Сибирский журнал
индустриальной математики
Октябрь–декабрь, 2010. Том XIII, № 4(44)

УДК 517.965:514.74

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

В. А. Кыров

Решаются функциональные уравнения на метрические функции всех феноменологически симметричных геометрий размерности $n+1$, содержащие метрику n-мерной псевдоеклидовой геометрии.

Ключевые слова: функциональное уравнение, феноменологически симметричная геометрия.

Введение

В пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, функция

$$\theta = \theta(ij) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \big(x_i^k - x_j^k\big)^2, \quad \varepsilon_k = \pm 1, \tag{1}$$

где $\big(x_i^1, \dots, x_i^n\big)$ — координаты точки i, задает псевдоевклидову геометрию. Эта геометрия допускает группу Ли движений, т. е. преобразований, сохраняющих функцию (1), которая имеет размерность, равную $n(n+1)/2$. Базис алгебры Ли группы движений псевдоевклидова пространства состоит из операторов

$$X_\chi = \partial_{x^\chi}, \quad X_{\nu\omega} = \varepsilon_\omega x^\omega \partial_{x^\nu} - \varepsilon_\nu x^\nu \partial_{x^\omega}, \quad \nu > \omega, \quad \nu, \omega, \chi = 1, \dots, n.$$

Точно так же в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, функция

$$\theta = \theta(ij) = \left[\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \big(x_i^k - x_j^k\big)^2\right] e^{2y_i + 2y_j}, \quad \varepsilon_k = \pm 1, \tag{2}$$

задает геометрию. (Для $n = 2$ эта геометрия впервые появляется в работе [1] при классификации трехмерных феноменологически симметричных геометрий.)

Предложение. *Группа движений геометрии, задаваемой метрической функцией* (2) *в пространстве* $\mathbb{R}^{n+1}$, *имеет размерность* $(n+1)(n+2)/2$, *ее алгебра Ли состоит из базисных операторов*

$$X_\chi = \partial_{x^\chi}, \quad X_0 = -x^1 \partial_{x^1} - \dots - x^n \partial_{x^n} + \frac{1}{2}\partial_y,$$

$$X_{n+\chi} = -x^1 x^\chi \partial_{x^1} - \dots - \big[(x^\chi)^2 - \varepsilon_\chi(\varepsilon_1 (x^1)^2 + \dots + \varepsilon_n (x^n)^2)\big]\partial_{x^\chi} - \dots - x^n x^\chi \partial_{x^n} + \frac{1}{2} x^\chi \partial_y,$$

$$X_{\nu\omega} = \varepsilon_\omega x^\omega \partial_{x^\nu} - \varepsilon_\nu x^\nu \partial_{x^\omega}, \quad \nu > \omega, \quad \nu, \omega, \chi = 1, \dots, n.$$

При $n=2$ это предложение доказано в работе [2].

Доказательство. Воспользуемся методом, разработанным в [2]. Локальный диффеоморфизм $U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, называется движением пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ с метрической функцией (2), если сохраняется метрическая функция. Множество всех движений образует группу. Произвольный оператор этой группы имеет вид

$$X = X_1\partial_{x^1} + \cdots + X_n\partial_{x^n} + X_0\partial_y,$$

где $X_\mu = X_\mu(x^1,\ldots,x^n,y)$ — достаточно гладкие функции, $\mu = 0,1,\ldots,n$. Как известно, метрическая функция (2) является двухточечным инвариантом группы движений и поэтому имеет место дифференциальное уравнение $X(i)f(ij) + X(j)f(ij) = 0$ [3]. Подставляя в это уравнение функцию (2) и оператор, получаем функционально-дифференциальное уравнение на функции X_μ:

$$\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(X_k(i)-X_k(j))\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr) + \left[\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)^2\right](X_0(i)+X_0(j)) = 0. \quad (3)$$

Продифференцируем сначала уравнение (3) по y_i:

$$\varepsilon_1X_{1y_i}\bigl(x_i^1-x_j^1\bigr)+\cdots+\varepsilon_nX_{ny_i}\bigl(x_i^n-x_j^n\bigr)+\bigl[\varepsilon_1\bigl(x_i^1-x_j^1\bigr)^2+\cdots+\varepsilon_n\bigl(x_i^n-x_j^n\bigr)^2\bigr]X_{0y_i} = 0.$$

Дифференцируя дважды это тождество по координатам точки j, получаем $X_{\mu y} = 0$.

Продифференцируем теперь функциональное уравнение (3) один раз по x_i^ν и дважды по x_j^ω, $\nu,\omega = 1,\ldots,n$. Получаем

$$-\varepsilon_\nu X_{\nu x^\omega x_j^\omega} + 2\varepsilon_\nu\bigl(x_i^\nu - x_j^\nu\bigr)X_{0x^\omega x_j^\omega} + 2\varepsilon_\omega X_{0x_i^\nu} - 4\varepsilon_{\nu\omega}\varepsilon_\nu X_{0x_j^\omega} = 0, \quad (4)$$

где

$$\varepsilon_{\nu\omega} = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu=\omega, \\ 0 & \text{при } \nu\neq\omega, \end{cases} \qquad \nu,\omega = 1,\ldots,n.$$

