В.А. Кыров

Классификация четыреметрических физических структур ранга (2,2)

В теории физических структур исключительно важное значение имеет классификация невырожденных метрических функций, задающих эти структуры. Метрическая функция, согласно теореме об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий, доказаной Г.Г.Михайличенко [3,4], является двухточечным инвариантом некоторой локальной группы Ли преобразований. Согласно этой теореме для нахождения всех метрических функций достаточно построить полную классификацию локальных групп Ли преобразований многообразий определенной размерности. В данной работе проводится полная классификация четырехмерных алгебр Ли локально просто транзитивных групп Ли преобразований пространства R^4, а затем находятся все метрические функции как невырожденные двухточечные инварианты.

1. Четырехмерные алгебры Ли. Базисные операторы четырехмерной алгебры Ли локальной группы Ли преобразований пространства R^4 имеют вид:

$$X_\mu = \lambda_\mu(x,y,z,w)\partial_x + \sigma_\mu(x,y,z,w)\partial_y + \tau_\mu(x,y,z,w)\partial_z + \theta_\mu(x,y,z,w)\partial_w, \qquad (1)$$

где $\mu = 1,2,3,4$, причем $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_z = \partial/\partial z$, $\partial_w = \partial/\partial w$. Нас будут интересовать только локально транзитивные группы Ли преобразований пространства R^4. Как хорошо известно, необходимым и достаточным условием локальной транзитивности группы Ли преобразований является отличие от нуля определителя матрицы коэффициентов в выражениях (1) для операторов X_μ:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \sigma_1 & \tau_1 & \theta_1 \\ \lambda_2 & \sigma_2 & \tau_2 & \theta_2 \\ \lambda_3 & \sigma_3 & \tau_3 & \theta_3 \\ \lambda_4 & \sigma_4 & \tau_4 & \theta_4 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2)$$

Коммутаторы базисных операторов алгебры Ли линейно выражаются через них же [1]. С точностью до изоморфизма коммутаторы $[X_1,X_2]$, $[X_3,X_1]$, $[X_2,X_3]$, $[X_1,X_4]$, $[X_2,X_4]$, $[X_3,X_4]$ четырехмерных вещественных алгебр Ли задаются соответственно следующими выражениями [2,3]:

$$0,\ 0,\ 0,\ \varepsilon X_1,\ kX_2,\ lX_3; \qquad (3)$$

$$0,\ 0,\ 0,\ kX_1+X_2,\ -X_1+kX_2,\ lX_3; \qquad (4)$$

$$0,\ 0,\ 0,\ kX_1+X_2,\ kX_2,\ \varepsilon X_3; \qquad (5)$$

$$0,\ 0,\ 0,\ kX_1+X_2,\ kX_2+X_3,\ \varepsilon X_3; \qquad (6)$$

$$0,\ 0,\ X_1,\ cX_1,\ X_2,\ (c-1)X_3; \tag{7}$$

$$0,\ 0,\ X_1,\ 2X_1,\ X_2,\ X_2+X_3; \tag{8}$$

$$0,\ 0,\ X_1,\ qX_1,\ X_3,\ -X_2+qX_3; \tag{9}$$

$$0,\ -X_1,\ 0,\ 0,\ X_2,\ 0; \tag{10}$$

$$0,\ -X_1,\ X_2,\ X_2,\ -X_1,\ 0; \tag{11}$$

$$X_3,\ X_2,\ X_1,\ 0,\ 0,\ 0; \tag{12}$$

$$X_3,\ X_2,\ -X_1,\ 0,\ 0,\ 0, \tag{13}$$

где $\varepsilon = 0, 1$; $q^2 < 4$; k, l, c – произвольные числа.

Заметим, что по сравнению с [2] здесь в алгебрах (10) и (13) произведен переход к другому базису (в алгебре (10) была осуществленна только перестановка операторов X_1 и X_2, а в алгебре (13) переход к новому базису был следующий: $(X_1+X_3)/2 \to X_1$, $X_2 \to X_2$, $(X_1-X_3)/2 \to X_3$, $X_4 \to X_4$. Этот переход к другим базисам в алгебрах Ли был предложен Г.Г. Михайличенко [3] для удобства классификации их представлений инфинитезимальными операторами.

В дальнейших рассуждениях нам понадобится утверждение, доказательство которого можно найти, например, в [1]:

Теорема 1. *Пусть имеется r-мерная вещественная алгебра Ли с базисом $X_1, ..., X_r$ и следующей структурой коммутационных соотношений в этом базисе: $[X_\beta, X_\gamma] = C^\alpha_{\beta\gamma} X_\alpha$, где $\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., r$, причем α – немой индекс суммирования, и $C^\alpha_{\beta\gamma}$ – так называемые структурные константы. Подпространство размерности s с базисом $X_1, ..., X_s$ является подалгеброй r-мерной алгебры Ли тогда и только тогда, когда $C^{\alpha''}_{\beta'\gamma'} = 0$, где $\beta', \gamma' = 1, ..., s$; $\alpha'' = s+1, ..., r$, и идеалом – тогда и только тогда, когда $C^{\alpha''}_{\beta'\gamma} = 0$, где $\beta' = 1, ..., s$; $\alpha'' = s+1, ..., r$; $\gamma = 1, ..., r$.*

Сформулированная выше теорема позволяет выделить в четырехмерных алгебрах Ли (3) – (13) трехмерные подалгебры. Запишем соответствующие выражения для трех возможных коммутаторов $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_1]$, $[X_2, X_3]$ базисных операторов X_1, X_2, X_3 этих подалгебр:

$$0,\ 0,\ 0; \tag{14}$$

$$0,\ 0,\ X_1; \tag{15}$$

$$0,\ -X_1,\ X_2; \tag{16}$$

$$0,\ -X_1,\ 0; \tag{17}$$

$$X_3,\ X_2,\ X_1; \tag{18}$$

$$X_3,\ X_2,\ -X_1. \tag{19}$$

Заметим, что алгебры (3) – (6) содержат подалгебру (14), алгебры (7) – (9) – подалгебру (15), алгебра (10) – подалгебру (17), алгебра (11) – подалгебру (16) и, наконец, алгебры (12) и (13) – подалгебры (18) и (19) соответственно. Перейдем теперь к рассмотрению локально транзитивных групп Ли преобразований пространства R^4.

