (7)$$

Теорема 5. В квазигруппе (Ω_{B^n}, \bullet) выполняются свойства:

I. Тожество:

$$(I \bullet A) \bullet (J \bullet A) = I \bullet J \quad (8)$$

для любых $I, J, A \in \Omega_{B^n}$;

II. Правый обратный элемент в (Ω_{B^n}, \bullet) совпадает с ним самим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала тождество I. По формуле (5) $I * K = I \circ \theta(K) = e$, значит $K = I^{-1} = \theta^{-1}(I_{\circ}^{-1})$, где I_{\circ}^{-1} — обратные к I в группе Ли (Ω_{B^n}, \circ, e) . Перепишем сначала правую часть выражения (8) через групповую операцию. По формуле (5) $I \cdot J^{-1} = I \circ \theta(J^{-1}) = I \circ \theta(\theta^{-1}(J_{\circ}^{-1})) = I \circ J_{\circ}^{-1}$. Преобразуем теперь левую часть выражения (8). $(I \cdot A) \cdot (J \cdot A)^{-1} = (I \circ \theta(A)) \circ \theta(\theta^{-1}((J \circ \theta(A))_{\circ}^{-1})) = I \circ J_{\circ}^{-1}$. Тогда левая и правая части выражения (8) совпадают, т. е. оно является тождеством. Докажем теперь свойство II. Действительно, $I \bullet J = e$, следовательно $(I^{-1})_{\bullet} = J$. С другой стороны, $I \bullet J = I \cdot J^{-1} = e$, поэтому $I \cdot ((I^{-1})_{\bullet})^{-1} = e$, значит, $I^{-1} = ((I^{-1})_{\bullet})^{-1}$, следовательно, $i = (I^{-1})_{\bullet}$, т. е. свойство доказано. \square

Тожество (8) можно записать еще так:

$$(I \bullet A) \bullet (J \bullet A) = (I \bullet B) \bullet (J \bullet B). \quad (8')$$

Из доказательства теоремы 5 следует, что формула (8') задает инвариант группы Ли преобразований $(B^n, *, e)$. Учитывая связь этой группы преобразований с физической структурой ранга $(n + 1, 2)$, заключаем, что формула (8') задает функциональную связь

(4). Любая компонента формулы (8') задает явный вид инварианта группы преобразований.

Квазигруппа с тождеством (8) называется *квазигруппой Уорда* [6].

§ 3. Однометрические физические структуры

Рассмотрим физическую структуру, для которой $\dim B = 1$. Метрическое отображение этой структуры на B задает действие группы Ли. Классификация локальных действий таких групп Ли, т. е. локальных групп Ли преобразований прямой R , построена Г. Г. Михайличенко.

Теорема 6 (Г. Г. Михайличенко [3; 4; 7]). *Однометрические физические структуры ранга $(n+1, 2)$ существуют только при $n = 1, 2, 3$. В локальных координатах, с точностью до локального диффеоморфизма $f \rightarrow \psi(f)$, метрическое отображение f определяется выражениями:*

при $n = 1$, т. е. ранга $(2, 2)$:

$$f = x\xi; \quad (9.1)$$

при $n = 2$, т. е. ранга $(3, 2)$:

$$f = x\xi + \eta; \quad (9.2)$$

при $n = 3$, т. е. ранга $(4, 2)$:

$$f = \frac{x\xi + \eta}{x + \rho}. \quad (9.3)$$

Найдем $n + 1$ -точечные инварианты и функциональные связи для групп преобразований (9.1)–(9.3). Эта задача решается двумя методами. Первый метод основан на результатах § 2, а второй — на групповом методе поиска инвариантов и на теореме, доказанной Г. А. Толстихоной и А. М. Шелеховым в работе [9].

Теорема 7. *Функциональная связь s -метрической физической структуры ранга $(n + 1, 2)$ может быть записана в виде*

$$L_k(f(i_1\alpha), \dots, f(i_{n+1}\alpha)) = L_k(f(i_1\beta), \dots, f(i_{n+1}\beta)), \quad (10)$$

где $L_k(x_1, \dots, x_{n+1})$ — $n + 1$ -точечный инвариант группы преобразований, $k = 1, \dots, s$, $n \leq s + 2$.

