УДК 514.7

О локальной подгруппе Ли группы голономии[1]

В.А. Кыров

1. Введение. В данной работе сначала находятся функции, определяющие структуру произвольного G-пространства (структурные функции). Эти функции обобщают компоненты метрического тензора в римановых пространствах. Затем, по известной локальной подгруппе Ли группы голономии находятся символы Кристоффеля. Потом общие методы применяются для изучения гельмгольцевых двумерных многообразий, которые были определены в работе автора [2] и в бесконечно малой окрестности произвольной точки устроены как гельмгольцевы плоскости, полученные в классификации феноменологически симметричных двумерных геометрий Михайличенко Г.Г. [3]. В конце статьи исследуются геодезические.

Двумерные феноменологически симметричные геометрии — это геометрии, краткое определение которых следующее. Существует достаточно гладкое многообразие M, в котором можно ввести единую систему координат и плотное подмногообразие M' прямого произведения $M \times M$, а также достаточно гладкая невырожденная функция $f : M' \to R$, которую будем называть *метрической функцией*, и гладкая функция шести переменных $\Phi : R^6 \to R$, что для любого кортежа из четырех произвольных точек $< xyzu >$, каждая пара из которого принадлежит множеству M', имеет место функциональная связь:

$$\Phi(f(xy), f(xz), f(xu), f(yz), f(yu), f(zu)) = 0.$$

Решая это уравнение [3] мы находим метрические функции гельмгольцевых плоскостей (аналог метрики в евклидовой плоскости). К числу которых принадлежат:

собственно гельмгольцева плоскость Γ^2, метрическая функция $f(xy)$ которой в специальной системе координат имеет следующее представление:

$$f(xy) = [(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2] \exp\left(2\gamma arctg \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}\right), \qquad (1)$$

где $\gamma > 0$, x^1 и x^2 — координаты точки x, причем функция $arctg$ рассматривается однозначной с областью значений в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$(этот термин появился из анализа знаменитой работы Гельмгольца "О фактах, лежащих в основании геометрии", где он предлагал изучать геометрию, в которой роль окружности выполняет логарифмическая спираль);

псевдогельмгольцева плоскость $P\Gamma^2$, метрическая функция f которой в некоторой системе координат имеет вид:

$$f(xy) = [(x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2] \exp\left(2\beta Ar(c)th \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}\right), \qquad (2)$$

где $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$, причем выбирается функция $Arth$, если аргумент по модулю меньше единицы и выбирается функция $Arcth$, если аргумент по величине больше единицы;

дуальногельмгольцева плоскость D^2, с метрической функцией f в некоторой системе координат:

$$f(xy) = (x^1 - y^1)^2 \exp\left(2 \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}\right), \qquad (3)$$

[1]Данные исследования поддержаны РФФИ (грант 02-01-01071)

и, наконец, *симплициальная плоскость* S^2, с метрической функцией f, которая в некоторой системе координат имеет следующее представление:

$$f(xy) = \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}. \tag{4}$$

Объединим в одном выражении метрические функции (1) — (3):

$$f(xy) = [(x^1 - y^1)^2 - \varepsilon(x^2 - y^2)^2] \exp\ 2\alpha\Phi_\varepsilon \left(\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}\right), \tag{5}$$

где для собственно гельмгольцевой плоскости Γ^2: $\varepsilon = -1$, $\alpha = \gamma$, $\Phi_{-1}(x) = arctgx$; для псевдогельмгольцевой плоскости $P\Gamma^2$: $\varepsilon = 1$, $\alpha = \beta$, $\Phi_1(x) = Ar(c)thx$; для дуально-гельмгольцевой плоскости D^2: $\varepsilon = 0$, $\alpha = 1$, $\Phi_0(x) = x$. Ниже под термином плоскость Гельмгольца, если нет опасности путаницы, будет пониматься одна из этих четырех плоскостей, которую обозначим через F^2.

Пусть G — группа преобразований плоскости F^2. Преобразование g назовем *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию f, то есть оставляет ее инвариантной. Михайличенко Г.Г. в монографии [3] показал, что по метрической функции f находится трехпараметрическая группа движений G, а по этой группе движений восстанавливается метрическая функция f с точностью до "масштабной"гладкой функции. Решая эту задачу для выше приведенных плоскостей, приходим к группам движений G_{F^2}, которые для плоскостей Γ^2, $P\Gamma^2$, D^2 задаются следующими уравнениями:

$$x'^1 = ax^1 + \varepsilon bx^2 + c, \quad x'^2 = bx^1 + ax^2 + d, \quad (a^2 - \varepsilon b^2)\ \exp\ 2\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{b}{a}\right) = 1, \tag{6}$$

а для плоскости S^2:

$$x'^1 = ax^1 + c, \quad x'^2 = ax^2 + d,\ a \neq 0. \tag{7}$$

Очевидно, что эти группы являются подгруппами группы аффинных преобразований. Они содержат *подгруппы вращений плоскости* F^2, которые будем обозначать $O(F^2)$:

$$x'^1 = ax^1 + \varepsilon bx^2, \quad x'^2 = bx^1 + ax^2, \quad (a^2 - \varepsilon b^2)\ \exp\ 2\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{b}{a}\right) = 1 \tag{6'}$$

и

$$x'^1 = ax^1, \quad x'^2 = ax^2,\ a \neq 0. \tag{7'}$$

Можно показать, что у группы $O(F^2)$ имеется двухточечный инвариант, который имеет следующее координатное представление: для плоскостей $F^2 = \Gamma^2$, $P\Gamma^2$, D^2:

$$(x, y)_{F^2} = (x^1y^1 - \varepsilon x^2y^2) \exp\left(\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{x^2}{x^1}\right) + \alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{y^2}{y^1}\right)\right); \tag{8.1}$$

для симплициальной плоскости S^2:

$$(x, y)_{S^2} = \sqrt{\frac{x^2y^2}{x^1y^1}}. \tag{8.2}$$

Пусть V^2 — двумерное вещественное линейное пространство с фиксированным базисом e_1, e_2. В V^2 определим гельмгольцево квазискалярное произведение (аналог скалярного произведения в евклидовых пространствах) между векторами ξ и η, которое относительно базиса e_1, e_2 в координатах задается формулой (8.1) или (8.2) и обозначается $(\xi,\eta)_{F^2}$, где уже $F^2 = \Gamma^2, P\Gamma^2, D^2, S^2$. Заметим, что введенное здесь квазискалярное произведение не удовлетворяет всем свойствам евклидова скалярного произведения. Так оно не являются билинейным и не определено в нуле.

Области определения функций $(\xi,\eta)_{\Gamma^2}$, $(\xi,\eta)_{P\Gamma^2}$, $(\xi,\eta)_{D^2}$, $(\xi,\eta)_{S^2}$, обозначим через $L' \subset V^2 \times V^2$, а области определения функций $(\xi,\xi)_{\Gamma^2}$, $(\xi,\xi)_{P\Gamma^2}$, $(\xi,\xi)_{D^2}$ — через $L \subset V^2$. Несложно показать, что $L' \subset L \times L$.

2. Структурные функции G-пространств. В данном параграфе построим структурные функции G-пространства, которые обобщают компоненты метрического тензора в римановом пространстве. Затем перейдем к рассмотрению частных случаев: римановых и гельмгольцевых многообразий.

Пусть M — гладкое n-мерное многообразие. Пусть $T(M)$ касательное расслоение со стандартным слоем V^n. Пусть $L(M)$ расслоение линейных реперов u со структурной группой $GL(n,R)$. Каждый линейный репер u из $L_x(M)$ можно рассмотреть как изоморфизм V^n на $T_x(M)$ [1] в следующем смысле. Пусть $(e_1, ..., e_n)$ фиксированный базис в V^n. Тогда $ue_i = X_i$, где $i = 1, ..., n$, следовательно $u\xi = \xi^i X_i \in T_x(M)$, причем $\xi = \xi^i e_i$.