Лемма 1. *Если четырехмерная алгебра Ли локально транзитивной группы Ли преобразований пространства R^4 содержит трехмерную подалгебру, то эта подалгебра эквивалентна трехмерной алгебре Ли локально транзитивной группы Ли преобразований пространства R^3.*

Под эквивалентностью в данном случае понимается возможность перехода базисных операторов одной алгебры в соответствующие базисные операторы другой при некоторой локально обратимой замене координат.

Рассмотрим отдельно четыре следующих случая: трехмерная подалгебра эквивалентна трехмерной алгебре Ли преобразований пространств R^1, R^2, R^3 и R^4 соответственно.

Первый случай. Подалгебра эквивалентна трехмерной алгебре Ли преобразований прямой R^1 и потому базисные операторы в подходящей системе координат имеют вид:

$$X_\mu = \lambda_\mu \partial_x,\ X_4 = \lambda_4 \partial_x + \sigma_4 \partial_y + \tau_4 \partial_z + \theta_4 \partial_w,$$

где $\lambda_\mu = \lambda_\mu(x)$, $\mu = 1, 2, 3$, причем первые три оператора составляют базис трехмерной подалгебры. Очевидно, что в данном случае определитель (2), составленный из коэффициентов этих операторов, будет равен нулю и потому исходная группа преобразований, в противоречие с предположением леммы 1, не может быть локально транзитивной.

Второй случай. Подалгебра эквивалентна трехмерной алгебре Ли преобразований плоскости R^2 и поэтому в подходящей системе координат для базисных операторов имеем следующие выражения:

$$X_\mu = \lambda_\mu \partial_x + \sigma_\mu \partial_y,\ X_4 = \lambda_4 \partial_x + \sigma_4 \partial_y + \tau_4 \partial_z + \theta_4 \partial_w,$$

где $\lambda_\mu = \lambda_\mu(x, y)$, $\sigma_\mu = \sigma_\mu(x, y)$, $\mu = 1, 2, 3$. Очевидно, что и в этом случае определитель (2) обращается в нуль, что противоречит предположению леммы 1 о локальной транзитивности группы Ли преобразований всего пространства R^4.

Третий случай. Подалгебра является трехмерной алгеброй Ли преобразований пространства R^3, поэтому базисные операторы в некоторой системе координат имеют следующий вид:

$$X_\mu = \lambda_\mu \partial_x + \sigma_\mu \partial_y + \tau_\mu \partial_z,\ X_4 = \lambda_4 \partial_x + \sigma_4 \partial_y + \tau_4 \partial_z + \theta_4 \partial_w,$$

где $\lambda_\mu = \lambda_\mu(x, y, z)$, $\sigma_\mu = \sigma_\mu(x, y, z)$, $\tau_\mu = \tau_\mu(x, y, z)$, $\mu = 1, 2, 3$. Определитель левой части условия (2) разложим по элементам четвертого столбца:

$$\theta_4 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \sigma_1 & \tau_1 \\ \lambda_2 & \sigma_2 & \tau_2 \\ \lambda_3 & \sigma_3 & \tau_3 \end{vmatrix}.$$

Из условия (2) следует, что определитель третьего порядка полученного разложения отличен от нуля, т.е. соответствующая группа преобразований R^3 локально транзитивна.

Четвертый случай. Пусть подалгебра является трехмерной алгеброй Ли преобразований пространства R^4. Тогда соответствующая ей группа Ли преобразований действует интранзитивно в пространсве R^4, причем инвариантное многообразие является или одномерным, или двумерным, или трехмерным, то есть мы приходим к предыдущим трем случаям. Таким образом, искомая трехмерная подалгебра эквивалентна некоторой трехмерной алгебре Ли локально транзитивной группы Ли преобразований R^3.

Ниже нам понадобятся выражения для базисных операторов трехмерной алгебры Ли локально транзитивной группы Ли преобразований пространства R^3 [4, 9]:

для алгебры (14):

$$X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = \partial_y, \;\; X_3 = \partial_z; \tag{20}$$

для алгебры (15):

$$X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = \partial_y, \;\; X_3 = y\partial_x + \partial_z; \tag{21}$$

для алгебры (17):

$$X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = \partial_y, \;\; X_3 = x\partial_x + \partial_z; \tag{22}$$

для алгебры (16):

$$X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = \partial_y, \;\; X_3 = x\partial_x + y\partial_y + \partial_z; \tag{23}$$

для алгебры (18):

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = tgy \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \sec y \sin x\partial_z, \\ X_3 = tgy \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \sec y \cos x\partial_z; \end{array}\right\} \tag{24}$$

для алгебры (19):

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \exp y \sin x\partial_z, \\ X_3 = \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \exp y \cos x\partial_z. \end{array}\right\} \tag{25}$$

