Том 16 № 2 2010

УДК 517.965+514.74

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В. А. Кыров

В данной работе решаются функциональные уравнения, появляющиеся в симплектической геометрии.

Ключевые слова: феноменологически симметричная геометрия, функциональное уравнение.

V. A. Kyrov. Functional equations in symplectic geometry.

Functional equations arising in symplectic geometry are solved.

Keywords: phenomenologically symmetric geometry, functional equation.

Введение

На многообразии M, $\dim M = m \in \mathbb{N}$, пусть задана функция $f : M \times M \to \mathbb{R}$, называемая *метрической*, с открытой и плотной областью определения S_f. Локальные координаты в M обозначим $(x^1, \dots, x^m)$. Метрическая функция предполагается аналитической в области своего определения и невырожденной, т. е. выполняется аксиома [1]:

Аксиома невырожденности. Для $m+1$ точек $i, i_1, \dots, i_m \in M$, таких что $\langle ii_1\rangle, \dots, \langle ii_m\rangle \in S_f$, $\langle i_1 i\rangle, \dots, \langle i_m i\rangle \in S_f$, выполняются неравенства

$$\frac{\partial\big(f(ii_1), \dots, f(ii_m)\big)}{\partial(x_i^1, \dots, x_i^m)} \neq 0, \quad \frac{\partial\big(f(i_1 i), \dots, f(i_m i)\big)}{\partial(x_i^1, \dots, x_i^m)} \neq 0,$$

где $(x_i^1, \dots, x_i^m)$ — координаты точки $i \in M$.

О п р е д е л е н и е. Говорят, что на многообразии M метрическая функция f задает феноменологически симметричную геометрию, если она не вырождена и является инвариантом $m(m+1)/2$-параметрической группы движений [1].

Под движением понимается преобразование $\lambda : M \to M$, сохраняющее метрическую функцию, т. е. для любой пары $\langle ij\rangle \in S_f$, $\big\langle \lambda(i)\lambda(j)\big\rangle \in S_f$, выполняется равенство $f\big(\lambda(i), \lambda(j)\big) = f(ij)$ [1]. Множество всех движений образует группу Ли. Ее алгебра Ли состоит из операторов

$$X = X_1\partial_{x^1} + \dots + X_m\partial_{x^m}, \tag{1}$$

где $X_s(x^1, \dots, x^m)$ — аналитические функции, $s = 1, \dots, m$. Через операторы записывается критерий инвариантности метрической функции [2, с. 35]

$$X(i)f(ij) + X(j)f(ij) = 0. \tag{2}$$

На плоскости $\mathbb{R}^2$ феноменологически симметричной геометрией является симплектическая геометрия с метрической функцией

$$\theta = \theta(ij) = x_i y_j - x_j y_i,$$

где (x_i, y_i) — координаты точки $i \in \mathbb{R}^2$. Базисные операторы алгебры Ли группы движений симплектической плоскости:

$$X^1 = y\partial_x, \quad X^2 = x\partial_y, \quad X^3 = x\partial_x - y\partial_y. \tag{3}$$

Цель данной работы — построение трехмерных феноменологически симметричных геометрий в $\mathbb{R}^3$ с метрическими функциями вида

$$f(ij) = f\big(\theta(x_i, x_j, y_i, y_j), z_i, z_j\big). \tag{4}$$

Теорема. *Метрическая функция $f(ij)$ трехмерной феноменологически симметричной геометрии вида (4) с точностью до подходящих координатах и масштабного преобразования (функция от метрической) единственна и задается формулой*

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i + z_i - z_j. \tag{5}$$

Заметим, что феноменологически симметричная геометрия с метрической функцией (5) впервые упоминается в работе [3], где называется трехмерной симплектической геометрией.

Доказательство теоремы

Метрическую функцию будем искать в виде

$$f(ij) = f(x_i y_j - x_j y_i, z_i, z_j) = f(\theta, z_i, z_j). \tag{6}$$

По критерию инвариантности (2) для операторов X и Y вида (1) алгебры Ли группы движений имеем функциональные уравнения:

$$\big[X_1(i)y_j - X_2(i)x_j - X_1(j)y_i + X_2(j)x_i\big]\frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + X_3(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + X_3(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0, \tag{7}$$

$$\big[Y_1(i)y_j - Y_2(i)x_j - Y_1(j)y_i + Y_2(j)x_i\big]\frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + Y_3(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + Y_3(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0, \tag{8}$$