Рассмотрим гладкое отображение

$$\omega : L_x(M) \times L_x(M) \times T_x(M) \to V^n, \tag{9}$$

которое имеет следующее представление:

$$\omega(u, v, X) = a_i^j X^i e_j, \tag{10}$$

где u, v – произвольные линейные реперы из $L_x(M)$, X – произвольный вектор из $T_x(M)$ с координатами $X^1, ..., X^n$ в базисе v. Следует заметить, что $a = X^{-1}$, где X — матрица отличия репера u от v, а $a = a_i^j$. Относительно открытого покрытия U_α многообразия M, в силу локальной тривиальности расслоения $L(M)$, существует семейство изоморфизмов $\kappa_\alpha : L(U_\alpha) \to U_\alpha \times GL(n,R)$, которые определяют сечения через u и v: $\sigma_\alpha : U_\alpha \to L(M)$ по формулам $\sigma_{1\alpha}(x) = \kappa_{1\alpha}^{-1}(x,e)$ и $\sigma_{2\alpha}(x) = \kappa_{2\alpha}^{-1}(x,e)$ соответственно [5], такое что соответствие $x \mapsto \omega$ является гладким в координатной окрестности $U \subset M$. Поэтому элементы матрицы a являются дифференцируемыми функциями в U, которые будем называть *структурными функциями.*

Естественно рассмотреть следующее сужение отображения (9):

$$\omega : L_x(M) \times \{v\} \times T_x(M) \to V^n.$$

Его мы обозначим

$$\omega_v : L_x(M) \times T_x(M) \to V^n. \tag{11}$$

Предположим, что $v = (\partial x^1, ..., \partial x^n)$ – координатный базис в M. Тогда

$$\omega_v(u, \partial x^i) = e_i^* = a_i^j e_j.$$

Очевидно следующее свойство отображения ω_v:

$$u \circ \omega_v(u, \partial x^i) = \partial x^i.$$

В общем случае

$$u \circ \omega_v(u, X) = X.$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *При переходе от системы координат в U к системе координат в U' многообразия M структурные функции a в произвольной точке из $U \cap U'$ преобразуются по закону*

$$a_i^{'j} = a_k^j \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}, \tag{12}$$

где a — структурные функции заданные в координатной окрестности U, а a' – структурные функции в координатной окрестности U'.

Из леммы 1 следует, что функции (10) инвариантны относительно произвольной замены координат.

Предположим, что в отображении (11) репер v является координатным базисом. Тогда это отображение можно представить как элемент пространства

$$T_x^*(M) \otimes T_x(M) \times V^n.$$

Этот элемент в координатах имеет следующее представление:

$$\omega_v(u, X) = \langle X, a^j \rangle e_j = a_i^j X^i e_j,$$

где вектор $X \in T_x(M)$ в базисе v имеет координаты X^i, а формы a^j в дуальном базисе $dx^1, ..., dx^n$ задаются так:

$$a^j = a_i^j dx^i. \tag{13}$$

Определим каноническую форму θ на $L(M)$ по следующей формуле [1]:

$$\theta(X^*) = u^{-1}(X) \in V^n,$$

где $X^* \in T_u(L(M))$ и $X = \pi^{-1}(X^*) \in T_x(M)$, причем π – проекция касательного пространства $T_u(L(M))$ на пространство $T_x(M)$, индуцированная проекцией $L(M)$ на M. Очевидно, что

$$\theta(X^*) = \omega_v(u, \pi^{-1}(X^*)).$$

Легко показать, что в локальных координатах компоненты канонической формы θ совпадает с формами (13).

Заметим, что в точке $x \in U$ отображение (10) разбивается на семейство изоморфизмов $\{\rho_x\}$:

$$\rho_x : T_x(M) \to V^n \tag{14}$$

или в явном виде:

$$\rho_x(X) = \omega_{v,u}(X).$$

Очевидно, соответствие $x \to \rho_x$ является гладким.

Рассмотрим аффинное пространство A^n, пространством свободных векторов которого является V^n. Каждое из отображений ρ_x семейства $\{\rho_x\}$ естественным образом индуцирует гладкое отображение из U в A^n, ограничение которого на некоторую окрестность $U' \subset U$ является диффеоморфизмом [8]. Это отображение будем обозначать

$$\Omega : U \to A^n. \tag{15}$$

Заметим, что дифференциал отображения (15) в точке $x \in U$ совпадает с (14).

Пусть G — замкнутая подгруппа Ли группы $GL(n, R)$. Редукция ψ главного расслоения $P'(M, G)$ в главное расслоение $L(M) = P(M, GL(n, R))$ состоит из послойного отображения $\psi : P' \to P$, которое индуцирует тождественное преобразование в M, и гомоморфного вложения $\psi' : G \to GL(n, R)$ таких, что выполняется тождество

$$\psi(ua) = \psi(u)\psi'(a).$$

Каждое отображение ψ определяет редуцированное подрасслоение в $L(M)$. Каждая такая редукция называется еще G-структурой на многообразии M [1,5].

Редуцированное подрасслоение будем обозначать $Q(M,G)$ или просто Q. Рассмотрим сужение отображения (9) на Q_x относительно первого аргумента.

$$\omega : Q_x(M) \times L_x(M) \times T_x(M) \to V^n. \tag{16}$$

Для фиксированного репера $v \in L_x(M)$ имеем:

$$\omega_v(u, X) = a_i^j X^i e_j, \tag{17}$$

где u – произвольный репер из Q_x. Заметим, что функции (17) в силу выше доказанной леммы инвариантны относительно произвольной замены координат. Поскольку u — произвольный репер из Q_x, а v — некоторый фиксированный репер из $L_x(M)$, то для матрицы a справедливо разложение:

$$a = bc \tag{18}$$

или в координатах

$$a_j^i = b_k^i c_j^k,$$

где в произвольной точке координатной окрестности U матрица b — произвольный элемент подгруппы G, а c — некоторая фиксированная матрица из $GL(n,R)$.

Можно показать, что функция (16), также как и функция (9) в координатной окрестности U является гладкой с гладким соответствием $x \mapsto \omega$. Поэтому функции b и c являются гладкими.

Для редуцированного подрасслоения Q соответствующее ограничение семейства изоморфизмов (14) отображает произвольный вектор из $T_x(M)$ в вектор из V^n по следующей формуле:

$$\rho_x(X) = b_k^i c_j^k X^j e_i, \quad i, j, k = 1, 2, ..., n, \tag{14'}$$

где в точке из U матрица b — произвольный элемент из G.

На множестве структурных функций a в многообразии M введем отношение эквивалентности. Будем считать две функции a_1 и a_2 эквивалентными, если в U можно подобрать такую матричную функцию b, что $a_1 = ba_2$. Можно проверить, что это в действительности отношение эквивалентности. Из построения следует, что класс эквивалентности структурных функций аналитически определяет G-структуру на многообразии. G-пространство M назовем *локально плоским*, если структурные функции попадают в класс, содержащий функции δ_j^i.

Заметим, что формула (18) в каждой точке из U задает действие матричной группы $O(F^2)$ на векторном пространстве невырожденных матриц, причем G-структура инвариантна относительно этого действия.

Рассмотрим теперь примеры конкретных G-пространств.

1. *Римановы пространства.* Пусть M — гладкое n-мерное многообразие. Тогда риманово пространство определяется как редукция структурной группы $GL(n,R)$ к ортогональной подгруппе $O(n)$ [5]. В этом случае редуцированное подрасслоение $Q(M)$ называется расслоением ортонормированных реперов и обозначается $O(M)$. Отображение (17) тогда принимает такой вид:

$$\omega_v(u, X) = b_k^j c_i^k X^i e_j, \tag{$*$}$$

где в произвольной точке b – произвольный элемент группы $O(n)$. Последнее выражение при произвольном u определяет семейство векторов в V^2, на которых скалярный евклидов квадрат (ξ, ξ) принимает одно и то же значение. Так как X – произвольный вектор из $T_x(M)$, то естественным образом мы приходим к евклидовому скалярному проиведению в касательном пространстве: $T_x(M)$

$$(X, X) = (\omega_v(u, X), \omega_v(u, X)). \tag{19}$$

Подставляя в (19) выражения (17), приходим к римановой метрике

$$(X, X) = g_{ij} X^i X^j, \tag{19$'$}$$

где метрический тензор имеет следующее представление:

$$g_{ij} = a_i^1 a_j^1 + a_i^2 a_j^2 + ... + a_i^n a_j^n. \tag{20}$$

Инвариантность компонент метрического тензора относительно преобразований (18) следует из (19′).