2. Классификация четырехмерных алгебр Ли локально транзитивных групп Ли преобразований пространства R^4. В R^4 можно менять системы локальных координат, не изменяя при этом структуру коммутационных соотношений. Учитывая выше доказанную лемму и классификацию (20)–(25), которая проведена с точностью до эквивалентности, то есть замен координат в пространстве R^3, приходим к следующим выражениям для базисных операторов X_1, X_2, X_3, X_4 четырехмерных алгебр Ли (3)–(13) локально транзитивных групп Ли преобразований пространства R^4:

для алгебр (3)–(6):

$$X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = \partial_y, \;\; X_3 = \partial_z, \;\; X_4 = \lambda_4\partial_x + \sigma_4\partial_y + \tau_4\partial_z + \theta_4\partial_w; \tag{26}$$

для алгебр (7)–(9):

$$X_1 = \partial_x,\ \ X_2 = \partial_y,\ \ X_3 = y\partial_x + \partial_z,\ \ X_4 = \lambda_4\partial_x + \sigma_4\partial_y + \tau_4\partial_z + \theta_4\partial_w; \qquad (27)$$

для алгебры (10):

$$X_1 = \partial_x,\ \ X_2 = \partial_y,\ \ X_3 = x\partial_x + \partial_z,\ \ X_4 = \lambda_4\partial_x + \sigma_4\partial_y + \tau_4\partial_z + \theta_4\partial_w; \qquad (28)$$

для алгебры (11):

$$X_1 = \partial_x,\ \ X_2 = \partial_y,\ \ X_3 = x\partial_x + y\partial_y + \partial_z,\ \ X_4 = \lambda_4\partial_x + \sigma_4\partial_y + \tau_4\partial_z + \theta_4\partial_w; \qquad (29)$$

для алгебры (12):

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x,\ \ X_2 &= tgy\sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \sec y\sin x\partial_z,\\ X_3 &= tgy\cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \sec y\cos x\partial_z,\\ X_4 &= \lambda_4\partial_x + \sigma_4\partial_y + \tau_4\partial_z + \theta_4\partial_w; \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

для алгебры (13):

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x,\ \ X_2 &= \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \exp y\sin x\partial_z,\\ X_3 &= \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \exp y\cos x\partial_z,\\ X_4 &= \lambda_4\partial_x + \sigma_4\partial_y + \tau_4\partial_z + \theta_4\partial_w. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

где, например, $\lambda_4 = \lambda_4(x, y, z, w)$.

Теорема 2. *Базисные операторы X_1, X_2, X_3, X_4 четырехмерных алгебр Ли с коммутационными соотношениями (3)–(13) локально транзитивных групп Ли преобразований пространства R^4 в надлежаще выбранной системе локальных координат задаются следующими выражениями:*

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ \partial_z,\ \ \varepsilon x\partial_x + ky\partial_y + lz\partial_z + \partial_w; \qquad (32)$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ \partial_z,\ \ (kx - y)\partial_x + (x + ky)\partial_y + lz\partial_z + \partial_w; \qquad (33)$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ \partial_z,\ \ kx\partial_x + (x + ky)\partial_y + \varepsilon z\partial_z + \partial_w; \qquad (34)$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ \partial_z,\ \ kx\partial_x + (x + ky)\partial_y + (y + \varepsilon z)\partial_z + \partial_w; \qquad (35)$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ y\partial_x + \partial_z,\ \ cx\partial_x + y\partial_y + (c - 1)z\partial_z + \partial_w; \qquad (36)$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ y\partial_x + \partial_z,\ \ (2x + z^2/2)\partial_x + (y + z)\partial_y + z\partial_z + \partial_w; \qquad (37)$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ y\partial_x + \partial_z,\ \ (qx + y^2/2 - z^2/2)\partial_x - z\partial_y + (y + qz)\partial_z + \partial_w; \qquad (38)$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ x\partial_x + \partial_z,\ \ y\partial_y + \partial_w; \qquad (39)$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ x\partial_x + y\partial_y + \partial_z,\ \ -y\partial_x + x\partial_y + \partial_w; \qquad (40)$$

$$\partial_x,\ \ tgy\sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \sec y\sin x\partial_z,\ \ tgy\cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \sec y\cos x\partial_z,\ \ \partial_w; \qquad (41)$$

$$\partial_x,\ \ \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \exp y\sin x\partial_z,\ \ \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \exp y\cos x\partial_z,\ \ \partial_w, \qquad (42)$$

где $\varepsilon = 0, 1$; k, l, q — произвольные постоянные.

В R^4 перейдем к новой системе локальных координат:

$$\xi=\varphi_1(x,y,z,w),\ \ \eta=\varphi_2(x,y,z,w),\ \ \zeta=\varphi_3(x,y,z,w),\ \ \kappa=\varphi_4(x,y,z,w). \qquad (43)$$

Рассмотрим операторы (26). Легко установить, что первые три оператора после замены координат (43) сохранят свою форму, при следующих ограничениях на функции этой замены:

$$\varphi_{1x}=1,\ \varphi_{2x}=0,\ \varphi_{3x}=0,\ \varphi_{4x}=0,\ \ \varphi_{1y}=0,\ \varphi_{2y}=1,\ \varphi_{3y}=0,$$
$$\varphi_{4y}=0,\ \ \varphi_{1z}=0,\ \varphi_{2z}=0,\ \varphi_{3z}=1,\ \varphi_{4z}=0.$$