Фиксируя координаты точки j, имеем $X_{0x^\nu} = c_\nu x^\nu + a^\nu$, где $c_\nu, a^\nu = \mathrm{const}$. Подставляя найденное в (4) и дифференцируя по x_i^ν, получим $\varepsilon_\omega c_\nu + \varepsilon_\nu c_\omega = 0$. Полагая $\nu=\omega$, имеем $c_\nu = 0$. Таким образом, $X_{0x^\nu} = a^\nu$. Продифференцируем теперь (3) по x_i^ν, а результат по x_j^ω. С учетом полученного будем иметь

$$\begin{aligned} &-\varepsilon_\nu X_{\nu x_j^\omega} - \varepsilon_\omega X_{\omega x_i^\nu} - 2\varepsilon_\omega\bigl(x_i^\omega - x_j^\omega\bigr)a^\nu \\ &\qquad + 2\varepsilon_\nu\bigl(x_i^\nu - x_j^\nu\bigr)a^\omega - 2\varepsilon_{\nu\omega}\varepsilon_\nu\bigl(X_0(i)+X_0(j)\bigr) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Разделяя переменные в тождестве (5), получаем

$$X_{\nu x^\omega} = 2\varepsilon_\nu\varepsilon_\omega a^\nu x^\omega - 2a^\omega x^\nu - 2\varepsilon_{\nu\omega}\varepsilon_\nu\varepsilon_\omega X_0 + b_\omega^\nu,$$

где $b_\omega^\nu = \mathrm{const}$. Интегрируя найденные уравнения и подставляя результат в (5), после разделения переменных получаем систему функций

$$\begin{aligned} X_\nu = \varepsilon_\nu a^\nu\bigl(\varepsilon_1(x^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x^n)^2\bigr) \\ - 2x^\nu(a^1x^1 + \cdots + a^nx^n) + b_1^\nu x^1 + \cdots + b_n^\nu x^n + c^\nu, \end{aligned}$$

$$X_0 = a^1x^1 + \cdots + a^nx^n + b, \quad b_\nu^\nu = -2b, \quad \varepsilon_\nu b_\omega^\nu + \varepsilon_\omega b_\nu^\omega = 0, \quad \nu\neq\omega.$$

Легко видеть, что в данной системе функций число произвольных постоянных a^ν, c^ν, b, b_ω^ν равно $(n+1)(n+2)/2$. Придавая этим константам значения 0 и 1, получаем утверждение предложения. □

§ 1. Постановка основной задачи

На гладком многообразии M, $\dim M = m$, гладкая метрическая функция $f\colon S_f \to \mathbb{R}$, где $S_f \subset M \times M$ — открытая область определения, задает феноменологически симметричную геометрию, если выполняются следующие аксиомы [4].

Аксиома невырожденности. Для любых $m+1$ точек $i, i_1, \dots, i_m \in M$ таких, что $\langle ii_1\rangle, \dots, \langle ii_m\rangle \in S_f$, $\langle i_1 i\rangle, \dots, \langle i_m i\rangle \in S_f$, выполняется

$$\frac{\partial(f(ii_1), \dots, f(ii_m))}{\partial(x_i^1, \dots, x_i^m)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f(i_1 i), \dots, f(i_m i))}{\partial(x_i^1, \dots, x_i^m)} \neq 0,$$

где $\left(x_i^1, \dots, x_i^m\right)$ — координаты точки $i \in M$.

Аксиома групповой симметрии. Существует группа Ли движений размерности $m(m+1)/2$, т. е. преобразований $\lambda\colon M \to M$, для которых имеет место равенство $f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(ij)$, причем $\langle ij\rangle \in S_f$ и $\langle \lambda(i)\lambda(j)\rangle \in S_f$.

Обоснованность этой аксиомы следует из доказательства теоремы об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий [5].

Алгебра Ли группы движений состоит из операторов вида

$$X = X_1 \partial_{x^1} + \dots + X_m \partial_{x^m}, \tag{6}$$

где $X_s = X_s(x^1, \dots, x^m)$ — достаточно гладкие функции, $s = 1, \dots, m$. Через операторы записывается критерий локальной инвариантности метрической функции [3, с. 35]:

$$X(i)f(ij) + X(j)f(ij) = 0. \tag{7}$$

Геометрии с метрическими функциями (1) и (2) являются феноменологически симметричными. Действительно, аксиома невырожденности проверяется непосредственно. Существование группы движений необходимой размерности обсуждается во введении, где записываются базисные операторы.

Цель данной работы — построение феноменологически симметричных геометрий размерностей $n+1$ и $n+2$ с метрическими функциями вида

$$f(ij) = f(\theta, z_i, z_j), \tag{8}$$

где θ — функция (1) или (2).

Теорема. *В подходящих координатах и масштабном преобразовании метрическая функция $f(ij)$ феноменологически симметричной геометрии*:

I) *равна*

$$f(ij) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(x_i^k - x_j^k\right)^2 + \alpha(z_i - z_j)^2, \quad \varepsilon_k, \alpha = \pm 1, \tag{9}$$

$$f(ij) = \left[\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(x_i^k - x_j^k\right)^2\right] e^{2z_i + 2z_j}, \quad \varepsilon_k = \pm 1, \tag{10}$$

для θ, равной (1);

II) *для θ, равной* (2), *феноменологически симметричного решения нет.*

Под масштабным преобразованием понимается функция от метрической функции. Подробное доказательство приводится для утверждения I теоремы, а для второй части с сокращениями.