Рассмотрим теперь частный случай. Запишем сначала метрический тензор для n-мерной сферы радиуса R в $n+1$-мерном евклидовом пространстве, затем найдем структурные функции этого пространства.

Теорема 1. *Структурные функции n-мерной сферы радиуса R в $n+1$-мерном евклидовом пространстве представимы в виде:*

$$a_j^i = b \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & R\cos u^1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & R\cos u^1 \cos u^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & R\cos u^1 \cos u^2 ... \cos u^n \end{pmatrix},$$

где b – матрица ортогональной группы $O(n+1)$.

Сфера в $n+1$-мерном евклидовом пространстве задается уравнениями:

$$x^1 = R\cos u^1 \cos u^2 ... \cos u^n, \quad x^2 = R\cos u^1 \cos u^2 ... \sin u^n, \quad x^{n+1} = R\sin u^1.$$

Тогда для этой поверхности метрический тензор имеет компоненты:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u^1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & R^2\cos^2 u^1 \cos^2 u^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & R^2\cos^2 u^1 \cos^2 u^2 ... \cos^2 u^n \end{pmatrix}.$$

Из инвариантности компонент метрического тензора (20) относительно преобразований структурных функций (18), приходим к утверждению теоремы. ■

2. *Гельмгольцевы пространства.* Пусть M — 2-мерное гладкое многообразие. Гельмгольцево многообразие определяется как редукция структурной группы $GL(2, R)$ к подгруппе гельмгольцевых вращений $O(F^2)$ [4]. В этом случае редуцированное подрасслоение будем обозначать $Q(M, O(F^2))$. Отображение (17) тогда принимает такой вид:

$$\omega_v(u, X) = b_k^j c_i^k X^i e_j, \tag{$**$}$$

причем в произвольной точке b – произвольный элемент группы $O(F^2)$. Это выражение при произвольном u задает семейство векторов в V^2, на которых квазискалярное произведение $(\xi,\xi)_{F^2}$, где $F^2=\Gamma^2, P\Gamma^2, D^2, S^2$, вектора на себя, имеет одно и то же значение. Это квазискалярное произведение относительно фиксированного базиса e_1, e_2 из пространства V^2 задается выражениями (8.1) и (8.2). Пусть X – произвольный вектор из $T_x(M)$ такой, что $\omega_v(u,X)\in L$, тогда естественным образом мы приходим к гельмгольцевому квазискалярному произведению в касательном пространстве $T_x(M)$:

$$(X,X)_{F^2}=(\omega_v(u,X),\omega_v(u,X))_{F^2}. \tag{21}$$

Подставляя в (21) выражения (17), приходим к метрической функции гельмгольцева пространства: для $F^2=\Gamma^2, P\Gamma^2, D^2$:

$$f=g^{\varepsilon}_{ij}X^iX^j\exp\left(2\alpha\Phi_{\varepsilon}\left(\frac{a^2_jX^j}{a^1_iX^i}\right)\right), \tag{22.1}$$

где $\varepsilon=-1,1,0$, $\alpha=\gamma,\beta,1$, причем

$$g^{\varepsilon}_{ij}=a^1_ia^1_j-\varepsilon a^2_ia^2_j; \tag{22$'$}$$

для $F^2=S^2$:

$$f=\frac{a^2_kX^k}{a^1_lX^l}. \tag{22.2}$$

Заметим, что в (24.1) и (24.2) $\rho_x(X)\in L$. Символы g^{ε}_{ij} образуют тензор.

Несложно убедиться в том, что метрическая функция локально плоского пространства в некоторой системе координат имеет такой вид: для $F^2=\Gamma^2, P\Gamma^2, D^2$:

$$f=((X^1)^2-\varepsilon(X^2)^2)\exp\left(2\alpha\Phi_{\varepsilon}\left(\frac{X^2}{X^1}\right)\right); \tag{23.1}$$

для $F^2=S^2$:

$$f=\frac{X^2}{X^1}. \tag{23.2}$$

3. Связности в G-пространствах. Предположим, что в расслоении линейных реперов $L(M)$ многообразия M задана линейная связность, причем явна известна локальная подгруппа Ли группы голономии Ψ_x. Вычислим символы Кристоффеля этой связности. Все проводимые ниже рассуждения будут носить локальный характер, поэтому ограничимся координатной окрестностью U.

Рассмотрим ограничение суженной группы голономии Ψ^0_x на координатную окрестность U: $\Psi^0_x(U)$, и сужение группы Ψ_x на эту же окрестность: $\Psi_x(U)$. Пусть $\Xi_x(U)$ — известная нам локальная подгруппа Ли группы $\Psi^0_x(U)$, заметим, что $\Xi_x(U)\subset\Psi_x(U)$, а $Q(M,G)$ — редуцированное подрасслоение расслоения $L(M)$.

Пусть u_0 – линейный репер из $Q(M,G)$. Обозначим через $P(u_0)$ расслоение голономии через u_0. Структурной группой расслоения $P(u_0)$ является группа голономии Ψ_x [1]. Ниже будем работать только с сужением этого расслоения на координатную окрестность U: $P(u_0,U)$. Заметим, что $P(u_0,U)$ является подрасслоением расслоения $L(U)$ со структурной группой $\Psi_x(U)$. Рассмотрим изоморфизм $\varphi: L(U)\to U\times GL(n,R)$, который определяет сечение $\sigma(x)=\varphi^{-1}(x,e)$. Пусть φ_0 ограничение изоморфизма φ на пересечение расслоения голономии $P(u_0,U)$ и редуцированного подрасслоения $Q(U,G)$: $\varphi_0: P(u_0,U)\cap Q(U,G)\to U\times\Psi_x(U)\cap G$ и ему соответствующее сечение $\sigma_0: U\to P(u_0,U)\cap Q(U,G)$. Приведем без доказательства лемму [1]:

Лемма 2. *Пусть Q подмножество из $P(M,G)$, а H подгруппы Ли группы G. Допустим: (1) проекция $\pi: P\to M$ отображает Q на M; (2) Q устойчиво относительно H, то есть $R_a(Q)=Q$ для каждого $a\in H$; (3) если $u,v\in Q$ и $\pi(u)=\pi(v)$,* *то существует элемент $a \in H$ такой, что $v = ua$ и (4) каждая точка $x \in M$ имеет окрестность U и сечение $\sigma : U \to P$ такие, что $\sigma(U) \subset Q$. Тогда $Q(M, H)$ есть редуцированное подрасслоение в $P(M, G)$.*

Пусть теперь U — кубическая окрестность точки x, которая рассматривается как открытое подмножество исходной координатной окрестности. Ниже под U будет пониматься только такая окрестность. Относительно этой окрестности точка x имеет координаты $(0, ..., 0)$, а для произвольной другой точки $|x^i| < \delta$. Для любой точки $y \in U$ пусть τ_y отрезок из x в y относительно системы координат $x^1, ..., x^n$. Предположим, что сечение $\sigma_0 : U \to P(u_0, U) \cap Q(U, G)$, причем $\sigma_0(x) = u_0$, выбрано так, что оно, отображает сегмент τ_y в горизонтальную кривую u_{τ_y} из $P(u_0, U) \cap Q(U, G)$. Таким образом, сечение σ_0 отображает U диффеоморфно в $\widetilde{P}(u_0, U) \subset P(u_0, U) \cap Q(U, G)$, которое в силу леммы 2 является редуцированным подрасслоением в $P(u_0, U)$ и в $Q(U, G)$ со структурной группой $H = \{e\}$, состоящей из единичного элемента.

Теорема 2. *Символы Кристоффеля линейной связности G-пространства с известной локальной подгруппы Ли $\Xi_x(U)$ группы голономии $\Psi_x(U)$ задаются выражениями:*

$$\Gamma^q_{ki} = \overline{a}^q_j \frac{\partial a^j_i}{\partial x^k} - \overline{a}^q_j \frac{\partial p^j_l}{\partial x^k} a^l_i, \tag{24}$$

где a – структурные функции G-пространства, p – элемент группы $\Xi_x(U)$, $i, j, k, l, q = 1, ..., n$.