Интегрируя, приходим к формулам допустимой замены координат

$$\xi=x+\varphi_1(w),\ \ \eta=y+\varphi_2(w),\ \ \zeta=z+\varphi_3(w),\ \ \kappa=\varphi_4(w),\ \ \varphi_4'\neq 0. \qquad (44)$$

Подставляя базисные операторы (26) в коммутационные соотношения алгебры (3) и приравнивая коэффициенты перед независимыми операторами ∂_x, ∂_y, ∂_z, ∂_w справа и слева, приходим к дифференциальным уравнениям: $\lambda_{4x}=\varepsilon$, $\sigma_{4x}=0$, $\tau_{4x}=0$, $\theta_{4x}=0$; $\lambda_{4y}=0$, $\sigma_{4y}=k$, $\tau_{4y}=0$, $\theta_{4y}=0$; $\lambda_{4z}=0$, $\sigma_{4z}=0$, $\tau_{4z}=l$, $\theta_{4z}=0$. После их интегрирования находим четвертый оператор системы (26):

$$X_4=(\varepsilon x+\lambda_4(w))\partial_x+(ky+\sigma_4(w))\partial_y+(lz+\tau_4(w))\partial_z+\theta_4(w)\partial_w,\ \ \theta_4'\neq 0.$$

Произведем в этом выражении допустимую замену координат (44):

$$(\varepsilon x+\lambda_4+\theta_4\varphi_{1w})\partial_\xi+(ky+\sigma_4+\theta_4\varphi_{2w})\partial_\eta+(lz+\tau_4(w)+\theta_4\varphi_{3w})\partial_\zeta+\theta_4\varphi_{4w}\partial_\kappa.$$

Функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 возьмем из решения следующей системы дифференциальных уравнений: $\lambda_4+\theta_4\varphi_{1w}=\varepsilon\varphi_1$, $\sigma_4+\theta_4\varphi_{2w}=k\varphi_2$, $\tau_4+\theta_4\varphi_{3w}=l\varphi_3$, $\theta_4\varphi_{4w}=1$. Тогда имеем $X_4=\varepsilon\xi\partial_\xi+k\eta\partial_\eta+l\zeta\partial_\zeta+\partial_\kappa$ и, возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (32) алгебры Ли (3) локально транзитивной группы Ли преобразований пространства R^4.

Для алгебр Ли (4)–(6) аналогично получаем выражения (33)–(35).

Рассмотрим теперь систему четырех операторов (27) и выясним предварительно, при каких ограничениях на функции общей замены координат (43) сохраняют свою форму первые три оператора. Оказывается, эти функции должны быть решениями следующих уравнений:

$$\varphi_{1x}=1,\ \varphi_{2x}=0,\ \varphi_{3x}=0,\ \varphi_{4x}=0,\ \ \varphi_{1y}=0,\ \varphi_{2y}=1,\ \varphi_{3y}=0,\ \varphi_{4y}=0,$$
$$y+\varphi_{1z}=\varphi_2,\ \varphi_{2z}=0,\ \varphi_{3z}=1,\ \varphi_{4z}=0,$$

интегрируя которые приходим к формулам допустимой замены координат:

$$\xi=x+\varphi_2(w)z+\varphi_1(w),\ \ \eta=y+\varphi_2(w),\ \ \zeta=z+\varphi_3(w),\ \ \kappa=\varphi_4(w),\ \ \varphi_4'\neq 0. \quad (45)$$

Подставим операторы (27) в коммутационные соотношения алгебры (7) и приравняем коэффициенты перед независимыми операторами ∂_x, ∂_y, ∂_z, ∂_w слева и справа. В результате приходим к дифференциальным уравнениям $\lambda_{4x} = c$, $\sigma_{4x} = 0$, $\tau_{4x} = 0$, $\theta_{4x} = 0$; $\lambda_{4y} = 0$, $\sigma_{4y} = 1$, $\tau_{4y} = 0$, $\theta_{4y} = 0$; $y\lambda_{4x} + \lambda_{4z} - \sigma_4 = (c-1)y$, $y\sigma_{4x} + \sigma_{4z} = 0$, $y\tau_{4x} + \tau_{4z} = c-1$, $y\theta_{4x} + \theta_{4z} = 0$, интегрируя которые для оператора X_4 получаем выражение

$$(x + z\sigma_4(w) + \lambda_4(w))\partial_x + (y + \sigma_4(w))\partial_y + ((c-1)z + \tau_4(w))\partial_z + \theta_4(w)\partial_w,\ \theta_4' \neq 0,$$

после чего в нем произведем допустимую замену координат (45):

$$X_4 = (cx + \sigma_4 z + \lambda_4 + ((c-1)z + \tau_4)\varphi_2 + \theta_4(\varphi_{2w}z + \varphi_{1w}))\partial_\xi +$$
$$+(y + \sigma_4 + \theta_4\varphi_{2w})\partial_\eta + ((c-1)z + \tau_4 + \theta_4\varphi_{3w})\partial_\zeta + \theta_4\varphi_{4w}\partial_\kappa.$$

Если функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 взять из решений системы уравнений $\lambda_4 + \tau_4\varphi_2 + \theta_4\varphi_{1w} = c\varphi_1$, $\sigma_4 + \theta_4\varphi_{2w} = \varphi_2$, $\tau_4 + \theta_4\varphi_{3w} = (c-1)\varphi_3$, $\theta_4\varphi_{4w} = 1$, то $X_4 = c\xi\partial_\xi + \eta\partial_\eta + (c-1)\zeta\partial_\zeta + \partial_\kappa$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, приходим к выражениям (36).

