Алгебра Ли группы движений феноменологически симметричной геометрии

В. А. Кыров

1. Введение. Рассмотрим многообразие M, $\dim M = n$. Пусть на M задана гладкая функция $f\colon M \times M \to R$, называемая *метрической*, с открытой и плотной в $M \times M$ областью определения S_f. Значение метрической функции обозначается $f(ij)$, где $\langle i, j\rangle \in S_f$. Локальные координаты в M обозначим через $(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть выполняются следующие аксиомы [1].

Аксиома невырожденности. *Для любого упорядоченного набора $n+1$ точек $\langle i, i_1, \ldots, i_n\rangle$ из открытого и плотного подмножества в M^{n+1} таких, что*

$$\langle i, i_1\rangle, \ldots, \langle i, i_n\rangle \in S_f, \qquad \langle i_1, i\rangle, \ldots, \langle i_n, i\rangle \in S_f,$$

выполняются неравенства

$$\frac{\partial(f(ii_1), \ldots, f(ii_n))}{\partial(x_{1i}, \ldots, x_{ni})} \neq 0, \qquad \frac{\partial(f(i_1 i), \ldots, f(i_n i))}{\partial(x_{1i}, \ldots, x_{ni})} \neq 0,$$

где $(x_{1i}, \ldots, x_{ni})$ – координаты точки $i \in M$.

Аксиома феноменологической симметрии. *Для некоторой окрестности любой последовательности точек $\langle i_1, \ldots, i_{n+2}\rangle$ из открытого и плотного подмножества прямого произведения M^{n+2} такой, что*

$$\langle i_p, i_q\rangle \in S_f, \qquad p, q = 1, \ldots, n+2, \quad p \neq q,$$

имеет место тождество

$$\varPhi(f(i_1 i_2), \ldots, f(i_{n+1} i_{n+2})) = 0, \qquad \operatorname{grad} \varPhi \neq 0.$$

Определение 1. Говорят, что на многообразии M метрическая функция f задает *феноменологически симметричную геометрию*, если выполняются аксиомы невырожденности и феноменологической симметрии.

Определение 2. Локальный диффеоморфизм $\lambda\colon M \to M$ называется *локальным движением*, если для любой пары $\langle i, j\rangle \in S_f$ такой, что $\langle \lambda(i), \lambda(j)\rangle \in S_f$, имеет место равенство $f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(ij)$.

Множество всех движений образует группу Ли. Можно показать, что размерность группы движений максимальна и равна $n(n+1)/2$. Доказывается, что двухточечным инвариантом такой группы, по которому она восстанавливается [1], является метрическая функция.

В данной работе группа движений рассматривается локально, поэтому многообразие M можно отождествить с $\mathbb{R}^n$. Группу движений обозначим $G(\mathbb{R}^n)$, она имеет размерность $n(n+1)/2$. Базисные операторы алгебры Ли L группы движений обозначим $X_1, \ldots, X_{n(n+1)/2}$. Так как $f(ij)$ – двухточечный инвариант группы движений, то согласно критерию локальной инвариантности выполняется система уравнений [2; с. 35]

$$X_\mu(i) f(ij) + X_\mu(j) f(ij) = 0, \qquad \mu = 1, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

В локальных координатах $(x_1, \ldots, x_n)$ для базисных операторов имеем

$$X_\mu = \lambda_\mu^1(x_1, \ldots, x_n)\, \partial_{x_1} + \cdots + \lambda_\mu^n(x_1, \ldots, x_n)\, \partial_{x_n}, \tag{2}$$

где $\lambda_\mu^1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \lambda_\mu^n(x_1, \ldots, x_n)$ – достаточно гладкие функции.

Основная цель данной работы – это доказательство следующих теорем.

Теорема 1. *В некоторой окрестности $U(i) \subset \mathbb{R}^n$ точки i группа Ли движений $G(\mathbb{R}^n)$ феноменологически симметричной геометрии транзитивна.*

Теорема 2. *Алгебру Ли L группы движений феноменологически симметричной геометрии нельзя представить в виде прямой суммы двух идеалов.*

2. Доказательство теорем.

Доказательство теоремы 1. При $n = 1$ теорема очевидна. Проведем доказательство при $n \geqslant 2$. Пусть группа движений $G(\mathbb{R}^n)$ с невырожденным двухточечным инвариантом f в некоторой окрестности $V(i)$ точки $i \in \mathbb{R}^n$ интранзитивна. Тогда инвариантное многообразие этой группы имеет размерность m, причем при $n = 2$ $m = 1$, а при $n \geqslant 3$ $m = 2, \ldots, n-1$. В окрестности точки i локальные координаты введем так, чтобы m координатных линий принадлежали инвариантному многообразию. Пусть $U(i)$ пересечение введенной координатной окрестности с $V(i)$, а $M(i)$ – пересечение $U(i)$ с инвариантным многообразием, проходящим через точку i. Координаты на $M(i)$ обозначим $x_1, \ldots, x_m$. В этих координатах для компонент операторов (2) имеем

$$\lambda_\mu^\nu = \lambda\nu_\mu(x_1, \ldots, x_m), \qquad \lambda_\mu^\omega = 0,$$

где $\mu = 1, \ldots, n(n+1)/2$, $\nu = 1, \ldots, m$, $\omega = m+1, \ldots, n$. Решая систему (1) для найденных операторов, получаем вырожденный инвариант

$$f(ij) = f(x_{m+1}(i), \ldots, x_n(i), x_{m+1}(j), \ldots, x_n(j)).$$

Противоречие.