Доказательство. Пусть u — произвольный линейный репер из $Q(U, G)$, а $P(u, U)$ — расслоение голономии через u и его подрасслоение $\widetilde{P}(u, U)$, которое было определено выше. Рассмотрим в кубической окрестности U точку $x = \pi(u)$ с локальными координатами $x^1, ..., x^n$ и произвольную гладкую кривую x_t в U, причем $x = x_0$. Пусть $L_{x_0}(U)$ слой над точкой x_0, причем $u \in L_{x_0}(U)$, а $L_{x_t}(U)$ слой над x_t в $L(U)$. Как нетрудно заметить $\widetilde{P}(u, U)$ пересекается с $L_{x_t}(U)$ в единственной точке u_t. Очевидно, реперу u_t относительно координатного базиса соответствует матрица $a(x_t)$. Из произвольности выбора сечения σ_0 следует, что любое другое сечение $\sigma' : U \to P(u, U) \cap Q(U, G)$ с аналогичными свойствами в точке x отличается от него на произвольный элемент группы $\Psi_x(U) \cap G$. Это сечение можно получить, если по другому выбрать кривые τ_y в U. Поэтому для сечения σ' справедливо разложение структурных функций:

$$a = bc, \tag{18$'$}$$

где в произвольной точке из U матрица $b \in \Psi_x(U) \cap G$. Это разложение совпадает с разложением (18), только если $\Psi_x(U) = G$.

Обозначим через τ^t_0 параллельный перенос из слоя $L_{x_t}(M)$ в слой $L_{x_0}(M)$ в расслоении $L(M)$. Параллельный перенос в $T(M)$ мы будем обозначать также τ^t_0. При параллельном переносе в $L(U)$ вдоль кривой x_t репер u_t переходит в репер u', то есть $\tau^t_0(u_t) = u'$, причем $u' \in P(u, U)$. Поэтому

$$\tau^t_0(u_t) = up^{-1}, \tag{25}$$

где в произвольной точке $x \in U$ матрица p — элемент группы голономии $\Psi_x(U)$. Напомним, что реперы $u, u_t \in \widetilde{P}(u, U)$. Реперу (25) соответствуют структурные функции $p^j_l(x_t) a^l_i(x_0)$. Таким образом, имеет место следующая формула:

$$\tau^t_0(a^j_i(x_t) X^i) = p^j_l(x_t) a^l_i(x_0) X^i, \tag{25$'$}$$

где X^i — координаты параллельно переносимого векторного поля в $T(U)$, причем при $t \to 0$, $p^j_l \to \delta^j_l$. Воспользуемся для удобства обозначениями: $A^j = \omega^j_v(u, X) = a^j_i X^i$.

Вычислим в явном виде ковариантную производную функций A в направлении касательного вектора $\dot{x}_t$:

$$\nabla_{\dot{x}_t} A^j = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [\tau_0^h (A^j(x_h)) - A^j(x_0)].$$

Учитывая (25'), получаем в локальных координатах:

$$\nabla_{\dot{x}_t} A^j = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [p_l^j(x_h) a_i^l(x_0) X^i - a_i^j(x_0) X^i] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [p_l^j(x_h) - \delta_l^j] a_i^l(x_0) X^i.$$

Пусть с данного момента $\Psi_x(U) = \Xi_x(U)$, поэтому p является элементом локальной группы Ли $\Xi_x(U)$, то есть мало отличается от единичного элемента e. Геометрически это можно получить, если кривые x_t брать близкими к кривым τ_y. Тогда разлагая функции p в ряд Тейлора по степеням h и пренебрегая степенями начиная с h^2, приходим к выражению для ковариантной производной

$$\nabla_{\dot{x}_t} A^j = \frac{\partial p_l^j}{\partial x^k} a_i^l \, \dot{x}^k \, X^i. \tag{26}$$

С другой стороны

$$\nabla_k A^j = \left(\frac{\partial a_i^j}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^m a_m^j \right) X^i. \tag{26'}$$

Сравнивая формулы (26) и (26'), приходим

$$\frac{\partial a_i^j}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^m a_m^j = \frac{\partial p_l^j}{\partial x^k} a_i^l. \tag{27}$$

Умножая (27) слева на матрицу $\overline{a}_j^q$, обратную к матрице a, приходим к утверждению теоремы. ■

Теорема 3. *Символы Кристоффеля (24) инвариантны относительно преобразований структурных функций*

$$a \to ba,$$

причем в произвольной точке из U матрица $b \in \Xi_x(U) \cap G$, тогда и только тогда, когда

$$\overline{b}_j^m \frac{\partial b_n^j}{\partial x^k} - \overline{b}_j^m \frac{\partial p_l^j}{\partial x^k} b_n^l = \frac{\partial p_n'^m}{\partial x^k},$$

где $p, p' \in \Xi_x(U)$.

Для доказательства необходимо учести преобразования структурных функций в символах Кристоффеля (24). ■

Ниже будут рассматриваться только символы Кристоффеля, инвариантные относительно преобразований структурных функций $a \to ba$.

Если связность является плоской, то группа голономии $\Psi_x(U)$ является единичной и поэтому

$$\Gamma_{ki}^q = \overline{a}_j^q \frac{\partial a_i^j}{\partial x^k}. \tag{28}$$

Поскольку (28) – символы Кристоффеля плоской связности, то $\Xi_x(U) \cap G = e$, следовательно в разложении структурных функций (18') матрица $b = e$ и поэтому функции a определены однозначно.

Связность в $Q(M,G)$ называется *структурной (или согласованной со структурой)*, если $\Psi_x^0(U) \subseteq G$, а символы Кристоффеля Γ_{ki}^q инвариантны относительно преобразований структурных функций $a \to ba$.

Рассмотрим теперь структурную связность для римановых и гельмгольцевых пространств.

1. *Римановы пространсвта.* В теории римановых пространств структурная связность называется метрической. В этой связности при параллельном переносе сохраняется метрический тензор g, то есть:

$$\nabla_k g_{ij} = 0.$$

Можно показать, что существует единственная метрическая связность с нулевым кручением, символы Кристоффеля которой суть выражения [7]:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right). \tag{29}$$

Очевидно, что в данном случае группа голономии $\Psi_x^0(U) \subseteq O(n,R)$.

Теорема 4. *Символы Кристоффеля (29) инвариантны относительно преобразований структурных функций*

$$a \to ba,$$

причем в произвольной точке из U матрица $b \in \Xi_x(U) \cap \Psi_x^0(U) \subseteq \Xi_x(U) \cap O(n,R)$.

2. *Гельмгольцевы пространства.* В теории гельмгольцевых пространств структурную связность будем называть квазиметрической. В этой связности при параллельном переносе сохраняется метрическая функция, то есть

$$\nabla_k f(X,X) = 0.$$

Справедлива теорема, доказательство которой в случае собственно гельмгольцевых, псевдогельмгольцевах и дуальногельмгольцевых пространств можно найти в работе [2,4]:

Теорема 5. *Собственно гельмгольцево, псевдогельмгольцево, дуальногельмгольцево, симплициальное двумерное многообразие в координатной окрестности U допускает единственную квазиметрическую связность с нулевым кручением, символы Кристоффеля которой в U задаются соответственно следующими выражениями*

$$\Gamma_{ij}^{-1l} = \frac{1}{2} h^{-1lk} \left(\frac{\partial h_{jk}^{-1}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ki}^{-1}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}^{-1}}{\partial x^k} \right) - \gamma h^{-1lk} (\lambda_{jki} + \lambda_{kij} - \lambda_{ijk}), \tag{30.1}$$

$$\Gamma_{ij}^{1l} = \frac{1}{2} h^{1lk} \left(\frac{\partial h_{jk}^{1}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ki}^{1}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}^{1}}{\partial x^k} \right) - \beta h^{1lk} (\lambda_{jki} + \lambda_{kij} - \lambda_{ijk}), \tag{30.2}$$

$$\Gamma_{ij}^{0l} = \frac{1}{2} h^{0lk} \left(\frac{\partial h_{jk}^{0}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ki}^{0}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}^{0}}{\partial x^k} \right) - h^{0lk} (\lambda_{jki} + \lambda_{kij} - \lambda_{ijk}), \tag{30.3}$$

$$\Gamma_{ij}^{l} = \frac{1}{2} h^{lk} \left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} \right) - h^{lk} (\lambda_{jki} + \lambda_{kij} - \lambda_{ijk}), \tag{30.4}$$

где символы

$$h_{ij}^{-1} = a_i^1 a_j^1 + a_i^2 a_j^2 + \gamma (a_i^1 a_j^2 - a_j^1 a_i^2), \tag{31.1}$$

$$h_{ij}^{1} = a_i^1 a_j^1 - a_i^2 a_j^2 + \beta (a_i^1 a_j^2 - a_j^1 a_i^2), \tag{31.2}$$

$$h_{ij}^0 = a_i^1 a_j^1 + (a_i^1 a_j^2 - a_j^1 a_i^2), \tag{31.3}$$
$$h_{ij} = a_i^1 a_j^2 - a_j^1 a_i^2, \tag{31.4}$$

являются тензорами, которые мы будем называть квазиметрическими, для символов λ имеем выражения

$$\lambda_{ijk} = a_j^2 \frac{\partial a_i^1}{\partial x^k} - a_j^1 \frac{\partial a_i^2}{\partial x^k} \tag{32}$$

и, наконец, $h^{ij} h_{jk} = \delta_k^i$ и $h^{\varepsilon ij} h_{jk}^{\varepsilon} = \delta_k^i$, $\varepsilon = -1, -1, 0$.