Аналогичные рассуждения в отношении алгебр Ли (8) и (9) приводят к выражениям (37) и (38) соответственно.

Для системы операторов (28) найдем ограничения на функции общей замены координат (43), при которой первые три операторы сохраняют свою форму. Легко устанавливается, что должны иметь место следующие уравнения:

$$\varphi_{1x} = 1,\ \varphi_{2x} = 0,\ \varphi_{3x} = 0,\ \varphi_{4x} = 0,\ \varphi_{1y} = 0,\ \varphi_{2y} = 1,\ \varphi_{3y} = 0,\ \varphi_{4y} = 0,$$
$$x + \varphi_{1z} = \varphi_1,\ \varphi_{2z} = 0,\ \varphi_{3z} = 1,\ \varphi_{4z} = 0,$$

решая которые находим эту допустимую замену координат:

$$\xi = x + \varphi_1(w)e^z,\ \ \eta = y + \varphi_2(w),\ \ \zeta = z + \varphi_3(w),\ \ \kappa = \varphi_4(w),\ \varphi_4' \neq 0 \qquad (46)$$

Подставим операторы (28) в коммутационные соотношения алгебры (10) и приравняем коэффициенты перед независимыми операторами ∂_x, ∂_y, ∂_z, ∂_w слева и справа. В результате приходим к системе дифференциальных уравнений: $\lambda_{4x} = 0$, $\sigma_{4x} = 0$, $\tau_{4x} = 0$, $\theta_{4x} = 0$; $\lambda_{4y} = 0$, $\sigma_{4y} = 1$, $\tau_{4y} = 0$, $\theta_{4y} = 0$; $x\lambda_{4x} + \lambda_{4z} - \lambda_4 = 0$, $x\sigma_{4x} + \sigma_{4z} = 0$, $x\tau_{4x} + \tau_{4z} = 0$, $z\theta_{4x} + \theta_{4z} = 0$, интегрируя которые для оператора X_4 получаем следующее выражение:

$$\lambda_4(w)e^z\partial_x + (y + \sigma_4(w))\partial_y + \tau_4(w)\partial_z + \theta_4(w)\partial_w,\ \theta_4' \neq 0,$$

в котором затем поизведем допустимую замену координат (46):

$$(\lambda_4 e^z + \tau_4 e^z\varphi_1 + \theta_4 e^z\varphi_{1w})\partial_\xi + (y + \sigma_4 + \theta_4\varphi_{2w})\partial_\eta + (\tau_4 + \theta_4\varphi_{3w})\partial_\zeta + \theta_4\varphi_{4w}\partial_\kappa.$$

Если функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 взять из решений системы уравнений $\lambda_4 + \tau_4\varphi_1 + \theta_4\varphi_{1w} = 0$, $\sigma_4 + \theta_4\varphi_{2w} = \varphi_2$, $\tau_4 + \theta_4\varphi_{3w} = 0$, $\theta_4\varphi_{4w} = 1$, то $X_4 = \eta\partial_\eta + \partial_\kappa$, и после возвращения к прежним обозначениям координат получаем операторы (39).

Найдем такую общую замену координат (43), при которой сохранят форму первые три оператора системы (29). Нетрудно проверить, что должны выполняться уравнения

$$\varphi_{1x}=1,\ \varphi_{2x}=0,\ \varphi_{3x}=0,\ \varphi_{4x}=0,\ \ \varphi_{1y}=0,\ \varphi_{2y}=1,\ \varphi_{3y}=0,\ \varphi_{4y}=0,$$
$$x+\varphi_{1z}=\varphi_1,\ y+\varphi_{2z}=\varphi_2,\ \varphi_{3z}=1,\ \varphi_{4z}=0,$$

интегрируя которые, находим допустимую замену координат:

$$\xi=x+\varphi_1(w)e^z,\ \ \eta=y+\varphi_2(w)e^z,\ \ \zeta=z+\varphi_3(w),\ \ \kappa=\varphi_4(w),\ \varphi_4'\neq 0. \tag{47}$$

Подставляя, как обычно, операторы (29) в коммутационные соотношения для алгебры (11), приходим к уравнениям $\lambda_{4x}=0$, $\sigma_{4x}=1$, $\tau_{4x}=0$, $\theta_{4x}=0$; $\lambda_{4y}=-1$, $\sigma_{4y}=0$, $\tau_{4y}=0$, $\theta_{4y}=0$; $x\lambda_{4x}+y\lambda_{4y}+\lambda_{4z}-\lambda_4=0$, $x\sigma_{4x}+y\sigma_{4y}+\sigma_{4z}-\sigma_4=0$, $x\tau_{4x}+y\tau_{4y}+\tau_{4z}=0$, $z\theta_{4x}+y\theta_{4y}+\theta_{4z}=0$ и, после их интегрирования, к выражению для четвертого оператора:

$$X_4=(-y+\lambda_4(w)e^z)\partial_x+(x+\sigma_4(w)e^z)\partial_y+\tau_4(w)\partial_z+\theta_4(w)\partial_w,\ \theta_4'\neq 0,$$

в котором произведем допустимую замену координат (47):

$$X_4=(-y+\lambda_4e^z+\tau_4e^z\varphi_1+\theta_4e^z\varphi_{1w})\partial_\xi+$$
$$+(x+\sigma_4e^z+\tau_4e^z\varphi_2+\theta_4e^z\varphi_{2w})\partial_\eta+(\tau_4+\theta_4\varphi_{3w})\partial_\zeta+\theta_4\varphi_{4w}\partial_\kappa.$$

Пусть функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 являются решениями системы уравнений $\lambda_4+\tau_4\varphi_1+\theta_4\varphi_{1w}=-\varphi_2$, $\sigma_4+\tau_4\varphi_2+\theta_4\varphi_{2w}=\varphi_1$, $\tau_4+\theta_4\varphi_{3w}=0$, $\theta_4\varphi_{4w}=1$. Тогда $X_4=-\eta\partial_\xi+\xi\partial_\eta+\partial_\kappa$ и, после возвращения к прежним обозначениям координат, получаем выражения (40) для базисных операторов алгебры Ли (11).