Теорема 8. *Метрическая функция f , построенная по бинарной операции (7), и $(n + 1)$ -точечный инвариант L для однометрической физической структуры ранга $(n + 1, 2)$ записываются так:*

для ранга $(2, 2)$:

$$f = \frac{x}{\xi}, \quad (11.1)$$

$$L(x, y) = \frac{x}{y}; \quad (12.1)$$

для ранга $(3, 2)$:

$$f = \frac{x - \eta}{\xi - \eta}, \quad (11.2)$$

$$L(x, y, z) = \frac{x - z}{y - z}; \quad (12.2)$$

для ранга (4, 2):

$$f = \frac{(x - \eta)(\xi - \rho)}{(x - \rho)(\xi - \eta)}, \quad (11.3)$$

$$L(x, y, z, w) = \frac{(x - z)(y - w)}{(x - w)(y - z)}. \quad (12.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы сначала проведем первым методом, а затем вторым, основанным на работе [9]. Для функции (9.1) групповая операция (7) записывается так: $x \bullet y = \frac{x}{y}$. Значит, по ней построенная метрическая функция и двухточечный инвариант L задаются формулами (11.1), (12.1). Для доказательства формул (11.2) и (12.2) рассмотрим бинарную операцию в квазигруппе $(K, *, e)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\xi + \eta \\ y\xi + \eta \end{pmatrix}$, значит, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-\eta}{\xi-\eta} \\ \frac{y-\eta}{\xi-\eta} \end{pmatrix}$. Каждая из компонент последнего произведения дает метрическую функцию (11.2) и трехточечный инвариант (12.2). Докажем теперь формулы (11.3) и (12.3). Для этого рассмотрим бинарную операцию в $(K, *, e)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x\xi+\eta}{x+\rho} \\ \frac{y\xi+\eta}{y+\rho} \\ \frac{z\xi+\eta}{z+\rho} \end{pmatrix}$, поэтому $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(x-\eta)(\xi-\rho)}{(x-\rho)(\xi-\eta)} \\ \frac{(y-\eta)(\xi-\rho)}{(y-\rho)(\xi-\eta)} \\ \frac{(z-\eta)(\xi-\rho)}{(z-\rho)(\xi-\eta)} \end{pmatrix}$. Каждая из компонент этого произведения дает метрическую функцию (11.3) и четырехточечный инвариант (12.3).

Для доказательства теоремы вторым методом запишем операторы групп Ли преобразований (9.1)–(9.3):

$$\text{для (9.1): } X = x\partial_x;$$

$$\text{для (9.2): } X_1 = \partial_x, X_2 = x\partial_x;$$

$$\text{для (9.3): } X_1 = \partial_x, X_2 = x\partial_x, X_3 = x^2\partial_x.$$

Вычисляя в первом случае двухточечный инвариант, во втором — трехточечный инвариант, а в третьем — четырехточечный, получаем (12.1), (12.2) и (12.3). \square

Для записи явного выражения функциональной связи (1) необходимо воспользоваться формулой (8') или (10).

§ 4. Двуметрические физические структуры

Рассмотрим двуметрическую физическую структуру, т. е. $\dim B = 2$. Метрическое отображение этой структуры на B , как доказано выше, задает действие группы Ли. Классификация локальных действий таких групп построена Г. Г. Михайличенко.

Теорема 9. Двуметрические физические структуры ранга $(n + 1, 2)$ существуют только для $n = 1, 2, 3, 4$. С точностью до локального диффеоморфизма $\psi(f) \rightarrow f$ функция $f = (f^1, f^2)$, задающая на 2-мерном и $2n$ -мерном многообразиях B и N двуметрическую физическую структуру ранга $(n + 1, 2)$, в надлежаще выбранных в них системах локальных координат, определяется следующими выражениями:

для $n = 1$, т. е. ранга (2, 2):

$$\begin{aligned} f^1 &= x + \xi, & f^2 &= y + \eta, \\ f^1 &= (x + \xi)y, & f^2 &= (x + \xi)\eta; \end{aligned}$$

для $n = 2$, т. е. ранга (3, 2):

$$\begin{aligned} f^1 &= x\xi + \varepsilon y\eta + \mu, & f^2 &= x\eta + y\xi + \nu, & \varepsilon &= -1, 0, 1, \\ f^1 &= x\xi + \mu, & f^2 &= x\eta + y\xi^c + \nu, & c &\neq 1, \\ f^1 &= x\xi + \mu, & f^2 &= x\eta + y\xi^2 + x^2\xi^2 \ln \xi + \nu, \\ f^1 &= x\xi + y\mu, & f^2 &= x\eta + y\nu; \end{aligned}$$