Заметим, что фигурирующие в утверждении теоремы символы λ тензорному закону не удовлетворяют. В гельмгольцевых пространствах квазиметрический тензор выполняет вспомогательную функцию, в отличии от метрического тензора в римановых пространствах.

Группа голономии $\Psi_x^0(U)$ гельмгольцевых пространств с квазиметрической связностью содержится в группе гельмгольцевых вращений $O(F^2)$.

Замечание. Единственность симметрической согласованной связности следует из того, что при преобразовании структурных функций квазиметрический тензор h и символы λ преобразуются так: для гельмгольцевых, псевдогельмгольцевых и дуальногельмгольцевых пространств:

$$h_{ij} = \overline{h}_{ij} e^{-2\alpha\varphi}, \;\; \lambda_{ijk} = \overline{\lambda}_{ijk} e^{-2\alpha\varphi} - \overline{h}_{ij} e^{-2\alpha\varphi} \varphi_k;$$

для симплициальных пространств:

$$h_{ij} = \overline{h}_{ij} \varphi^2, \;\; \lambda_{ijk} = \overline{\lambda}_{ijk} \varphi^2 - \overline{h}_{ij} \varphi \varphi_k,$$

где φ – параметр группы $\Xi_x(U) \cap O(F^2)$, причем $\overline{h}$ и $\overline{\lambda}$ – символы, соответствующие функции $\varphi = const$.

Теорема 6. *Символы Кристоффеля (30.1) – (30.4) инвариантны относительно преобразований структурных функций*

$$a \to ba,$$

причем в произвольной точке из U матрица $b \in \Xi_x(U) \cap \Psi_x^0(U) \subseteq \Xi_x(U) \cap O(F^2)$.

4. Тензоры кручения и кривизны G-пространств. В данном параграфе находятся выражения для тензоров кручения и кривизны.

Рассмотрим линейную связность в расслоении линейных реперов $L(M)$ G- пространства M с группой голономии Ψ_x, символы Кристоффеля Γ_{jk}^i которой в координатной окрестности U задаются выражениями (24), где p — элемент локальной подгруппы Ли $\Xi_x(U)$ группы голономии $\Psi_x(U)$. Предположим, что группа $\Xi_x(U)$ является s-параметрической с параметрами $\alpha = (\alpha^1, ..., \alpha^s)$, причем при $\alpha = 0$ $p_i^j = \delta_i^j$. Элементы p в таком случае рассматриваются как функции параметров $\alpha = (\alpha^1, ..., \alpha^s)$: $p = p(\alpha)$. Очевидно, в окрестности нулевого параметра в U справедлива приближенная формула:

$$p_l^j = \delta_l^j + \frac{\partial p_l^j}{\partial \alpha^q}|_{\alpha=0} \alpha^q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_l^j}{\partial \alpha^q \partial \alpha^r}|_{\alpha=0} \alpha^r \alpha^q, \;\; j, l = 1, ..., n, \;\; q, r = 1, ..., s,$$

поэтому

$$\frac{\partial p_l^j}{\partial x^k} = \frac{\partial p_l^j}{\partial \alpha^q}|_{\alpha=0} \frac{\partial \alpha^q}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 p_l^j}{\partial \alpha^q \partial \alpha^r}|_{\alpha=0} \alpha^r \frac{\partial \alpha^q}{\partial x^k}, \;\; j, k, l = 1, ..., n.$$

Обозначим

$$\frac{\partial p_l^j}{\partial \alpha^q}|_{\alpha=0} = P_{l,q}^j, \;\; \frac{\partial^2 p_l^j}{\partial \alpha^q \partial \alpha^r}|_{\alpha=0} = P_{l,qr}^j, \;\; \frac{\partial \alpha^q}{\partial x^k} = \omega_k^q. \tag{33}$$

Тогда символы Кристоффеля (24) примут такой вид:

$$\Gamma^q_{ki} = \overline{a}^q_j \frac{\partial a^j_i}{\partial x^k} - \overline{a}^q_j P^j_{l,g} a^l_i \omega^g_k - \overline{a}^q_j P^j_{l,gr} a^l_i \omega^g_k \alpha^r, \qquad (24'')$$

а (26):

$$\frac{\partial a^j_i}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ki} a^j_m = P^j_{l,g} a^l_i \omega^g_k + P^j_{l,gr} a^l_i \omega^g_k \alpha^r, \qquad (27')$$

где $i, j, k, , l, q = 1, ..., n$, $g, r = 1, ..., s$. Заметим, что матрицы $P^j_{l,1}, ..., P^j_{l,s}$ образуют базис алгебры Ли g'локальной группы Ли $\Xi_x(U)$, которая в случае согласованной связности совпадает с алгеброй Ли группы G.

Запишем выражения для компонент тензора кручения T и тензора кривизны R в координатной окрестности U относительно связности с выше найденными символами Кристоффеля Γ^i_{jk}, то есть выразим их через a, $\partial a/\partial x$ и $\partial p/\partial x$. Воспользуемся для этого известными выражениями [6]:

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji},$$

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l} + \Gamma^m_{lj}\Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^i_{lm}.$$

Учитывая (24), приходим к явному выражению для тензора кручения T заданной связности

$$T^k_{ij} = \overline{a}^k_l \frac{\partial a^l_j}{\partial x^i} - \overline{a}^k_l \frac{\partial a^l_i}{\partial x^j} - \overline{a}^k_l \frac{\partial p^l_m}{\partial x^i} a^m_j + \overline{a}^k_l \frac{\partial p^l_m}{\partial x^j} a^m_i.$$

Очевидно, что в случае симметрической связности ($\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$), то есть $T = 0$, имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial a^j_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a^j_k}{\partial x^i} = \frac{\partial p^j_l}{\partial x^k} a^l_i - \frac{\partial p^j_l}{\partial x^i} a^l_k.$$

или, согласно (24")

$$\frac{\partial a^j_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a^j_k}{\partial x^i} = P^j_{l,q} \mu^{ql}_{ik} + P^j_{l,qr} \mu^{ql}_{ik} \alpha^r,$$

где введены сокращающие обозначения: $\mu^{ql}_{ik} = \omega^q_k a^l_i - \omega^q_i a^l_k$. Если, кроме всего прочего, связность локально плоская ($\Xi_x(U) = e$), следовательно $\Xi_x(U) \cap G = e$ и поэтому в разложении структурных функций (18') $b = e$, то есть функции a определены однозначно, то

$$\frac{\partial a^j_i}{\partial x^k} = \frac{\partial a^j_k}{\partial x^i}.$$

Это условие означает, что дифференциальные формы $a^j_i dx^i$ в U замкнуты, то есть являются полными дифференциалами некоторых функций. Поскольку для пространств с локально плоской связностью тензор кривизны равен нулю [1], то выше рассматриваемые пространства являются локально плоскими. Таким образом, только в локально плоском пространстве можно ввести симметричную локально плоскую связность.