Найдем, наконец, выражения для базисных операторов алгебр Ли (12) и (13). Нетрудно убедиться в том, что эти алгебры представимы в виде прямой суммы идеалов J_1 и J_2. В алгебре (12) идеал J_1 порождается операторами: $X_1,\ X_2,\ X_3$, причем $[X_1,X_2]=X_3,\ [X_3,X_1]=X_2,\ [X_2,X_3]=X_1$, а идеал J_2 – оператором X_4. В алгебре (13) идеал J_1 порождается операторами: $X_1,\ X_2,\ X_3$, причем $[X_1,X_2]=X_3,\ [X_3,X_1]=X_2,\ [X_2,X_3]=-X_1$, а идеал J_2 – оператором X_4.

Сопоставляя идеалы J_1 и J_2 с трехмерными и одномерными алгебрами Ли групп Ли преобразований пространств R^3 и R^1, заключаем, что они изоморфны алгебрам Ли некоторых локально транзитивных групп Ли преобразований этих пространств.

Рассмотрим касательное пространство $T_a(R^4)$ к многообразию R^4 в точке a. Разобьем это пространство на два дополнительных друг к другу подпространства $\Delta_a(1)$ и $\Delta_a(2)$, то есть $T_a(R^4)=\Delta_a(1)\oplus\Delta_a(2)$ так, чтобы $(X_1)_a,(X_2)_a,(X_3)_a\in\Delta_a(1)$, а $(X_4)_a\in\Delta_a(2)$. Из локальной транзитивности групп преобразований следует, что векторы $(X_1)_a,(X_2)_a,(X_3)_a$ и $(X_4)_a$ образуют базисы подпространств $\Delta_a(1)$ и $\Delta_a(2)$ соответственно, а все четыре — базис пространства $T_a(R^4)$. В окрестности точки a эти векторы включаются в гладкие векторные поля X_1, X_2, X_3 и X_4. Поэтому в окрестности точки a многообразия R^4 мы приходим к дополнительным друг к другу гладким распределениям $\Delta(1)$ и $\Delta(2)$. Поскольку J_1 и J_2 являются идеалами, то распределения $\Delta(1)$ и $\Delta(2)$ инволютивны. Ниже воспользуемся утверждением, доказательство которого можно найти в книге [4].

Если T' и T'' – два инволютивных распределения на n-мерном многообразии M, дополнительные всюду на M, то для каждой точки из M существует локальная система координат $x^1, ..., x^n$ с началом в этой точке такая, что $(\partial_{x^1}, ..., \partial_{x^k})$ и $(\partial_{x^{k+1}}, ..., \partial_{x^n})$ образуют локальный базис для T' и T'' соответственно.

Произвольная точка $a \in R^4$ принадлежит интегральным многообразиям $\delta(1)$ и $\delta(2)$ распределений $\Delta(1)$ и $\Delta(2)$, в которых транзитивно действуют локальные группы Ли преобразований с алгебрами Ли J_1 и J_2. Из последнего утверждения следует, что в точке a можно ввести такую локальную систему координат, чтобы первые три коодинаты были координатами на подмногообразии $\delta(1)$, а четвертая – координатой на $\delta(2)$. Эти координаты мы обозначим через x, y, z и w соответсвенно. Тогда базисные операторы алгебр Ли (12) и (13) локально транзитивной группы Ли преобразований пространства R^4 примут следующий вид:

$$X_\mu = \lambda_\mu(x,y,z)\partial_x + \sigma_\mu(x,y,z)\partial_y + \tau_\mu(x,y,z)\partial_z, \;\; X_4 = \theta_4(w)\partial_w, \tag{48}$$

где $\mu = 1, 2, 3$. Совмещая (30) и (31) с (48), получаем:

для алгебры (12):

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = tgy \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \sec y \sin x\partial_z, \\ X_3 = tgy \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \sec y \cos x\partial_z, \;\; X_4 = \theta_4(w)\partial_w \end{array}\right\} \tag{49}$$

и для алгебры (13):

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \exp y \sin x\partial_z, \\ X_3 = \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \exp y \cos x\partial_z, \;\; X_4 = \theta_4(w)\partial_w. \end{array}\right\} \tag{50}$$

Ясно, что операторы (49) и (50) инвариантны относительно замены координат:

$$\xi = x, \;\; \eta = y, \;\; \zeta = z, \;\; \kappa = \varphi(w), \; \varphi' \neq 0. \tag{51}$$

Полагая $\theta_4(w)\varphi'(w) = 1$, получаем в R^4 такие координаты, в которых четвертый оператор систем (49) и (50) принимает простейшую форму: $X_4 = \partial_\kappa$. Тогда в прежних обозначениях координат базисные операторы алгебр Ли (12) и (13) локально транзитивной группы Ли преобразований пространства R^4 задаются выражениями (41) и (42) соответственно.