§ 2. Доказательство утверждения I теоремы

Решение (8) ищется в виде

$$f(ij) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(x_i^k - x_j^k\right)^2, z_i, z_j\right) = f(\theta, z_i, z_j). \tag{11}$$

Искомая метрическая функция является двухточечным инвариантом $(n+1)(n+2)/2$-мерной группы движений (аксиома о групповой симметрии), поэтому существуют линейно независимые операторы X и Y с разложением (6), для которого выполняется критерий инвариантности (7):

$$2\left[\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(x_i^k - x_j^k\right)(X_k(i) - X_k(j))\right] \frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + X_{n+1}(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + X_{n+1}(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0, \tag{12}$$

$$2\left[\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(x_i^k - x_j^k\right)(Y_k(i) - Y_k(j))\right] \frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + Y_{n+1}(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + Y_{n+1}(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0. \tag{13}$$

Уравнения (12) и (13) являются функциональными относительно неизвестных компонент операторов X и Y, а также метрической функции $f(ij)$ и выполняются тождественно по координатам точек.

Предположим, что $X_{n+1} = 0$. По аксиоме невырожденности $\dfrac{\partial f(ij)}{\partial \theta} \neq 0$, поэтому имеет место функциональное уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(x_i^k - x_j^k\right)(X_k(i) - X_k(j)) = 0. \tag{14}$$

Лемма 1. *Решением функционального уравнения* (14) *является следующая система функций*: $X_k = \sum\limits_{l=1}^{n} \varepsilon_l c_{kl} x^k + p_k$, *где* $c_{kl} = -c_{lk} = \mathrm{const}$, $p_k = \mathrm{const}$, $k, l = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Продифференцируем тождество (14) дважды по x_i^k и x_j^l, а также по z_i и x_j^k, $k, l = 1, \ldots, n$. Разделяя переменные, будем иметь систему уравнений

$$(X_k)'_{x^l} = \varepsilon_l c_{kl}, \quad (X_k)'_z = 0, \quad c_{kl} = -c_{lk} = \mathrm{const}, \quad k, l = 1, \ldots, n.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем искомое утверждение. □

Из доказанной леммы следует, что оператор X линейно зависит от базисных операторов алгебры Ли группы движений геометрии с метрической функцией (1), что недопустимо. Таким образом, в (12) $X_{n+1} \neq 0$, аналогично $Y_{n+1} \neq 0$ в (13).

Пусть имеет место (14) и $X_{n+1} \neq 0$. Тогда уравнение (12) принимает вид

$$X_{n+1}(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + X_{n+1}(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0. \tag{15}$$

Так как производные, входящие в это уравнение, не равны нулю (аксиома невырожденности), то его можно переписать в виде $\dfrac{X_{n+1}(i)}{X_{n+1}(j)} = \varphi(\theta, z_i, z_j)$. Дифференцируя это тождество по координатам x_i^k, x_j^k и складывая результаты, а после разделения переменных и интегрирования подставляя найденное в исходное тождество, получаем $X_{n+1} = a(z)$.

Подставляя результат в (15), переобозначая $\int \dfrac{dz}{a(z)} \to z$, а затем интегрируя, получаем

$$f(ij) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \big(x_i^k - x_j^k\big)^2, z_i - z_j\right) = f(\theta, w), \quad w = z_i - z_j. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (13), получаем функциональное уравнение

$$2\left[\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \big(x_i^k - x_j^k\big)(Y_k(i) - Y_k(j))\right] \frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + (Y_{n+1}(i) - Y_{n+1}(j)) \frac{\partial f(ij)}{\partial w} = 0. \tag{17}$$

Если в (17) $Y_{n+1} = \mathrm{const}$, то по аксиоме невырожденности имеет место функциональное уравнение $\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k \big(x_i^k - x_j^k\big)(Y_k(i) - Y_k(j)) = 0$, решение которого найдено в лемме 1. Поэтому группа движений геометрии с метрической функцией (16) имеет размерность $n(n+1)/2+1$, которая меньше необходимой $(n+1)(n+2)/2$. Значит, геометрия не является феноменологически симметричной.

В уравнении (17) $Y_{n+1} \neq \mathrm{const}$. Необходимо решить функциональное уравнение

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k \big(x_i^k - x_j^k\big)(Y_k(i) - Y_k(j))}{Y_{n+1}(i) - Y_{n+1}(j)} = \psi(\theta, w) \neq 0. \tag{18}$$

Осуществляя в (18) перестановку $i \leftrightarrow j$, получаем $\psi(\theta, -w) = -\psi(\theta, w)$.

Лемма 2. *Если в функциональном уравнении* (18) $Y_{n+1} = Y_{n+1}(z)$, *то* $\psi = \alpha\theta/w$, *где* $\alpha = \mathrm{const} \neq 0$.

Доказательство. Из условия леммы следует, что (18) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \big(x_i^k - x_j^k\big)(Y_k(i) - Y_k(j)) = \psi(\theta, w)(Y_{n+1}(z_i) - Y_{n+1}(z_j)). \tag{19}$$

Дифференцируя это тождество по x_i^l, x_j^l, затем складывая, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \big(x_i^k - x_j^k\big)\big((Y_k)'_{x_i^l} - (Y_k)'_{x_j^l}\big) = 0.$$

Продифференцируем эти тождества дважды по всем парам переменных, взятых для различных точек. После разделения переменных получим систему уравнений, интегрируя которую и подставляя в (19), имеем

$$Y_k = \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l a_{kl} x^l + c_k, \quad a_{kl} = -a_{lk}, \quad a_{kl}, c_k = \mathrm{const}\,.$$

Подставляя найденное в (19), приходим к утверждению леммы. $\square$

Подставляя результат в (17), получим дифференциальное уравнение

$$2\alpha\theta\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta}+w\frac{\partial f(ij)}{\partial w}=0.$$

Интегрирование этого уравнения дает невырожденную метрическую функцию, группа движений которой имеет размерность меньше $(n+1)(n+2)/2$, т. е. согласно аксиоме о групповой симметрии эта функция не задает феноменологически симметричную геометрию.