Рассуждая аналогично, приходим к выражениям для тензора кривизны R в U пространства M

$$R^i_{jkl} = 2\left[\frac{\partial p^m_r}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{a}^i_m}{\partial x^l} - \frac{\partial p^m_r}{\partial x^l}\frac{\partial \overline{a}^i_m}{\partial x^k}\right] a^r_j + \overline{a}^i_m \left[\frac{\partial p^t_r}{\partial x^l}\frac{\partial p^m_t}{\partial x^k} - \frac{\partial p^t_r}{\partial x^k}\frac{\partial p^m_t}{\partial x^l}\right] a^r_j,$$

где $i, j, k, l, r, m, t = 1, ..., n$. Заметим, что в случае локально плоской связности в $U \subset M$ $\Xi_x(U) = e$ и поэтому $R = 0$.

В окрестности нулевого параметра локальной группы Ли $\Xi_x(U)$ имеют место коммутационные соотношения:

$$P^t_{r,q} P^m_{t,g} - P^t_{r,g} P^m_{t,q} = C^p_{qg} P^m_{r,p},$$

где C^p_{qg} — структурные константы. Тогда приходим к такому выражению для тензора кривизны:

$$R^i_{jkl} = \Lambda^{ir,p}_{jmkl} P^m_{r,p} + R'^i_{jkl,g} \alpha^g + R''^i_{jkl,gc} \alpha^g \alpha^c,$$

причем введены сокращающие обозначения

$$\Lambda^{ir,p}_{jmkl} = 2 \left[\omega^p_k \frac{\partial \overline{a}^i_m}{\partial x^l} - \omega^p_l \frac{\partial \overline{a}^i_m}{\partial x^k} \right] a^r_j + C^p_{qg} \omega^q_k \omega^g_l a^r_j \overline{a}^i_m,$$

$$R'^i_{jkl,g} = 2 P^m_{r,qg} a^r_j \left[\omega^q_k \frac{\partial \overline{a}^i_m}{\partial x^l} - \omega^q_l \frac{\partial \overline{a}^i_m}{\partial x^k} \right],$$

$$R''^i_{jkl,gc} = \overline{a}^i_m P^t_{r,qg} P^m_{t,pc} a^r_j [\omega^q_l \omega^p_k - \omega^q_k \omega^p_l],$$

где $i, j, k, l, m, r = 1, ..., n$; $p, q, g, c = 1, ..., s$.

5. Выражения для символов Кристоффеля римановых и гельмгольцевых пространств. В данном параграфе, зная выражения для символов Кристоффеля (24), получим символы Кристоффеля согласованной связности ранее рассматриваемых пространств: римановых и гельмгольцевых.

1. *Римановы пространства.* Рассмотрим сначала римановы n-мерные пространства. В таком случае группа G совпадает с ортогональной группой $O(n)$, а метрический тензор g задается выражениями (20).

Если в римановом пространстве введена структурная связность, то $\Psi_x(U) \subseteq O(n)$, значит $\Xi_x(U) \subseteq O(n)$, и поэтому базисные элементы ее алгебры Ли g', которая содержится в $o(n)$, удовлетворяют условиям: $P^j_{l,t} + P^l_{j,t} = 0$. Теперь мы должны от левой части выражения (27') при условии $\alpha = 0$ перейти к выражению, у которого левая часть совпадает с левой частью равенства

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ki} g_{jm} - \Gamma^m_{kj} g_{im} = 0. \tag{34}$$

После несложных рассуждений, от (27') приходим к равенству

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &- \Gamma^m_{ki} g_{jm} - \Gamma^m_{kj} g_{im} = \\ &= (a^1_i a^l_j + a^1_j a^l_i) P^1_{l,t} \omega^t_k + ... + (a^n_i a^l_j + a^n_j a^l_i) P^n_{l,t} \omega^t_k. \end{aligned} \tag{35}$$

Воспользовавшись свойствами алгебры Ли $o(n)$, несложно убедиться в том, что правая часть выражения (35) тождественно равна нулю, то есть приходим к (34).

2. *Гельмгольцевы пространсвта.* В этом случае $n = 2$. Подробно проведем вывод для выражений символов Кристоффеля (30.1) собственно гельмгольцевых пространств с квазиметрическим тензором h^{-1}_{ij}. Выражения для символов Кристоффеля (30.2), (30.3) и (30.4) псевдогельмгольцевых, дуальногельмгольцевых и симплициальных пространств находятся аналогично. Тогда структурная группа G совпадает с

группой собственно гельмгольцевых вращений $O(\Gamma^2)$. Рассмотрим структурную связность с группой голономии $\Psi_x(U) \subseteq O(\Gamma^2)$, поэтому $\Xi_x(U) \subseteq O(\Gamma^2)$. Тогда алгебра Ли локальной группы Ли $\Xi_x(U)$, как можно показать, базисом имеет матрицу:

$$\begin{pmatrix} -\gamma & -1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Рассуждая, далее, также как и в римановом случае при выводе выражений для символов Кристоффеля, получаем

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ki} h_{jm} - \Gamma^m_{kj} h_{im} - 2\gamma\lambda_{ijk} = (a^1_i a^l_j + a^1_j a^l_i - \gamma a^2_i a^l_j - \gamma a^2_j a^l_i) P^1_{l,1}\omega^1_k + \\ + (a^2_i a^l_j + a^2_j a^l_i + \gamma a^1_i a^l_j + \gamma a^1_j a^l_i) P^2_{l,1}\omega^1_k.$$

Поскольку $P^1_{1,1} = -\gamma$, $P^2_{2,1} = -\gamma$, $P^1_{2,1} = -1$, $P^2_{1,1} = 1$, то мы приходим к выражениям

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ki} h_{jm} - \Gamma^m_{kj} h_{im} - 2\gamma\lambda_{ijk} = 0,$$

а от них в случае симметрической связности ($\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$) к (30.1).

6. Геодезические G-пространств. Приступим теперь к выводу уравнений геодезических G-пространств относительно согласованной связности с символами Кристоффеля (24). В конце параграфа построим канонические структурные функции.

Гладкая параметризованная кривая x_t, $a < t < b$, $-\infty < a < b < +\infty$ G - пространства M со структурной связностью называется геодезической, если векторное поле $X = \dot{x}_t$, определенное вдоль x_t, параллельно вдоль x_t, то есть $\nabla_X X = 0$ для всех t. Локально геодезическая удовлетворяет системе n дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0. \tag{36}$$

Теорема 7. *В кубической координатной окрестности U G-пространства геодезическая удовлетворяет системе уравнений:*

$$b^i_j c^j_k \dot{x}^k = R^i, \tag{37}$$

где в произвольной точке из U матрица b — произвольный элемент группы $\Xi_x(U)$, R^i – произвольные постоянные.

Доказательство. Подставляя в уравнения геодезической (36) выше найденные выражения для символов Кристоффеля (24), а затем суммируя по индексу j, получаем

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \overline{a}^i_l \frac{da^l_k}{dt}\frac{dx^k}{dt} - \overline{a}^i_l \frac{dp^l_m}{dt} a^m_k \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Умножая левую и правую части последнего равенства слева на a^r_i и суммируя по i, после очевидных преобразований приходим:

$$\frac{d\lambda^i}{dt} - \lambda^k \frac{dp^i_k}{dt} = 0, \tag{38}$$

где введено сокращающее обозначение $\lambda^i = a^i_k \frac{dx^k}{dt}$. Найдем приближенное решение системы уравнений (38). Его можно получить, воспользовавшись тем, что p — элемент группы $\Xi_x(U)$, то есть $p^i_j = \delta^i_j + P^i_{j,q}\alpha^q$, причем α — малый параметр. Тогда система (37) примет такой вид:

$$\frac{d\lambda^i}{dt} - \lambda^k P^i_{k,q}\frac{d\alpha^q}{dt} = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\lambda^i = (\exp P^i_{k,q}\alpha^q)R^k, \quad i,k = 1,...,n,$$

где R^k — произвольные постоянные интегрирования. Обозначая

$$\exp P^i_{k,q}\alpha^q \to p^i_k,$$

приходим

$$\lambda^i = p^i_k R^k.$$

Заметим, что в данном случае $p^i_k \in \Xi_x(U)$. Умножая последнее равенство слева на матрицу $\overline{p}$, а затем переобозначая $\overline{p}a \to a$, приходим к уравнениям в U:

$$a^i_k \, \dot{x}^k = R^i,$$

среди которых есть и геодезическая. Напомним, что структурные функции a допускают разложение (18'), поэтому получаем (37). ■

Система уравнений (37) является системой уравнений на интегральную кривую векторного поля с компонентами

$$\xi^i = \overline{a}^i_j R^j, \tag{39}$$

где $\overline{a}$ – матрица, обратная к матрице a.