3. 4-метрическая физическая структура ранга (2,2). Рассмотрим два 4-мерных гладких многообразия M и N. Элементы этих многообразий будем обозначать строчными латинскими: $i, j, k, l, ...$ и строчными греческими: $\alpha, \beta, \gamma, ...$ буквами соответственно. Определим гладкую функцию $f : M \times N \to R^4$, которую будем называть 4-метрикой или метрической функцией. Ее компоненты: $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)$ и пусть $\mathcal{M}_f \subset M \times N$ – область ее определения. Если в окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$ точек i и α ввести локальные координаты x, y, z, w и

$\xi, \eta, \zeta, \vartheta$, относительно которых $i = (x_i, y_i, z_i, w_i)$ и $\alpha = (\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha, \vartheta_\alpha)$, то в случае $U(i) \times U(\alpha) \subset \mathcal{M}_f$ метрическая функция f будет иметь следующее координатное представление: $f(i\alpha) = f(x_i, y_i, z_i, w_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha, \vartheta_\alpha)$. В последующем изложении индексы i и α часто будут опускаться, так как ясно, к каким координатам они должны быть отнесены.

Будем говорить, следуя [3], что функция f на четырехмерных многообразиях M и N задает *4-метрическую физическую структуру ранга* (2,2), если выполняются следующие условия:

1. Область определения $\mathcal{M}_f \subseteq M \times N$ функции f есть открытое и плотное в $M \times N$ множество.

2. Метрическая функция f в области ее определения достаточно гладкая и невырожденная, то есть относительно локальных координат точек i и α выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^3(i\alpha), f^4(i\alpha))}{\partial(x_i, y_i, z_i, w_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^3(i\alpha), f^4(i\alpha))}{\partial(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha, \vartheta_\alpha)} \neq 0.$$

3. Для любой четверки $<ij, \alpha\beta>$ такой, что пары $<i\alpha>$, $<i\beta>$, $<j\alpha>$, $<j\beta>$ принадлежат $\mathcal{M}_f$, существует четырехкомпонентная функция 16 переменных $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4,)$ с rank $\Phi = 4$, такая, что

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) = 0.$$

Условие 3 называется принципом феноменологической симметрии.

В монографии [3] установлено, что в многообразиях M и N тогда действует 4-параметрическая группа движений, относительно которой метрическая функция является двухточечным инвариантом. Согласно критерию инвариантности для нее выполняются уравнения:

$$X_\mu(i) f(i\alpha) + \Xi_\mu(\alpha) f(i\alpha) = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \tag{52}$$

где X_1, X_2, X_3, X_4 и Ξ_1, Ξ_2, Ξ_2, Ξ_2 – операторы действия группы движений в многообразиях M и N соответственно. Там же доказана

Лемма 2. *Если функция $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)$ на четырехмерных многообразиях M и N задает четыреметрическую физическую структуру ранга (2,2), то базисные операторы X_1, X_2, X_3, X_4 и Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3, Ξ_4 определяют локально транзитивные группы Ли преобразований этих многообразий соответственно.*

Итак, группа движений в многообразиях M и N действует локально транзитивно. Выражения для операторов X_1, X_2, X_3, X_4 этой группы в многообразии M приведены в теореме 2, а выражения для операторов Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3, Ξ_4 получаются из них после следующих переобозначений координат: $x \to \xi$, $y \to \eta$, $z \to \zeta$, $w \to \vartheta$. Решая уравнения системы (52), приходим к классификации 4-метрических физических структур ранга (2,2).

Теорема 3. *С точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$ и в надлежаще выбранной в четырехмерных многообразиях M и N системах локальных* *координат 4-метрика $f=(f^1,f^2,f^3,f^4)$, задающая на них физическую структуру ранга (2,2), определяется следующими каноническими выражениями:*

$$\left.\begin{array}{c} f^1=(x+\xi)^2\exp[\varepsilon(w+\vartheta)], \quad f^2=(y+\eta)^2\exp[k(w+\vartheta)], \\ f^3=(z+\zeta)^2\exp[l(w+\vartheta)], \quad f^4=w-\vartheta; \end{array}\right\} \tag{53}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1=[(x+\xi)^2+(y+\eta)^2]\exp\left(-2k\,arctg\dfrac{y+\eta}{x+\xi}\right), \\ f^2=2arctg\dfrac{y+\eta}{x+\xi}+w+\vartheta, \quad f^3=(z+\zeta)^2\exp[l(w+\vartheta)], \quad f^4=w-\vartheta; \end{array}\right\} \tag{54}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1=(x+\xi)^2\exp\left(-2k\dfrac{y+\eta}{x+\xi}\right), \quad f^2=2\dfrac{y+\eta}{x+\xi}+w+\vartheta, \\ f^3=(z+\zeta)^2\exp[\varepsilon(w+\vartheta)], \quad f^4=w-\vartheta; \end{array}\right\} \tag{55}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1=x+\xi, \quad f^2=2\dfrac{y+\eta}{x+\xi}+w+\vartheta, \\ f^3=z+\zeta-\dfrac{(y+\eta)^2}{2(x+\xi)}, \ f^4=w-\vartheta, \end{array}\right\} \tag{56}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1=x+\xi, \quad f^2=2\dfrac{y+\eta}{x+\xi}+w+\vartheta, \\ f^3=(x+\xi)\ln(z+\zeta+y+\eta+x+\xi)-y-\eta, \ f^4=w-\vartheta, \end{array}\right\} \tag{57}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1=(x+\xi)^2\exp\left(-2k\dfrac{y+\eta}{x+\xi}\right), \quad f^2=2\dfrac{y+\eta}{x+\xi}+w+\vartheta, \\ f^3=k(y+\eta)-x-\xi-k^2(z+\zeta), \quad f^4=w-\vartheta, \end{array}\right\} \tag{58}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1=(x+\xi)^2\exp\left(-2k\dfrac{y+\eta}{x+\xi}\right), \quad f^2=2\dfrac{y+\eta}{x+\xi}+w+\vartheta, \\ f^3=2\dfrac{z+\zeta}{x+\xi}-k\left(\dfrac{y+\eta}{x+\xi}\right)^2, \quad f^4=w-\vartheta; \end{array}\right\} \tag{59}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1=[x+\xi-z(y+\eta)]^2\exp[c(w+\vartheta)], \\ f^2=[x+\xi+\zeta(y+\eta)]^2\exp[c(w+\vartheta)], \\ f^3=(y+\eta)^2\exp(w+\vartheta), \quad f^4=w-\vartheta; \end{array}\right\} \tag{60}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1=f^1[x+\xi-z(y+\eta),x+\xi+\zeta(y+\eta),y+\eta,w,\vartheta], \\ f^2=f^2[x+\xi-z(y+\eta),x+\xi+\zeta(y+\eta),y+\eta,w,\vartheta], \\ f^3=f^3[x+\xi-z(y+\eta),x+\xi+\zeta(y+\eta),y+\eta,w,\vartheta], \\ f^4=w-\vartheta, \end{array}\right\} \tag{61}$$