Лемма 3. *Если в* (18) $[Y_{n+1}(i)-Y_{n+1}(j)]|_{w=0}\neq 0$, *то* $\psi(\theta,0)=0$ *и поэтому* $\psi=\alpha w$, *где* $\alpha=\mathrm{const}\neq 0$.

Доказательство. Равенство $\psi(\theta,0)=0$ следует из свойства $\psi(\theta,-w)=-\psi(\theta,w)$. В (15) сделаем подстановку $z_i=z_j=z$, при этом $w=0$. Значит, имеет место тождество

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)(Y_k(i)-Y_k(j))\right]_{w=0}=0.$$

Дифференцируя это тождество дважды по x_i^k,, x_j^l, получаем систему дифференциальных уравнений, интегрируя которую, имеем

$$Y_k=\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l c_{kl}(z)x^k+p_k(z),\quad c_{kl}=-c_{lk},\quad k,l=1,\dots,n.$$

Найденное подставим в (18):

$$\sum_{k>l=1}^{n}\varepsilon_k\varepsilon_l\bigl(x_i^kx_j^l-x_j^kx_i^l\bigr)(c_{kl}(z_j)-c_{kl}(z_i))\\
+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)(p_k(z_i)-p_k(z_j))=\psi(\theta,w)(Y_{n+1}(i)-Y_{n+1}(j)).\quad(20)$$

В тождестве (20) разность $x_i^kx_j^l-x_j^kx_i^l$, $k>l=1,\dots,n$, очевидно, входит только в левую часть и только в первое слагаемое числителя, поэтому $c_{kl}(z)=c_{kl}=\mathrm{const}$. Дифференцируя (20) по x_i^k, x_j^k и складывая после разделения переменных, получаем систему уравнений, интегрируя которую, имеем

$$Y_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_kx^k+d(z),\quad a_k=\mathrm{const}\,.$$

Теперь найденное подставим в (20):

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)(p_k(z_i)-p_k(z_j))}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)+d(z_i)-d(z_j)}=\psi(\theta,w).$$

Очевидно, в этом тождестве $\psi'_\theta=0$. Приводя его к общему знаменателю и разделяя, будем иметь $p_k(z_i)-p_k(z_j)=\varepsilon_ka_k\psi(w)$, $0=\psi(w)(d(z_i)-d(z_j))$.

Из этой системы следует утверждение леммы. $\square$

Подставляя найденное в (17), получим дифференциальное уравнение

$$2\alpha w\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta}+\frac{\partial f(ij)}{\partial w}=0.$$

Интегрируя его и переобозначая переменные, получаем метрическую функцию (9).

Пусть теперь в уравнениях (12) и (13)

$$\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)(X_k(i)-X_k(j))\neq 0,\quad \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)(Y_k(i)-Y_k(j))\neq 0.$$

Введем обозначения

$$[X]=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)(X_k(i)-X_k(j)),\quad [Y]=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)(Y_k(i)-Y_k(j)).$$

Лемма 4. *Если в уравнении* (12)

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)(X_k(i)-X_k(j))\right]_{w=0}=0,$$

то метрическая функция $f(ij)$ *принимает вид* (16).

Доказательство. Пусть выполняется условие леммы, тогда по лемме 1 имеем

$$X_k=\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l c_{kl}(z)x^k+p_k(z),\quad c_{kl}=-c_{lk},\quad k,l=1,\dots,n.$$

Подставляя найденное в (12), имеем $2[X]\varphi_1+X_{n+1}(i)\varphi_2+X_{n+1}(j)\varphi_3=0$, где

$$[X]=\sum_{k>l=1}^{n}\varepsilon_k\varepsilon_l\bigl(x_i^kx_j^l-x_j^kx_i^l\bigr)(c_{kl}(z_j)-c_{kl}(z_i))+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)(p_k(z_i)-p_k(z_j)),$$

$$\varphi_1=\varphi_1(\theta,z_i,z_j)=\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta},\ \varphi_2=\varphi_2(\theta,z_i,z_j)=\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i},\ \varphi_3=\varphi_3(\theta,z_i,z_j)=\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j}.$$

Дифференцируя последнее уравнение по x_i^k, x_j^k и складывая, получаем

$$2\left[\varepsilon_k\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l\bigl(x_i^l-x_j^l\bigr)(c_{kl}(z_j)-c_{kl}(z_i))\right]\varphi_1+X'_{3x_i}\varphi_2+X'_{3x_j}\varphi_3=0.$$

С полученной новой системой уравнений проделаем описанную процедуру дифференцирования и сложения: $X''_{(n+1)x^kx_i^l}\varphi_2+X''_{(n+1)x^kx_j^l}\varphi_3=0$. Решая эту систему, получаем

$$c_{kl}=\mathrm{const},\quad p_k=\mathrm{const},\quad X_{n+1}=X_{n+1}(z).$$

Подставляя найденное в уравнение (12) и затем интегрируя, получаем метрическую функцию (16). □

Итак, имеем следующие неравенства:

