Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2008, №??, с. 1–10 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

Р.М. МУРАДОВ

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ ПОЛИМЕТРИЧЕСКИХ ГЕОМЕТРИЙ РАНГА 3

Аннотация. Полиметрическая геометрия задаётся многокомпонентной функцией двух точек, а её феноменологическая симметрия (ФС) ранга 3 выражает связь всех расстояний для любых трёх точек. Классификация таких геометрий проводится с точностью до изотопии. Имеется полная классификация двуметрик, триметрик и четыреметрик. В общем случае, по координатному представлению метрической функции невозможно найти уравнение, выражающее ФС задаваемой ею полиметрической геометрии. В данной работе доказывается, что с помощью некоторой изотопии метрической функции может быть придана такая координатная форма, при которой она задаёт квазигрупповую бинарную операцию с правой единицей и правым обратным элементом, совпадающим с исходным. Тогда уравнение, выражающее ФС оказывается структурно подобным самой метрической функции и потому записывается по ней сразу.

Ключевые слова: метрическая функция, полиметрическая геометрия, квазигруппа с правой единицей

УДК: 514.74

Abstract. The polymetric geometry is set by multicomponent function of two points, and its phenomenological symmetry of a rank 3 expresses communication of all distances for any three points. Classification of such geometries is realized to within trasformation. There is a full classification of two-metrics, three-metrics and four-metrics. Generally, on coordinate representation of metric function it is impossible to find the equation expressing phenomenological symmetry of polymetric geometry set by it. In the given work it is proved that by means of some transformation of metric function can be given such coordinate form at which it sets quasigroup binary operation with the right unit and the right return element coinciding with the initial. Then the equation expressing phenomenological symmetry appears structurally similar to the same metric function and consequently registers on it at once.

Keywords: metric function, polymetric geometry, quasigroup the right unit

Полиметрическая геометрия задается на одном множестве $\mathfrak{M}$ многокомпонентной метрической функцией $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \in R^s$, где $s \geq 2$. Феноменологическая симметрия этой геометрии проявляется в том, что для определенного числа точек из $\mathfrak{M}$ все взаимные расстояния между ними функционально связаны некоторой системой s уравнений. Такие геометрии допускают содержательную физическую интерпретацию, например, в термодинамике.

Точное определение полиметрических геометрий дано в работе [1] и там же приведена классификация двуметрических ($s = 2$) и триметрических ($s = 3$) геометрий, феноменологическая симметрия которых имеет минимальный ранг, равный трём. В §3 и §5 монографии [2] соответствующие классификации были проведены на основе метода, опирающегося на эквивалентность феноменологической и групповой симметрий полиметрических геометрий ([2], §2). Для четыреметрических геометрий (s=4) классификация была проведена в работе [3].

Заметим, однако, что почти во всех случаях проведенных классификаций известными оказываются только координатные представления метрической функции f. Соответсвующие уравнения, выражающие феноменологическую симметрию задаваемой ею полиметрической геометрии остаются неизвестными, хотя их существование может быть установлено по рангу соответствующей функциональной матрицы.

В настоящей работе *изотопией*, то есть некоторой заменой координат в $\mathfrak{M}$ и масштабным преобразованием $\psi(f) \to f$, для каждой метрической функции из имеющихся их классификаций получается такое её координатное представление, по которому *однозначно* находятся уравнения, выражающие феноменологическую симметрию. Эти уравнения в рамках определённой физической интерпретации представляют собой аналитическую запись закона в феноменологически симметричной форме.

Дадим, следуя §1 монографии [2], определение полиметрических феноменологически симметричных геометрий минимального ранга 3.

Пусть имеется множество $\mathfrak{M}$, являющееся s-мерным многообразием, где $s \geq 2$ – натуральное число, точки которого обозначим строчными латинскими буквами, а также функция $f : \mathfrak{S}_f \to R^s$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$, сопоставляющая каждой паре $\langle ij\rangle \in \mathfrak{S}_f$ некоторую совокупность s вещественных чисел $f(ij) = (f^1(ij), \ldots, f^s(ij)) \in R^s$. Функцию $f = (f^1, \ldots, f^s)$ будем называть s-метрикой.

Для некоторой точки $l \in \mathfrak{M}$ введем функции $\bar{f}$ и $\tilde{f}$, сопоставляя точке $i \in \mathfrak{M}$ точки $f(il) \in R^s$ и $f(li) \in R^s$ соответственно, если $\langle il\rangle \in \mathfrak{S}_f$ и $\langle li\rangle \in \mathfrak{S}_f$.