причем $X_3 \neq 0, Y_3 \neq 0$, поскольку иное приводит к противоречию. Действительно, если $X_3 = 0$, то по аксиоме невырожденности $\partial f(ij)/\partial\theta \neq 0$, поэтому

$$X_1(i)y_j - X_2(i)x_j - X_1(j)y_i + X_2(j)x_i = 0. \tag{9}$$

Лемма. *Решением функционального уравнения* (9) *является следующая система функций:*

$$X_1 = ax + by, \quad X_2 = cx - ay,$$

где $a, b, c = \mathrm{const}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцируем тождество (9) дважды по x_i и x_j; по y_i и y_j; по x_i и y_j; по z_i и по x_j, а также по z_i и y_j, потом, разделяя переменные, будем иметь систему уравнений:

$$X'_{1x} = a = \mathrm{const}, \quad X'_{2y} = -a, \quad X'_{2x} = c = \mathrm{const}, \quad X'_{1y} = b = \mathrm{const}, \quad X'_{1z} = 0, \quad X'_{2z} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем искомое. □

Несложно заметить, что оператор X алгебры Ли группы инвариантности метрической функции (6) равен тогда линейной комбинации операторов X^1, X^2, X^3. Значит, группа движений имеет размерность меньше 6. Противоречие.

Итак, $X_3 \neq 0$, $Y_3 \neq 0$.

Пусть $X_1(i)y_j - X_2(i)x_j - X_1(j)y_i + X_2(j)x_i = 0$. Тогда уравнение (7) принимает вид

$$X_3(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + X_3(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0. \tag{10}$$

Так как производные в него входящие не равны нулю (аксиома невырожденности), то справедливо тождество

$$X_3(i)/X_3(j) = \varphi(\theta, z_i, z_j).$$

Дифференцируя его по x_i и по x_j, после чего умножая соответственно на y_i и y_j, затем складывая результаты, а также дифференцируя по y_i и y_j, потом умножая соответственно на x_i и x_j, и снова складывая, далее разделяя переменные, получаем

$$yX'_{3x} = \alpha X_3, \quad xX'_{3y} = \beta X_3, \quad \alpha = \mathrm{const}, \quad \beta = \mathrm{const}.$$

Подставляя в исходное тождество общий интеграл найденных уравнений, имеем $\alpha = \beta = 0$. Тогда $X_3 = a(z)$.

Подставляя найденное в (10), интегрируя и переобозначая $\int dz/a(z) \to z$, получаем

$$f(ij) = f(x_i y_j - x_j y_i, z_i - z_j) = f(\theta, w), \quad w = z_i - z_j. \tag{11}$$

Подставим теперь (11) в уравнение (8):

$$\big[Y_1(i)y_j - Y_2(i)x_j - Y_1(j)y_i + Y_2(j)x_i\big]\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta} + \big(Y_3(i) - Y_3(j)\big)\frac{\partial f(ij)}{\partial w} = 0. \tag{12}$$

Если в (12)

$$Y_1(i)y_j - Y_2(i)x_j - Y_1(j)y_i + Y_2(j)x_i = 0,$$

то по аксиоме невырожденности $Y_3 = \mathrm{const}$, и наоборот. Это уравнение совпадает с (9), а решение записывается по лемме, из которой следует, что оператор Y алгебры Ли группы инвариантности метрической функции (6) равен линейной комбинации операторов X^1, X^2, X^3 и оператора $X = \partial_z$. Тогда группа движений имеет размерность меньше 6. Противоречие.

Итак, в (12) $Y_1(i)y_j - Y_2(i)x_j - Y_1(j)y_i + Y_2(j)x_i \neq 0$ и $Y_3 \neq \mathrm{const}$. Тогда получаем функциональное уравнение

$$Y_1(i)y_j - Y_2(i)x_j - Y_1(j)y_i + Y_2(j)x_i = \big(Y_3(i) - Y_3(j)\big)\psi(\theta, w) \neq 0. \tag{13}$$

Дифференцируя по всем координатам точек i и j, а затем разделяя переменные, получаем $\psi = a = \mathrm{const}$. Подставляя этот результат в тождество (13), а затем в (12), имеем дифференциальное уравнение

$$a\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta} + \frac{\partial f(ij)}{\partial w} = 0.$$

Решая это уравнение и переобозначая $-az \to z$, получаем метрическую функцию (5).

Предположим теперь, что в уравнениях (7) и (8) $X_1(i)y_j - X_2(i)x_j - X_1(j)y_i + X_2(j)x_i \neq 0, Y_1(i)y_j - Y_2(i)x_j - Y_1(j)y_i + Y_2(j)x_i \neq 0$. Перепишем уравнение (7) в виде

$$X_1(i)y_j - X_2(i)x_j - X_1(j)y_i + X_2(j)x_i + X_3(i)\psi_1(ij) + X_3(j)\psi_2(ij) = 0, \tag{14}$$