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)(X_k(i)-X_k(j))\right]_{w=0}\neq 0,$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)(Y_k(i)-Y_k(j))\right]_{w=0}\neq 0.$$

Уравнение (12) тогда переписывается в виде

$$2[X] + X_{n+1}(i)\psi_1(ij) + X_{n+1}(j)\psi_2(ij) = 0, \tag{21}$$

где

$$\psi_1(ij) = \frac{\partial f(ij)/\partial z_i}{\partial f(ij)/\partial \theta}, \quad \psi_2(ij) = \frac{\partial f(ij)/\partial z_j}{\partial f(ij)/\partial \theta}.$$

Предположим, что в (21) $X_{n+1} = a(z)$, тогда это уравнение имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \bigl(x_i^k - x_j^k\bigr)(X_k(i) - X_k(j)) = \mu(\theta, z_i, z_j) \neq 0. \tag{22}$$

Заметим, что левая часть тождества (22) полностью совпадает с левой частью тождества (20), поэтому можно использовать результаты предыдущих вычислений. В таком случае

$$X_k = qx^k + \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l p_{kl} x^l + c_k, \quad p_{kl} = -p_{lk} = \mathrm{const}, \quad c_k = \mathrm{const}, \quad q = \mathrm{const}\,.$$

Подставим найденное в (13) и, переобозначая $\int \frac{dz}{a(z)} \to z$, после интегрирования будем иметь

$$f(ij) = f(\theta e^{2z_i}, \theta e^{2z_j}) = f(u, v), \quad u = \theta e^{2z_i}, \quad v = \theta e^{2z_j}. \tag{23}$$

Подставляя эту функцию в (13), получаем уравнение

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \bigl(x_i^k - x_j^k\bigr)(Y_k(i) - Y_k(j)) + \theta Y_{n+1}(i)\right] e^{2z_i} \frac{\partial f(ij)}{\partial u} + \left[\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \bigl(x_i^k - x_j^k\bigr)(Y_k(i) - Y_k(j)) + \theta Y_{n+1}(j)\right] e^{2z_j} \frac{\partial f(ij)}{\partial v} = 0. \tag{24}$$

Так как (24) — дифференциальное уравнение относительно метрической функции, то имеет место тождество

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k \bigl(x_i^k - x_j^k\bigr)(Y_k(i) - Y_k(j)) + \theta Y_{n+1}(i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k \bigl(x_i^k - x_j^k\bigr)(Y_k(i) - Y_k(j)) + \theta Y_{n+1}(j)} = \varphi(u, v) \neq 0. \tag{25}$$

Лемма 5. *В тождестве* (25) $\varphi(u, u) = -1$.

Доказательство. Переставляя в (22) $i \leftrightarrow j$, получаем $\varphi(u, v)\varphi(v, u) = 1$, следовательно, $\varphi(u, u) = \pm 1$. Если $\varphi(u, u) = 1$, то из (24) следует $Y_{n+1} = Y_{n+1}(z)$. Из уравнения (13) получаем тождество, аналогичное (22), которое решено. Подставляя это решение в (24), получаем уравнение

$$u\frac{\partial f(ij)}{\partial u} + v\frac{\partial f(ij)}{\partial v} = 0.$$

Интегрируя его, имеем $f(ij) = \psi(u/v) = \psi(\exp 2(z_i - z_j))$. Видно, что метрическая функция вырождена. Противоречие. $\square$

Лемма 6. *В тождестве* (25) $\varphi(u,v)=-1$.

Доказательство. Пусть $z_i=z_j=z$. Тогда тождество (25) принимает следующий вид:

$$2\left[\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\big(x_i^k-x_j^k\big)(Y_k(i)-Y_k(j)\big)\right]+\theta(Y_{n+1}(i)+Y_{n+1}(j))=0. \tag{26}$$

Дифференцируя это тождество по x_i^k и x_j^l, получаем

$$\begin{gathered}-(Y_k)'_{x_i^k}-\varepsilon_k(Y_k)'_{x_j^k}-(Y_{n+1}(i)+Y_{n+1}(j))+\big(x_i^k-x_j^k\big)\big((Y_{n+1})'_{x_i^k}-(Y_{n+1})'_{x_j^k}\big)=0,\\ -\varepsilon_l(Y_l)'_{x_i^k}-\varepsilon_k(Y_k)'_{x_j^l}+\varepsilon_k\big(x_i^k-x_j^k\big)(Y_{n+1})'_{x_j^l}-\varepsilon_l\big(x_i^l-x_j^l\big)(Y_{n+1})'_{x_i^k}=0,\\ k,l=1,\dots,n.\end{gathered} \tag{27}$$

Продифференцируем теперь первое уравнение системы (27) по x_i^k и x_j^l, имеем $(Y_{n+1})''_{x^kx^l}=0$. Интегрируя, получаем

$$Y_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_kx^k+c, \tag{28}$$

причем коэффициенты a_k, c зависят от z. Подставим найденное в (27):

$$\begin{gathered}-(Y_k)'_{x_i^k}-(Y_k)'_{x_j^k}-\left(\sum_{l=1}^{n}a_lx^l(i)+2c+\sum_{l=1}^{n}a_lx^l(j)\right)=0,\\ -\varepsilon_l(Y_l)'_{x_i^k}-\varepsilon_k(Y_k)'_{x_j^l}+\varepsilon_k\big(x_i^k-x_j^k\big)a_l-\varepsilon_l\big(x_i^l-x_j^l\big)a_k=0,\\ k\neq l,\quad k,l=1,\dots,n.\end{gathered}$$