Доказательство теоремы 2. Очевидно, $n \geqslant 2$. Предположим, что $L = J_1 \oplus J_2$, где J_1, J_2 – идеалы. Рассмотрим группы движений $G(U(i), J_1)$ и $G(U(i), J_2)$ с алгебрами Ли J_1 и J_2. Им соответствуют инвариантные многообразия $M[G(U(i), J_1)]$ и $M[G(U(i), J_2)]$. Выделим следующие случаи:

I) $\dim J_1 = 1$, $\dim J_2 = n(n+1)/2 - 1$,

II) $\dim J_1 = m$, $\dim J_2 = n(n+1)/2 - m$, $m \geqslant 2$.

Лемма. *Если алгебра Ли группы движений феноменологически симметричной геометрии разлагается в прямую сумму двух идеалов $L = J_1 \oplus J_2$, то инвариантные многообразия групп с алгебрами Ли J_1 и J_2 пересекаются транверсально.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру Ли группы движений феноменологически симметричной геометрии $L = J_1 \oplus J_2$, где J_1 и J_2 – ее идеалы [2; с. 180]. Пусть $G(U(i))$ – группа Ли преобразований окрестности $U(i) \subset \mathbb{R}^n$ точки i с алгеброй Ли L, $G(U(i), J_1)$ и $G(U(i), J_2)$ – ее подгруппы Ли с алгебрами Ли J_1 и J_2, а $M[G(U(i), J_1)]$ и $M[G(U(i), J_2)]$ – инвариантные многообразия в $U(i)$. Предположим, что эти многообразия пересекаются в $j \in U(i)$. Касательные пространства в j к инвариантным многообразиям обозначим $T_j(M[G(U(i), J_1)])$ и $T_j(M[G(U(i), J_2)])$. Произвольный вектор из $T_j(M[G(U(i), J_1)])$ является линейной комбинацией векторов, индуцированных операторами из J_1 в j. Аналогично и для касательного пространства $T_j(M[G(U(i), J_2)])$. Из свойства транзитивности группы движений $G(U(i))$ получаем

$$T_j(U(i)) = T_j(M[G(U(i), J_1)]) \oplus T_j(M[G(U(i), J_2)]).$$

Утверждение. *Если два оператора алгебры Ли L группы движений феноменологически симметричной геометрии коммутируют, то их интегральные кривые в некоторой окрестности $U(i)$ точки $i \in \mathbb{R}^n$ пересекаются трансверсально.*

Действительно. Пусть X и Y – коммутативные операторы, т.е. $[X, Y] = 0$. Тогда можно ввести такую систему локальных координат в $U(i)$, относительно которой

$$X = \partial_{x_1}, \qquad Y = Y_1(x_2, \dots, x_n)\partial_{x_1} + Y_2(x_2, \dots, x_n)\partial_{x_2} + \dots + Y_n(x_2, \dots, x_n)\partial_{x_n}$$

(см. [2; с. 40]). Если $Y_2^2 + \dots + Y_n^2 = 0$, то $X = \partial_x$ и $Y = Y_1(x_2, \dots, x_n)\partial_x$; следовательно двухточечный инвариант группы движений $G(\mathbb{R}^n)$ имеет вид $f(ij) = f(x_2(i), \dots, x_n(i), x_2(j), \dots, x_n(j))$, т.е. вырожден. Противоречие. Пусть теперь $Y_2^2 + \dots + Y_n^2 \neq 0$. Тогда в $U(i)$ интегральные кривые пересекаются трансверсально.

Вернемся к доказательству леммы. Из определения прямой суммы идеалов следует, что $[X, Y] = 0$ для любых $X \in J_1$ и $Y \in J_2$. Тогда по выше доказанному утверждению $M[G(U(i), J_1)]$ и $M[G(U(i), J_2)]$ могут пересекаться только трансверсально в $U(i)$.