где $\psi_1(ij) = \big(\partial f(ij)/\partial z_i\big)/\big(\partial f(ij)/\partial\theta\big)$, $\psi_2(ij) = \big(\partial f(ij)/\partial z_j\big)/\big(\partial f(ij)/\partial\theta\big)$. Разложим функции X_1, X_2, X_3 в ряд Тейлора по степеням x и y, а функции ψ_1 и ψ_2 по степеням θ:

$$X_{1,2,3} = a^0_{1,2,3}(z) + a^s_{1,2,3}(z)x_s + \cdots + a^{s_1\cdots s_l}_{1,2,3}(z)x_{s_1}\cdots x_{s_l} + \cdots,$$

$$\psi_{1,2} = b^0_{1,2}(z_i, z_j) + b^1_{1,2}(z_i, z_j)\theta + \cdots + b^l_{1,2}(z_i, z_j)\theta^l + \cdots,$$

где $s, s_1, \ldots, s_l = 1, 2$, $x_1 = x, x_2 = y$. Подставляя данные разложения в (14) и сравнивая коэффициенты перед соответствующими степенями, будем иметь

$$X_1 = \alpha(z)x + by, \quad X_2 = cx + \alpha(z)y, \quad X_3 = a(z), \quad a, c = \mathrm{const}, \quad \alpha \neq 0.$$

Подставляя найденное в (7) и переобозначая $\int dz/a(z) \to z$, будем иметь

$$\big(\alpha(z_i)+\alpha(z_j)\big)\theta\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta}+\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i}+\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j}=0. \tag{15}$$

Решая аналогично уравнение (8), получаем

$$\big(\beta(z_i)+\beta(z_j)\big)\theta\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta}+b(z_i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i}+b(z_j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j}=0, \quad \beta\neq 0. \tag{16}$$

Обозначим:

$$C_i=C_j=1/\big(\alpha(z_i)+\alpha(z_j)\big), \quad D_i=b(z_i)/\big(\beta(z_i)+\beta(z_j)\big), \quad D_j=b(z_j)/\big(\beta(z_i)+\beta(z_j)\big).$$

Тогда

$$\theta\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta}+C_i\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i}+C_j\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j}=0, \quad \theta\frac{\partial f(ij)}{\partial\theta}+D_i\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i}+D_j\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j}=0.$$

Из первого уравнения вычитая второе, будем иметь

$$(C_i-D_i)/(C_j-D_j)=u(ij)\neq 1, \quad u(ij)u(ji)=1.$$

Возвращаясь с этим тождеством в предыдущую систему, получаем

$$C_i-C_ju(ij)=D_i-D_ju(ij)=v(ij)\neq 0, \quad v(ji)u(ij)=-v(ij).$$

Подставляя сокращающие обозначения и записывая эту систему еще для точек ji, имеем

$$1-u(ij)=\big(\alpha(z_i)+\alpha(z_j)\big)v(ij), \quad b(z_i)-b(z_j)u(ij)=\big(\beta(z_i)+\beta(z_j)\big)v(ij),$$
$$1-u(ji)=\big(\alpha(z_i)+\alpha(z_j)\big)v(ji), \quad b(z_j)-b(z_i)u(ji)=\big(\beta(z_i)+\beta(z_j)\big)v(ji).$$

Умножим каждое уравнение второй системы на $u(ij)$, а затем из первой системы вычтем вторую, после чего приведем подобные, получим систему двух уравнений, которую разрешим относительно $v(ij)$, тогда будем иметь

$$2/\big(\alpha(z_i)+\alpha(z_j)\big)=\big(b(z_i)+b(z_j)\big)/\big(\beta(z_i)+\beta(z_j)\big), \quad b'\neq 0.$$

Приводя подобные и дифференцируя по переменным z_i и z_j, получаем $b'_i\alpha'_j+b'_j\alpha'_i=0$, следовательно, $\alpha'=0$. Интегрируя тогда уравнение (15), получаем

$$f(ij)=f\big(\theta e^{2z_i},\theta e^{2z_j}\big)=f(u,v).$$

Подставляя найденное в (16), имеем

$$\big[\beta(z_i)+\beta(z_j)+2b(z_i)\big]u\frac{\partial f(ij)}{\partial u}+\big[\beta(z_i)+\beta(z_j)+2b(z_j)\big]v\frac{\partial f(ij)}{\partial v}=0. \tag{17}$$

Из этого уравнения получаем

$$\big(\beta(z_i)+\beta(z_j)+2b(z_i)\big)/\big(\beta(z_i)+\beta(z_j)+2b(z_j)\big)=q=\mathrm{const}.$$

Тогда, интегрируя уравнение (17), получаем метрическую функцию

$$f(ij)=(x_iy_j-x_jy_i)^{1-q}e^{z_i-qz_j}.$$

Можно показать, что группа движений геометрии с данной метрической функцией имеет размерность меньше 6, т. е. геометрия не является феноменологически симметричной.

Итак, теорема доказана полностью. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Михайличенко Г.Г.** О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 2. С. 284–288.
2. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. **Лев В.Х.** Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1985. № 125. С. 90–103.

Кыров Владимир Александрович
канд. физ.-мат. наук
доцент
Горно-Алтайский гос. ун-т
e-mail: kfizika@gasu.ru

Поступила 08.05.2009