Разделяя в полученной системе переменные, имеем

$$(Y_k)'_{x^k}=-\sum_{l=1}^{n}a_lx^l-c,\quad (Y_k)'_{x^l}=\varepsilon_l\varepsilon_ka_kx^l-a_lx^k-\varepsilon_kd_{lk},\quad k\neq l,\quad d_{kl}=-d_{lk}.$$

Интегрируя эту систему и ее решение вместе с функцией (28) подставляя в (26), получаем

$$\begin{gathered}Y_k=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_k\varepsilon_la_k(x^l)^2-\sum_{l=1}^{n}a_lx^kx^l-cx^k-\varepsilon_k\sum_{l=1}^{n}d_{lk}x^l,\\ Y_{n+1}=\sum_{l=1}^{n}a_lx^l+c,\quad k=1,\dots,n.\end{gathered}$$

Поменяем местами z_i и z_j в (25). Умножая полученное соотношение на (25) и приводя подобные, получаем $a=b=c=d=k=l=\mathrm{const}$. Подставляя теперь найденное в (22), приходим к утверждению леммы. □

Из доказанной леммы следует, что уравнение (24) имеет вид

$$u\frac{\partial f(ij)}{\partial u}-v\frac{\partial f(ij)}{\partial v}=0.$$

Интегрируя это уравнение, получаем метрическую функцию (10).

Итак, в уравнении (21) $[X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j)]|_{z_i=z_j=z} \neq 0$.

Перепишем (21) для пары $\langle ji \rangle$:

$$2[X] + X_{n+1}(j)\psi_1(ji) + X_{n+1}(i)\psi_2(ji) = 0. \tag{29}$$

Вычитая из (21) уравнение (29), будем иметь

$$X_{n+1}(i)(\psi_1(ij) - \psi_2(ji)) - X_{n+1}(j)(\psi_1(ji) - \psi_2(ij)) = 0.$$

Так как $[X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j)]|_{z_i=z_j=z} \neq 0$, то $\psi_1(ij) - \psi_2(ji) = 0$. Обозначим $\psi_1(ij) = \psi(ij)$, $\psi_2(ij) = \psi(ji)$. Тогда уравнение (21) переписывается в виде

$$2[X] + X_{n+1}(i)\psi(ij) + X_{n+1}(j)\psi(ji) = 0. \tag{30}$$

Лемма 7. *В уравнении* (30)

$$\psi = c(z)\theta \neq 0, \quad X_{n+1} = p_1(z)x^1 + \cdots + p_n(z)x^n + p_{n+1}(z).$$

Доказательство. В уравнении (30) рассмотрим подстановку $z = z_i = z_j$. Обозначим $\bar{X}_{1,\dots,n+1}(i) = X_{1,\dots,n+1}(x_i, y_i, z)$, $\bar{\psi}(ij) = \psi(\theta, z, z)$. Заметим, что $\bar{\psi}(ij) = \bar{\psi}(ji)$. Значит, (30) принимает вид

$$2[\bar{X}] + (\bar{X}_{n+1}(i) + \bar{X}_{n+1}(j))\bar{\psi}(ij) = 0. \tag{31}$$

Дифференцируя тождество (31) по парам различных координат точек i и j, получаем $\bar{\psi}'_\theta = c(z) \neq 0$. Подставляя это соотношение в (31), затем разделяя переменные и интегрируя, приходим к утверждению леммы. □

По аксиоме о групповой симметрии базис алгебры Ли группы движений $(n+1)$-мерной феноменологически симметричной геометрии состоит из $(n+1)(n+2)/2$ базисных операторов, $n(n+1)/2$ которых известны, а остальные $n+1$ операторов $X, Y, Y^1, \dots, Y^{n-1}$ надо найти. Оператор X удовлетворяет уравнению (21), а операторы $Y, Y^1, \dots, Y^{n-1}$ — уравнениям

$$2[Y] + Y_{n+1}(i)\psi(ij) + Y_{n+1}(j)\psi(ji) = 0, \tag{32}$$

$$2[Y^s] + Y^s_{n+1}(i)\psi(ij) + Y^s_{n+1}(j)\psi(ji) = 0, \quad s = 1, \dots, n-1, \tag{33}$$

причем $[Y_{n+1}(i) - Y_{n+1}(j)]|_{z_i=z_j=z} \neq 0$, $\big[Y^s_{n+1}(i) - Y^s_{n+1}(j)\big]\big|_{z_i=z_j=z} \neq 0$, поскольку иначе приходим к ранее разобранному случаю.

Итак, (31) принимает вид

$$[\bar{X}] + \big(p_1\big(x^1_i + x^1_j\big) + \cdots + p_n\big(x^n_i + x^n_j\big) + p_{n+1}\big)\theta = 0.$$

Аналогичный результат получается, если решать уравнения (32) и (33):

$$[\bar{Y}] + \big(q_1\big(x^1_i + x^1_j\big) + \cdots + q_n\big(x^n_i + x^n_j\big) + q_{n+1}\big)\theta = 0,$$
$$[\bar{Y}^s] + \big(r_1\big(x^1_i + x^1_j\big) + \cdots + r_n\big(x^n_i + x^n_j\big) + r_{n+1}\big)\theta = 0.$$

Комбинацией этих уравнений одно из них приводим к виду (19), в противном случае попадаем в условие леммы 4.

Таким образом, случай $[X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j)]|_{z_i=z_j=z} \neq 0$ приводит к ранее найденной метрической функции (7). Утверждение I теоремы доказано полностью.