для $n = 3$, т. е. ранга (4, 2):

$$f = \frac{x\xi + \eta}{x + \rho},$$

где $f = f^1 + \varepsilon f^2$, $x = x_1 + \varepsilon x_2$, $\xi = \xi_1 + \varepsilon \xi_2$, $\eta = \eta_1 + \varepsilon \eta_2$, $\rho = \rho_1 + \varepsilon \rho_2$, $\varepsilon^2 = -1, 0, 1$,

$$\begin{aligned} f^1 &= \frac{x\xi + \mu}{x + \rho}, & f^2 &= \frac{x\eta + y\nu + \tau}{x + \rho}, \\ f^1 &= x\xi + y\mu + \rho, & f^2 &= x\eta + y\nu + \tau; \end{aligned}$$

для $n = 4$, т. е. ранга (5, 2):

$$f^1 = \frac{x\xi + y\mu + \rho}{x\varphi + y + \omega}, \quad f^1 = \frac{x\eta + y\nu + \tau}{x\varphi + y + \omega}.$$

Найдем теперь $n + 1$ -точечные инварианты групп Ли преобразований.

Теорема 10. Метрическая функция f , построенная по квазигрупповой операции (7) и $n + 1$ -точечный инвариант L для двуметрической физической структуры ранга $(n + 1, 2)$ записываются так:

для $n = 1$, т. е. ранга (2, 2):

$$\begin{aligned} f^1 &= x - \xi, & f^2 &= y - \eta, & L_1(x, y) &= x_1 - y_1, & L_2(x, y) &= x_2 - y_2; \\ f^1 &= (x - \xi)\eta, & f^2 &= \frac{y}{\eta}, & L_1(x, y) &= (x_1 - y_1)y_2, & L_2(x, y) &= \frac{x_2}{y_2}; \end{aligned}$$

для $n = 2$, т. е. ранга (3, 2):

$$f^1 = \frac{\begin{vmatrix} x & \xi - \mu \\ \mu & \xi - \mu \end{vmatrix} - \varepsilon \begin{vmatrix} y & \eta - \nu \\ \nu & \eta - \nu \end{vmatrix}}{(\xi - \mu)^2 - \varepsilon(\eta - \nu)^2}, \quad f^2 = -\frac{\begin{vmatrix} x - \xi & y - \eta \\ \mu - \xi & \nu - \eta \end{vmatrix}}{(\xi - \mu)^2 - \varepsilon(\eta - \nu)^2},$$

$$L_1(x, y, z) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 - z_1 \\ z_1 & y_1 - z_1 \end{vmatrix} - \varepsilon \begin{vmatrix} x_2 & y_2 - z_2 \\ z_2 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}}{(y_1 - z_1)^2 - \varepsilon(y_2 - z_2)^2}, \quad L_2(x, y, z) = -\frac{\begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}}{(y_1 - z_1)^2 - \varepsilon(y_2 - z_2)^2},$$

где $\varepsilon = -1, 0, 1$;

$$f^1 = \frac{x - \mu}{\xi - \mu}, \quad f^2 = -\frac{\begin{vmatrix} x - \mu & y - \nu \\ \xi - \mu & \eta - \nu \end{vmatrix}}{(\xi - \mu)^{c+1}},$$

$$L_1(x, y, z) = \frac{x_1 - z_1}{y_1 - z_1}, \quad L_2(x, y, z) = - \left| \begin{array}{cc} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{array} \right| / (y_1 - z_1)^{c+1},$$

где $c \neq 1$;

$$f^1 = \frac{x - \mu}{\xi - \mu}, \quad f^2 = - \frac{\left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ \xi & \eta & 1 \\ \mu & \nu & 1 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} x & x^2 & 1 \\ \xi & \xi^2 & 1 \\ \mu & \mu^2 & 1 \end{array} \right| \ln(\xi - \mu)}{(\xi - \mu)^3},$$

$$L_1(x, y, z) = \frac{x_1 - z_1}{y_1 - z_1}, \quad L_2(x, y, z) = -(y_1 - z_1)^{-3} \left\{ \left| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} x_1 & x_1^2 & 1 \\ y_1 & y_1^2 & 1 \\ z_1 & z_1^2 & 1 \end{array} \right| \ln(y_1 - z_1) \right\};$$

$$f^1 = \frac{x\nu - y\mu}{\xi\nu - \eta\mu}, \quad f^2 = \frac{x\eta - y\xi}{\xi\nu - \eta\mu},$$

$$L_1(x, y, z) = \frac{x_1z_2 - x_2z_1}{y_1z_2 - y_2z_1}, \quad L_2(x, y, z) = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{y_1z_2 - y_2z_1};$$