причем функции f^1, f^2, f^3 и f^4 – независимые интегралы уравнения

$$[2s-\frac{1}{2}(\frac{t-s}{u})^2]\frac{\partial F}{\partial s}+[2t+\frac{1}{2}(\frac{t-s}{u})^2]\frac{\partial F}{\partial t}+(2t+\frac{t-s}{u})\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial w}+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}=0$$

при следующих обозначениях: $s = x + \xi - z(y+\eta)$*,* $t = x + \xi + \zeta(y+\eta)$*,* $u = y + \eta$*;*

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = f^1[x+\xi - z(y+\eta), x+\xi+\zeta(y+\eta), y+\eta, w, \vartheta], \\ f^2 = f^2[x+\xi - z(y+\eta), x+\xi+\zeta(y+\eta), y+\eta, w, \vartheta], \\ f^3 = f^3[x+\xi - z(y+\eta), x+\xi+\zeta(y+\eta), y+\eta, w, \vartheta], \\ f^4 = w - \vartheta, \end{array}\right\} \tag{62}$$

причем функции f^1*,* f^2*,* f^3 *и* f^4 *– независимые интегралы уравнения*

$$[qs - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(\frac{t-s}{u})^2]\frac{\partial F}{\partial s} + [qt + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}(\frac{t-s}{u})^2]\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{t-s}{u}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial F}{\partial \vartheta} = 0$$

при тех же обозначениях, что и в предыдущем уравнении;

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = (x+\xi)\exp z, \quad f^2 = (x+\xi)\exp\zeta, \\ f^3 = (y+\eta)\exp w, \quad f^4 = (y+\eta)\exp\vartheta; \end{array}\right\} \tag{63}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = [(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2]\exp(z+\zeta), \\ f^2 = 2\,arctg\dfrac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta, \\ f^3 = z - \zeta, \quad f^4 = w - \vartheta; \end{array}\right\} \tag{64}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = \sin y \sin\eta\cos(x+\xi) + \cos y\cos\eta, \\ f^2 = z + arcsin\left(\dfrac{\sin(x+\xi)\sin\eta}{\sqrt{1-(f^1)^2}}\right), \\ f^3 = \zeta + arcsin\left(\dfrac{\sin(x+\xi)\sin y}{\sqrt{1-(f^1)^2}}\right), \\ f^4 = w - \vartheta; \end{array}\right\} \tag{65}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = (x+\xi)y\eta, \quad f^2 = z + \dfrac{1}{(x+\xi)y^2}, \\ f^3 = \zeta + \dfrac{1}{(x+\xi)\eta^2}, \quad f^4 = w - \vartheta, \end{array}\right\} \tag{66}$$

где $\varepsilon = 0, 1$*;* k, l, c, q *– произвольные постоянные, причем в выражениях (58) и (59) дополнительно* $k \neq 0$*.*

Доказательством теоремы 3 является непосредственное интегрирование систем дифференциальных уравнений (52), с операторами (32)–(42). При записи канонических выражений (53)–(66) использовался также переход к более удобной системе координат в многообразиях M и N.

Список литературы

[1] *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[2] *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.

[3] *Михайличенко Г.Г.* Групповая симметрия физических структур. Барнаул: БГПУ, Горно-Алтайск: ГАГУ, 2003.

[4] *Михайличенко Г.Г.* Полиметрические геометрии. Новосибирск: НГУ, 2001.

[5] *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии, т.1. М.: Наука, 1981.

[6] *Михайличенко Г.Г.* Простейшие полиметрические геометрии // Докл. АН РФ, 1996, Т.348, №1, С.22-24.

[7] *Михайличенко Г.Г.* Простейшие полиметрические геометрии I // Сиб. мат. журн., 1998, Т.39, №2, С.377-395.

[8] *Михайличенко Г.Г.* Некоторые замечания к классификации Ли групп преобразований // Вестник МГУ, Сер. 1. Математика. Механика, 1986, №5, С.98.

[9] *Михайличенко Г.Г.* Трехмерные алгебры Ли локально транзитивных преобразований пространства R^3 // Известия вузов. Математика, 1997, №9, С.41-48.