§ 3. Доказательство утверждения II теоремы

Докажем теперь теорему для метрической функции (2). Формула (8) переписывается тогда в следующем виде:

$$f(ij) = f\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\big(x_i^k - x_j^k\big)^2 e^{y_i+y_j}, z_i, z_j\right) = f(\theta, z_i, z_j). \tag{34}$$

Так как искомая метрическая функция является двухточечным инвариантом $(n+2)(n+3)/2$-мерной группы движений (аксиома групповой симметрии), то по критерию инвариантности (7) записываем два дифференциальных уравнения для линейно независимых операторов X и Y с базисным разложением (6):

$$[X]e^{y_i+y_j}\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta} + X_{n+2}(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + X_{n+2}(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0, \tag{35}$$

$$[Y]e^{y_i+y_j}\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta} + Y_{n+2}(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + Y_{n+2}(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0, \tag{36}$$

где введены следующие обозначения:

$$[X] = 2\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\big(x_i^k - x_j^k\big)(X_k(i) - X_k(j)) + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\big(x_i^k - x_j^k\big)^2(X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)),$$

$$[Y] = 2\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\big(x_i^k - x_j^k\big)(Y_k(i) - Y_k(j)) + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\big(x_i^k - x_j^k\big)^2(Y_{n+1}(i) + Y_{n+1}(j)).$$

Как и выше, доказывается, что $X_{n+2} \neq 0, Y_{n+2} \neq 0$.

Пусть

$$2\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\big(x_i^k - x_j^k\big)(X_k(i) - X_k(j)) + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\big(x_i^k - x_j^k\big)^2(X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) = 0.$$

Тогда, как доказано в § 2, решением уравнения (35) является функция

$$f(ij) = f\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\big(x_i^k - x_j^k\big)^2 e^{y_i+y_j}, z_i - z_j\right) = f(\theta, w).$$

Подставляя ее в (36), получаем

$$[Y]e^{y_i+y_j}\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta} + (Y_{n+2}(i) - Y_{n+2}(j))\frac{\partial f(ij)}{\partial w} = 0, \quad Y_{n+2} \neq 0. \tag{37}$$

Если в (37) $Y_{n+2} = \mathrm{const}$, то, как и выше, получаем противоречие.

Итак, в (34) $Y_{n+2} \neq \mathrm{const}$. Решим функциональное уравнение

$$\frac{[Y]e^{y_i+y_j}}{Y_{n+2}(i) - Y_{n+2}(j)} = \psi(\theta, w) \neq 0. \tag{38}$$

Осуществляя в (38) перестановку $i \leftrightarrow j$, получаем $\psi(\theta, -w) = -\psi(\theta, w)$.

Лемма 8. *Если в* (38) $[Y_{n+1}(i) - Y_{n+1}(j)]|_{w=0} \neq 0$, *то* $\psi(\theta, 0) = 0$ *и поэтому* $\psi = bw$, *где* $b = \mathrm{const} \neq 0$.

Доказательство. Равенство $\psi(\theta, 0) = 0$ следует из свойства $\psi(\theta, -w) = -\psi(\theta, w)$. В (38) введем подстановку $z = z_i = z_j$, тогда $w = 0$. Значит, имеет место тождество $[Y]|_{w=0} = 0$. Дифференцируя это тождество дважды по x_i^l, x_j^m, $l \neq m$, а также по x_i^m, x_j^m и по y_i, получаем систему функционально-дифференциальных уравнений

$$\bigl[-\varepsilon_l Y'_{lx_j^m} - \varepsilon_m Y'_{mx_i^l} + \varepsilon_l\bigl(x_i^l - x_j^l\bigr)Y'_{(n+1)x_j^m} - \varepsilon_m\bigl(x_i^m - x_j^m\bigr)Y'_{(n+1)x_i^l}\bigr]_{w=0} = 0,$$

$$\bigl[-Y'_{mx_j^m} - Y'_{mx_i^m} + \bigl(x_i^m - x_j^m\bigr)\bigl(Y'_{(n+1)x_j^m} - Y'_{(n+1)x_i^m}\bigr) - Y_{n+1}(i) - Y_{n+1}(j)\bigr]_{w=0} = 0,$$

$$Y'_{ky} = Y'_{(n+1)y} = 0, \quad l \neq m.$$

Дифференцируя данную систему по x_i^m, а затем разделяя переменные, получаем

$$Y'_{(n+1)x^m} = a_m(z), \quad Y'_{lx^l} = -Y_{n+1},$$

$$Y'_{lx^m} = -a_m(z)x^l + \varepsilon_l\varepsilon_m a_l(z)x^m + \varepsilon_l\alpha_{ml}(z), \quad m \neq l, \quad \alpha_{ml} = -\alpha_{lm}.$$

Интегрируя эту систему уравнений, имеем

$$Y_l = -x^l\sum_{m=1}^{n} a_m(z)x^m + \frac{\varepsilon_l a_l(z)}{2}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon_m(x^m)^2 + \sum_{m=1}^{n}\varepsilon_l\alpha_{ml}(z)x^m - b_{n+1}(z)x^l + b_l(z),$$

$$Y_{n+1} = \sum_{l=1}^{n} a_l(z)x^l + b_{n+1}(z), \quad \alpha_{ml} = -\alpha_{lm}, \quad l, m = 1, \dots, n.$$

Подставляя найденное в (35), приходим к утверждению леммы. $\square$

Применяя лемму 8 к уравнению (37), получаем

$$2b\theta w\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta} + \frac{\partial f(ij)}{\partial w} = 0.$$

Интегрируя это уравнение и переобозначая переменные, получаем метрическую функцию, группа инвариантности которой имеет размерность меньше $(n+2)(n+3)/2$, т. е. геометрия не является феноменологически симметричной.