для $n = 3$, т. е. ранга (4, 2):

$$f = \frac{(x - \eta)(\xi - \rho)}{(x - \rho)(\xi - \eta)}, \quad L(x, y, z, w) = \frac{(x - z)(y - w)}{(x - w)(y - z)},$$

где $L = L_1 + \varepsilon L_2$, $f = f^1 + \varepsilon f^2$, $x = x_1 + \varepsilon x_2$, $y = y_1 + \varepsilon y_2$, $z = z_1 + \varepsilon z_2$, $w = w_1 + \varepsilon w_2$,
 $\xi = \xi_1 + \varepsilon \xi_2$, $\eta = \eta_1 + \varepsilon \eta_2$, $\rho = \rho_1 + \varepsilon \rho_2$, $\varepsilon^2 = -1, 0, 1$;

$$f^1 = \frac{(x - \mu)(\xi - \rho)}{(x - \rho)(\xi - \mu)}, \quad f^2 = \frac{(\rho - \mu)(\xi - \rho)}{(x - \rho)(\xi - \mu)} \cdot \frac{\left| \begin{array}{cc} x - \mu & y - \nu \\ \xi - \mu & \eta - \nu \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \xi - \rho & \eta - \tau \\ \mu - \rho & \nu - \tau \end{array} \right|},$$

$$L_1(x, y, z, w) = \frac{(x_1 - z_1)(y_1 - w_1)}{(x_1 - w_1)(y_1 - z_1)}, \quad L_2(x, y, z, w) = \frac{(w_1 - z_1)(y_1 - w_1)}{(x_1 - w_1)(y_1 - z_1)} \cdot \frac{\left| \begin{array}{cc} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} y_1 - w_1 & y_2 - w_2 \\ z_1 - w_1 & z_2 - w_2 \end{array} \right|},$$

$$f^1 = \left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{ccc} \xi & \eta & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{array} \right|, \quad f^2 = \left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ \xi & \eta & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{ccc} \mu & \nu & 1 \\ \xi & \eta & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{array} \right|,$$

$$L_1(x, y, z, w) = \left| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \end{array} \right|, \quad L_2(x, y, z, w) = \left| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \end{array} \right|;$$

для $n = 4$, т. е. ранга (5, 2):

$$f^1 = \frac{\left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} \xi & \eta & 1 \\ \rho & \tau & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{ccc} \xi & \eta & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ \rho & \tau & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{array} \right|}, \quad f^2 = \frac{\left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ \xi & \eta & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{ccc} \xi & \eta & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ \rho & \tau & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{array} \right|},$$

$$L_1(x, y, z, w, u) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \end{vmatrix}}, \quad L_2(x, y, z, w, u) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \end{vmatrix}},$$

причем, например, $x = (x_1, x_2)$. □

Список литературы

1. *Симонов А. А.* Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур // Приложение к книге Ю. И. Кулакова «Теория физических структур». М., 2004.
2. *Белоусов В. Д.* Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.
3. *Михайличенко Г. Г.* Групповая симметрия физических структур. Барнаул – Горно-Алтайск, 2003.
4. *Михайличенко Г. Г.* Феноменологическая и групповая симметрия в геометрии двух множеств (теории физических структур) // Докл. АН СССР. 1985. Т. 24, № 1. С. 39–41.
5. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.
6. *Chatterjea S. K.* On Ward Quasigroups // Pure Math. Manuscript. 1987. No. 6. P. 31–34.
7. *Михайличенко Г. Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 5. С. 1056–1058.
8. *Михайличенко Г. Г.* Двуметрические физические структуры ранга $(n+1, 2)$ // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 3. С. 132–143.
9. *Толстихина Г. А., Шелехов А. М.* Три-ткани, определяемые группами преобразований // Докл. АН РФ. 2002. Т. 385, № 4. С. 462–464.

Материал поступил в редколлегию 08.06.2008

Адреса авторов

КЫРОВ Владимир Александрович
РОССИЯ, 649000, Горно-Алтайск
ул. Ленкина, 1, каф. физики и МПФ
e-mail: kfizika@gasu.ru

МУРАДОВ Роман Мохуббатович
РОССИЯ, 649000, Горно-Алтайск
ул. Ленкина, 1, каф. физики и МПФ
e-mail: kfizika@gasu.ru