Решения систем вида (37) образуют семейство кривых K_U в окрестности U, которому принадлежит и геодезическая. Поскольку системы (37) отличаются друг от друга на b, то уравнениям геодезической соответствует некоторая матрица a. Для нахождения этой матрицы мы должны воспользоваться тем, что касательный вектор к геодезической переносится параллельно вдоль нее. Эту задачу мы решим предполагая, что окрестность U является нормальной с началом в точке x_0, причем рассматриваемые здесь геодезические проходят через точку x_0. Напомним, что точку x_0 с произвольной точкой $x \in U$ можно соединить единственной геодезической в U. Тогда вычисляя ковариантную производную касательного векторного поля $\dot{x}$ вдоль произвольной геодезической, выходящей из точки x_0, приходим

$$\nabla_{\dot{x}}\xi^i = 0. \tag{40}$$

Структурные функции, соответствующие данному векторному полю мы будем называть *каноническими*. Расписывая равенства (40), получаем

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\xi^l + \Gamma^i_{lm}\xi^l\xi^m = 0. \tag{40$'$}$$

Итак, если нам известны выражения для символов Кристоффеля Γ^i_{jk} согласованной связности в нормальной окрестности U с началом в точке x_0 G-пространства M, то по уравнениям (40$'$) мы определяем компоненты векторного поля ξ, от которых затем приходим к каноническим структурным функциям a.

Теорема 8. *Для того, чтобы структурные функции a были каноническими, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$\frac{\partial b^j_i}{\partial x^l}\overline{a}^l_k + \frac{\partial b^j_k}{\partial x^l}\overline{a}^l_i - \frac{\partial p^j_s}{\partial x^l}b^s_i\overline{a}^l_k - \frac{\partial p^j_s}{\partial x^l}b^s_k\overline{a}^l_i = 0. \tag{41}$$

Доказательство. Ноебходимость. Подставим символы Кристоффеля

$$\Gamma^q_{ki} = \overline{a}^q_n \overline{b}^n_j \frac{\partial b^j_m}{\partial x^k} a^m_i - \frac{\partial \overline{a}^q_j}{\partial x^k} a^j_i - \overline{a}^q_n \overline{b}^n_j \frac{\partial p^j_l}{\partial x^k} b^l_m a^m_i$$

в $(40')$. После несложных рассуждений, приходим:

$$\frac{\partial b^j_i}{\partial x^l} \xi^l R^i - \frac{\partial p^j_s}{\partial x^l} b^s_i \xi^l R^i = 0.$$

Дифференцируя дважды по параметрам $R^1,...,R^n$, получаем (41). Достаточность проверяется подстановкой (41) в левую часть выражения (40’). ■

В двумерном случае система (41) записывается так:

$$\frac{\partial b^j_1}{\partial x^l} \overline{a}^l_1 - \frac{\partial p^j_s}{\partial x^l} b^s_1 \overline{a}^l_1 = 0,$$

$$\frac{\partial b^j_2}{\partial x^l} \overline{a}^l_2 - \frac{\partial p^j_s}{\partial x^l} b^s_2 \overline{a}^l_2 = 0,$$

$$\frac{\partial b^j_1}{\partial x^l} \overline{a}^l_2 + \frac{\partial b^j_2}{\partial x^l} \overline{a}^l_1 - \frac{\partial p^j_s}{\partial x^l} b^s_1 \overline{a}^l_2 - \frac{\partial p^j_s}{\partial x^l} b^s_2 \overline{a}^l_1 = 0.$$

В конце этой работы найдем геодезические относительно согласованной связности в нормальной окрестности U некоторых двумерных римановых и гельмгольцевых пространств, но первоначально вычислим им соответствующие векторные поля ξ или что равносильно канонические структурные функции.

1. *Римановы пространства.*

а) *Евклидова плоскость с декартовой системой координат.* Евклидова плоскость образует нормальную координатную окрестность с началом, например, в точке $x = (0,0)$. Если на евклидовой плоскости введены декартовы координаты, то в этих координатах символы Кристоффеля согласованной связности $\Gamma^i_{jk} = 0$. Поэтому для системы $(40')$ имеем:

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}\xi^1 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}\xi^2 = 0, \quad \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1}\xi^1 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2}\xi^2 = 0. \tag{42}$$

Метрический тензор евклидовой плоскости равен:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следовательно структурные функции a принимают вид:

$$a^i_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $\varphi = \varphi(x^1, x^2)$ — произвольная гладкая функция двух переменных (теорема 1.). Тогда решение системы (42) ищем в виде:

$$\xi^1 = R\sin(\varphi - \alpha), \;\; \xi^2 = R\cos(\varphi - \alpha),$$

где R и α — произвольные постоянные. Подставляя эти функции в (42) и интегрирую, приходим:

$$\varphi = c = \text{const},$$

следовательно

$$\xi^1 = R\sin(c-\alpha),\;\; \xi^2 = R\cos(c-\alpha).$$

Тогда канонические структурные функции принимают такой вид:

$$a^i_j = \begin{pmatrix} \cos c & -\sin c \\ \sin c & \cos c \end{pmatrix}.$$

Поэтому система уравнений геодезической имеет вид:

$$\dot{x}^1 = a^1,\;\; \dot{x}^2 = a^2,\quad x^1(0)=0,\;\; x^2(0)=0,$$

значит прямая, проходящая через начало координат является геодезической евклидовой плоскости. Если за начало нормальной окрестности взять любую другую точку, то прямые, проходящие через эту точку являются геодезическими.

б) *Евклидова плоскость с полярной системой координат.* Если на евклидовой плоскости введены полярные координаты, то в этих координатах символы Кристоффеля согласованной связности будут равны: $\Gamma^1_{22} = -x^1$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/x^1$ и нули в оставшихся случаях. Тогда система уравнений ($40'$) принимает вид:

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1}\xi^1 + \frac{\partial\xi^1}{\partial x^2}\xi^2 - x^1\xi^2\xi^2 = 0,\quad \frac{\partial\xi^2}{\partial x^1}\xi^1 + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}\xi^2 + \frac{2}{x^1}\xi^1\xi^2 = 0. \tag{43}$$

Поскольку метрический тензор евклидовой плоскости в полярной системе координат равен:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 \end{pmatrix},$$

то структурные функции a принимают вид:

$$a^i_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -x^1\sin\varphi \\ \sin\varphi & x^1\cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $\varphi = \varphi(x^1, x^2)$ — произвольная гладкая функция. Поэтому решение системы (43) ищем в виде:

$$\xi^1 = R\sin(\varphi-\alpha),\;\; \xi^2 = R\frac{1}{x^1}\cos(\varphi-\alpha),$$

где $R = \mathrm{const}$ и $\alpha = \mathrm{const}$. Подставляя эти функции в (43), а затем переобозначая $\varphi - \alpha \to \varphi$, получаем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\sin\varphi + \frac{1}{x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\cos\varphi - \frac{1}{x^1}\cos\varphi = 0. \tag{$43'$}$$

Интегрируя, приходим к общему решению:

$$\varPhi(\varphi - x^2, x^1\cos(\varphi - x^2)) = 0,$$

где $\varPhi$ — произвольная функция интегрирования. Одной из таких функций является: $\varPhi(u,v) = -\cos u\sin u + v$, то есть $\varphi = x^2 + \arcsin x^1$. Тогда канонические структурные функции принимают такой вид:

$$a^i_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -x^1\sin\varphi \\ \sin\varphi & x^1\cos\varphi \end{pmatrix},$$

где φ — решение уравнения (43'). Для геодезических, проходящих через точку $(0,0)$, согласно (37), имеем следующие дифференциальные уравнения:

$$\dot{x}^1 = R\sin(\varphi-\alpha),\ \ \dot{x}^2 = \frac{R}{x^1}\cos(\varphi-\alpha),\ \ x^1(0)=0,\ x^2(0)=0.$$