Лемма 9. *Если в тождестве* (38) $[Y_{n+2}(i) - Y_{n+2}(j)]|_{w=0} = 0$, *т. е.* $Y_{n+2} = Y_{n+2}(z)$, *то* $\psi = \alpha\theta/w$, *где* $\alpha = \mathrm{const} \neq 0$.

Доказательство. По условию леммы уравнение (38) переписывается в виде $[Y]e^{y_i+y_j} = \psi(\theta, w)(Y_{n+2}(z_i) - Y_{n+2}(z_j))$. Дифференцируя это тождество дважды по x_i^l, x_j^m, $l \neq m$, а также по x_i^m, x_j^m, получаем функционально-дифференциальные уравнения, как в лемме 8, решая которые приходим к утверждению леммы. $\square$

Подставляя полученное в лемме 8 соотношение в уравнение (37), получаем

$$2\alpha\theta\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta} + w\frac{\partial f(ij)}{\partial w} = 0.$$

Интегрирование этого уравнения дает метрическую функцию, которая не задает феноменологически симметричную геометрию (не выполняется аксиома феноменологической симметрии).

Пусть в уравнениях (35) и (36)

$$[X]{=}2\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)(X_k(i)-X_k(j)){+}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)^2(X_{n+1}(i)+X_{n+1}(j))\neq 0,$$

$$[Y]{=}2\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)(Y_k(i)-Y_k(j))+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)^2(Y_{n+1}(i)+Y_{n+1}(j))\neq 0.$$

Как и выше, доказывается, что $[X]_{w=0}\neq 0$, $[Y]_{w=0}\neq 0$.

Уравнение (35) перепишем в виде

$$2[X]+X_{n+2}(i)\psi_1(ij)+X_{n+2}(j)\psi_2(ij)=0, \tag{39}$$

где

$$\psi_1(ij)=\frac{\partial f(ij)/\partial z_i}{\partial f(ij)/\partial\theta},\quad \psi_2(ij)=\frac{\partial f(ij)/\partial z_j}{\partial f(ij)/\partial\theta}.$$

Пусть $X_{n+2}=a(z)$. Тогда уравнение (39) имеет вид

$$[X]e^{y_i+y_j}=\mu(\theta,z_i,z_j)\neq 0. \tag{40}$$

Решая (40), подставляя результат в (35) и переобозначая $\int\dfrac{dz}{a(z)}\to z$, после интегрирования будем иметь

$$f(ij)=f(\theta e^{2z_i},\theta e^{2z_j})=f(u,v). \tag{41}$$

Подставляя найденное в (36), получим

$$[[Y]e^{y_i+y_j}+\theta Y_{(n+2)i}]e^{2z_i}\frac{\partial f}{\partial u}+[[Y]e^{y_i+y_j}+\theta Y_{(n+2)j}]e^{2z_j}\frac{\partial f}{\partial v}=0. \tag{42}$$

Так как (42) — дифференциальное уравнение относительно метрической функции, то имеет место тождество

$$\frac{[Y]e^{y_i+y_j}+\theta Y_{(n+2)i}}{[Y]e^{y_i+y_j}+\theta Y_{(n+2)j}}=\varphi(u,v). \tag{43}$$

Как и выше, доказывается, что в тождестве (43) $\varphi(u,v)=-1$. Учитывая это, из (42) получаем

$$u\frac{\partial f(ij)}{\partial u}-v\frac{\partial f(ij)}{\partial v}=0.$$

Интегрируя это уравнение, получаем метрическую функцию, которая равна

$$f(ij)=\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x_i^k-x_j^k\bigr)^2\right)e^{y_i+2z_i+y_j+2z_j}. \tag{44}$$

Вырожденность этой метрической функции следует из того, что подстановка $y+2z=v$ уменьшает количество независимых переменных, что противоречит аксиоме невырожденности.

Если в уравнении (39) $[X_{n+2}(i)-X_{n+2}(j)]|_{z_i=z_j=z}\neq 0$, то, как и при доказательстве утверждения I теоремы, получим метрическую функцию (44), т. е. метрическая функция вырождена, а геометрия не является феноменологически симметричной. Теорема доказана.

Выражаю искреннюю благодарность Г. Г. Михайличенко за многократные обсуждения основных моментов доказательства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лев В. Х.* Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычисл. системы. 1985. Вып. 125. С. 90–103.

2. *Кыров В. А.* Шестимерные алгебры Ли групп движений трехмерных феноменологически симметричных геометрий / Приложение к книге: Михайличенко Г. Г. Полиметрические геометрии. Новосибирск: изд. Новосиб. гос. ун-та, 2001. С. 116–143.

3. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

4. *Михайличенко Г. Г.* О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 2. С. 284–288.

5. *Михайличенко Г. Г.* Полиметрические геометрии. Новосибирск: изд. Новосиб. гос. ун-та, 2001.

Кыров Владимир Александрович
Горно-Алтайский госуниверситет
ул. Социалистическая, 14
649000 г. Горно-Алтайск
E-mail: kfizika@gasu.ru

Статья поступила 24 февраля 2010 г.