I) Пусть $\dim J_1 = 1$, $\dim J_2 = n(n+1)/2 - 1$. Тогда

$$\dim M[G(U(i), J_1)] = 1, \qquad \dim M[G(U(i), J_2)] = n - 1.$$

Из леммы следует, что в $U(i)$ можно ввести такие координаты, чтобы первая из них являлась локальной координатой на $M[G(U(i), J_1)]$, которую обозначим x_1, а остальные – локальными координатами на $M[G(U(i), J_2)]$: $x_2, \dots, x_n$. Тогда для базисных операторов алгебры L имеем

$$X_1 = \partial_{x_1}, \qquad X_\mu = \lambda_\mu^2(x_2, \dots, x_n)\partial_{x_2} + \dots + \lambda_\mu^n(x_2, \dots, x_n)\partial_{x_n},$$

где $\mu = 2, \dots, n(n+1)/2$. Поэтому двухточечный инвариант равен $f(ij) = f(g(x_2(i), \dots, x_n(j), x_2(j), \dots, x_n(j)))$, т.е. вырожден. Противоречие.

II) Пусть $\dim J_1 = m$, $\dim J_2 = n(n+1)/2 - m$. Тогда

$$\dim M[G(U(i), J_1)] = k, \qquad \dim M[G(U(i), J_2)] = n - k,$$

причем $k \leqslant m$, $n - k \leqslant n(n+1)/2 - m$. Рассуждая как и выше, приходим к вырожденному двухточечному инварианту. Противоречие. Теорема 2 доказана полностью.

Следствие. *Если алгебра Ли L группы движений феноменологически симметричной геометрии полупроста, то она проста.*

Это утверждение вытекает из теоремы 2 и структурной теоремы [2; с. 191]: *конечномерная алгебра Ли L полупроста тогда и только тогда, когда существует разложение $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$, где L_s – идеалы, являющиеся простыми подалгебрами Ли, $s = 1, \dots, k$.*

3. Примеры. Рассмотрим форму Киллинга алгебра Ли L [2; с. 190]:

$$K[X, Y] = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(X) \circ \operatorname{ad}(Y)),$$

где $X, Y \in L$, $\operatorname{ad}(X)\colon L \to L$ – присоединенный оператор. Напомним также *критерий полупростоты* [2; с. 191]: *алгебра Ли L полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга невырождена.*

Пространство Евклида. Известно, что форма Киллинга алгебры Ли группы движений пространства Евклида вырождена и поэтому алгебра Ли не является полупростой.

Пространство Гельмгольца. Метрическая функция [3]

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \exp\left\{2\left(\gamma \operatorname{arctg}\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right) + z_i + z_j\right)\right\}.$$

Коммутционные соотношения базисных операторов алгебры Ли ее группы движений [3]:

$$
\begin{gathered}
[X_1, X_2] = 0, \qquad [X_1, X_3] = -\gamma X_1 + X_2, \qquad [X_1, X_4] = -X_1 - \gamma X_2, \\
[X_1, X_5] = 2X_4, \qquad [X_1, X_6] = 2X_3, \qquad [X_2, X_3] = -X_1 - \gamma X_2, \\
[X_2, X_4] = \gamma X_1 - X_2, \qquad [X_2, X_5] = -3X_3, \qquad [X_2, X_6] = 2X_4, \\
[X_3, X_4] = 0, \qquad [X_3, X_5] = -X_6 - \gamma X_5, \qquad [X_3, X_6] = X_5 - \gamma X_6, \\
[X_4, X_5] = \gamma X_6 - X_5, \qquad [X_4, X_6] = -\gamma X_5 - X_6, \qquad [X_5, X_6] = 0.
\end{gathered}
$$

Форма Киллинга имеет вид

$$
\begin{aligned}
K[X, Y] = 4(\gamma^2 - 1)(X^3Y^3 - X^4Y^4) + 8\gamma(X^3Y^4 + X^4Y^3) + 8(X^1Y^5 + X^5Y^1) \\
+ 8\gamma(X^1Y^6 + X^6Y^1) - 8\gamma(X^2Y^5 + X^5Y^2) + 8(X^2Y^6 + X^6Y^2).
\end{aligned}
$$

Доказывается невырожденность формы Киллинга, поэтому алгебра Ли полупроста. По следствию из теоремы 2 эта алгебра Ли проста.

Сферическое пространство. Невырожденность формы Киллинга для алгебры Ли группы движений сферического пространства, т.е. группы вращений, является хорошо известным фактом. Ее алгебра Ли проста.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Г. Г. Михайличенко, *Докл. АН СССР*, **269**:2 (1983), 284–288. **[2]** Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978. **[3]** В. А. Кыров, “Шестимерные алгебры Ли групп движений трехмерных феноменологически симметричных геометрий”: Г. Г. Михайличенко, *Полиметрические геометрии*, Изд-во Новосибирск. гос. ун-та, Новосибирск, 2001, 116–143.

В. А. Кыров
Горно-алтайский государственный университет
E-mail: kfizika@gasu.ru

Поступило
22.05.2009
Исправленный вариант
14.03.2011