в) *Единичная двумерная сфера в сферической системе координат.* Рассмотрим на единичной двумерной сфере нормальную координатную окрестность U, которую образует открытая верхняя полусфера с началом в северном полюсе сферы. Введет в U сферическую систему координат. Тогда начало будет иметь координаты: $(\pi/2,0)$. Метрический тензор сферы в этих координатах принимает такой вид:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 x^1 \end{pmatrix}.$$

Тогда символы Кристоффеля согласованной связности задаются выражениями: $\Gamma^1_{22} = \cos x^1 \sin x^1$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\mathrm{tg} x^1$ и нули в оставшихся случаях. Поэтому система (40') приобретает вид:

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1}\xi^1 + \frac{\partial\xi^1}{\partial x^2}\xi^2 + \cos x^1\sin x^1\xi^2\xi^2 = 0,\ \ \frac{\partial\xi^2}{\partial x^1}\xi^1 + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}\xi^2 - 2\mathrm{tg} x^1\xi^1\xi^2 = 0. \qquad (44)$$

Согласно замечаниям, сделанным в параграфе 2, канонические структурные функции имеют общий вид:

$$a^i_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\cos x^1\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos x^1\cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $\varphi=\varphi(x^1,x^2)$, следовательно решение уравнения (44) ищется в виде:

$$\xi^1 = R\sin(\varphi-\alpha),\ \ \xi^2 = \frac{R}{\cos x^1}\cos(\varphi-\alpha),$$

где R и α — постоянные. Подставляя последнюю систему функций в (44), а затем переобозначая $\varphi-\alpha\to\varphi$, получаем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\sin\varphi + \frac{1}{\cos x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\cos\varphi + \mathrm{tg} x^1\cos\varphi = 0. \qquad (44')$$

Интегрируя, приходим к общему решению:

$$\mathit{\Phi}\left(\cos x^1\cos\varphi, x^2 + \arcsin\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\cos^2 x^1\cos^2\varphi}}\right) = 0,$$

где $\mathit{\Phi}$ — произвольная функция интегрирования. Тогда канонические структурные функции принимают такой вид:

$$a^i_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\cos x^1\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos x^1\cos\varphi \end{pmatrix},$$

где φ — уже решение уравнения (44').

Для геодезических в нормальной окрестности U, проходящих через начало, согласно (37), имеем следующие дифференциальные уравнения:

$$\dot{x}^1 = R\sin(\varphi-\alpha),\ \ \dot{x}^2 = \frac{R}{\cos x^1}\cos(\varphi-\alpha),\ \ \ x^1(\pi/2)=0,\ \ \ x^2(0)=0.$$

Для того, чтобы получить семейство геодезических, проходящих через другую точку единичной сферы, сначала выбераем подходящую нормальную координатную окрестность, которой может быть открытая полусфера с центном в этой точке, затем находятся канонические структурные функции, по которым выписываются уравнения геодезических.

2. *Гельмгольцевы плоскости.* Рассмотрим собственно гельмгольцеву, псевдогельмгольцеву, дуальногельмгольцеву и симплициальную плоскость F^2. Нормальной координатной окрестностью является вся плоскость, в которой введена специальная система координат, оговоренная в начале статьи. В качестве центра нормальной окрестности возьмем начало $(0, 0)$. Тогда

$$df^2 = [(dx^1)^2 - \varepsilon(dx^2)^2] \exp\ 2\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{dx^2}{dx^1}\right)$$

и

$$f = \frac{dx^2}{dx^1},$$

следовательно структурные функции приобретают такой вид:

$$a^i_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi\exp(-\gamma\varphi) & -\sin\varphi\exp(-\gamma\varphi) \\ \sin\varphi\exp(-\gamma\varphi) & \cos\varphi\exp(-\gamma\varphi) \end{pmatrix},$$

$$a^i_j = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi\exp(-\beta\varphi) & \mathrm{sh}\varphi\exp(-\beta\varphi) \\ \mathrm{sh}\varphi\exp(-\beta\varphi) & \mathrm{ch}\varphi\exp(-\beta\varphi) \end{pmatrix},$$

$$a^i_j = \begin{pmatrix} \exp(-\varphi) & 0 \\ \varphi\exp(-\varphi) & \exp(-\varphi) \end{pmatrix}$$

и

$$a^i_j = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$$

соответственно, где $\varphi = \varphi(x^1, x^2)$ — произвольная гладкая функция.

Несложно показать, что в выше определенной системе координат в F^2 символы Кристоффеля согласованной связности $\Gamma^i_{jk} = 0$. Поэтому (40') совпадает с (42). Тогда решение этой системы ищем в виде:

для собственно гельмгольцевой плоскости Γ^2:

$$\xi^1 = R\sin(\varphi-\alpha)\exp(-\gamma(\varphi-\alpha)),\ \ \xi^2 = R\cos(\varphi-\alpha)\exp(-\gamma(\varphi-\alpha));$$

для псевдогельмгольцевой плоскости $P\Gamma^2$:

$$\xi^1 = R\mathrm{sh}(\varphi-\alpha)\exp(-\beta(\varphi-\alpha)),\ \ \xi^2 = R\mathrm{ch}(\varphi-\alpha)\exp(-\beta(\varphi-\alpha));$$

для дуальногельмгольцевой плоскости D^2:

$$\xi^1 = R\exp(-(\varphi-\alpha)),\ \ \xi^2 = R(\varphi-\alpha)\exp(-(\varphi-\alpha));$$

для симплициальной плоскости S^2:

$$\xi^1 = R^1\varphi,\ \ \xi^2 = R^2\varphi,$$

где R, α, R^1, R^2 — произвольные постоянные. Подставляя эти функции в (42) и интегрируя, получаем:

$$\varphi = c = \mathrm{const},$$

следовательно канонические структурные функции принимают вид:

для собственно гельмгольцевой плоскости Γ^2:

$$a^i_j = \begin{pmatrix} \cos c \exp(-\gamma c) & -\sin c \exp(-\gamma c) \\ \sin c \exp(-\gamma c) & \cos c \exp(-\gamma c) \end{pmatrix};$$

для псевдогельмгольцевой плоскости $P\Gamma^2$:

$$a^i_j = \begin{pmatrix} \mathrm{ch} c \exp(-\beta c) & \mathrm{sh} c \exp(-\beta c) \\ \mathrm{sh} c \exp(-\beta c) & \mathrm{ch} c \exp(-\beta c) \end{pmatrix};$$

для дуальногельмгольцевой плоскости D^2:

$$a^i_j = \begin{pmatrix} \exp(-c) & 0 \\ c \exp(-c) & \exp(-c) \end{pmatrix}$$

и, наконец, для симплициальной плоскости S^2:

$$a^i_j = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Поэтому система уравнений геодезической имеет вид:

$$\dot{x}^1 = a^1, \ \dot{x}^2 = a^2, \quad x^1(0) = 0, \ x^2(0) = 0,$$

значит прямая, проходящая через начало координат плоскости F^2 является геодезической. Если за начало нормальной окрестности взять любую другую точку, то прямые, проходящие через эту точку являются также геодезическими.

Итак, в данной работе вычислены символы Кристоффеля согласованной связности в координатной окрестности U с локальной группой голономии $\Xi_x(U)$ и проинтегрированы уравнения на геодезическую в общем виде в нормальной окрестности относительно произвольной системы координат G - пространства.

Список литературы

[1] Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии, т. 1. М.: "Наука", 1981г.

[2] В.А. Кыров. Двумерные гельмгольцевы многообразия.// "Динамика сплошной среды", сб. трудов, выпуск 118, стр. 53 – 57, Новосибирск, 2001г.

[3] Г.Г. Михайличенко. Полиметрические геометрии. Новосибирск, 2001г.

[4] В.А. Кыров. Двумерные римановы и гельмгольцевы многообразия.// Труды по геометрии и анализу, Новосибирск, 2003г., стр. 312 – 323.

[5] С. Стернберг. Лекции по дифференциальной геометрии. М.:"Мир", 1970г.

[6] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. М.: "Наука", 1979г.

[7] П.К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: "Наука", 1967г.

[8] М.М. Постников. Лекции по геометрии, т.4. Гладкие многообразия. М.: "Наука", 1988г.