В отношении пространства $\mathfrak{M}$ с s-метрикой $f = (f^1, \ldots, f^s)$ будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. *Область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ множество.*

II. *Функция f в области своего определения есть достаточно гладкая функция.*

III. *В $\mathfrak{M}$ плотно множество таких точек l, для которых функция $\bar{f}$ ($\tilde{f}$) имеет максимальный ранг, равный s, в точках плотного в $\mathfrak{M}$ множества.*

Гладкую s-метрику $f = (f^1, \ldots, f^s)$, для которой выполняется аксиома III, будем называть *невырожденной*.

Введем ещё функцию F, сопоставляя кортежу $\langle ijk\rangle$ из $\mathfrak{M}^3$ точку $(f(ij), f(ik), f(jk)) \in R^{3s}$, координаты которой в R^{3s} определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью $3s$ расстояний для всех пар его точек: $(\langle ij\rangle, \langle ik\rangle, \langle jk\rangle)$, если эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Область определения функции F обозначим через $\mathfrak{S}_F$.

Определение. Будем говорить, что функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$ задает на s-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ *полиметрическую феноменологически симметричную геометрию ранга 3*, если, кроме аксиом I, II, III, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IV. *Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждой тройки $\langle ijk\rangle$ которого и некоторой его окрестности $U(\langle ijk\rangle)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi : E \to R^s$, определенная в некоторой области $E \subset R^{3s}$, содержащей точку $F(\langle ijk\rangle)$, что в ней $rank\Phi = s$ и множество $F(U(\langle ijk\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_s)$, то есть*

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(jk)) = 0 \tag{1}$$

для всякой тройки из $U(\langle ijk\rangle)$.

Аксиома IV составляет содержание принципа феноменологической симметрии. Эта аксиома выражает требование, чтобы $3s$ расстояний между точками любой тройки длины 3 из $U(\langle ijk \rangle)$ были функционально связаны, удовлетворяя системе s уравнений (1). Условие $rank \Phi = s$ означает, что уравнения $\Phi = 0$ (то есть $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_s = 0$) независимы.

Если $x^1, \ldots, x^s$ – локальные координаты в многообразии $\mathfrak{M}$, то для s-метрики $f = (f^1, \ldots, f^s)$ в некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ каждой пары $\langle ij \rangle \in \mathfrak{S}_f$ можно выписать явно её локальное координатное представление

$$f(ij) = f(x_i^1, \ldots, x_i^s, x_j^1, \ldots, x_j^s), \tag{2}$$

свойства которого определяются аксиомами II и III. Поскольку в соответствии с аксиомой III ранги функций $\bar{f}$ и $\tilde{f}$, равные s, максимальны, координаты точек i и j входят в представление (2) существенным образом.

Классификация двуметрических ($s = 2$) геометрий на плоскости была проведена в §3 монографии [2]. Её результаты выражает следующая

Теорема 1. *С точностью до изотопии двуметрика* $f = (f^1, f^2)$, *задающая на двумерном многообразии* $\mathfrak{M}$ *феноменологически симметричную геометрию ранга 3, может быть представлена следующими двумя выражениями:*

$$f^1(ij) = x_i - x_j, \; f^2(ij) = y_i - y_j; \tag{3}$$

$$f^1(ij) = (x_i - x_j)y_i, \; f^2(ij) = (x_i - x_j)y_j. \tag{4}$$

Для двуметрики (3) уравнения $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) = 0$ выписываются сразу:

$$f^1(ij) - f^1(ik) + f^1(jk) = 0, \; f^2(ij) - f^2(ik) + f^2(jk) = 0. \tag{3$'$}$$

Обратим внимание на то, что функция (3) на R^2 задает квазигрупповую операцию $(x_i, y_i) \otimes (x_j, y_j) = (x_i - x_j, y_i - y_j)$ с правой единицей $(0, 0)$ и правым обратным элементом, совпадающим с исходным. По ней легко воспроизвести уравнения $(3')$, используя следующий переход: $f^1(ij) \to f^1(ij)$, $f^2(ij) \to f^2(ij)$, $x_i \to f^1(ik)$, $y_i \to f^2(ik)$, $x_j \to f^1(jk)$, $y_j \to f^2(jk)$. Но функция (4) такой операции на R^2 не задает и соответствующие уравнения $\Phi = 0$, приведенные во Введении к монографии [2], не очевидны:

$$\begin{vmatrix} 0 & -f^2(ij) & -f^2(ik) \\ f^1(ij) & 0 & -f^2(jk) \\ f^1(ik) & f^1(jk) & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} f^1(ij) & -f^1(jk) & -f^2(ik) \\ f^1(ik) & 0 & -f^2(ik) \\ f^1(ik) & -f^2(ij) & f^2(jk) \end{vmatrix} = 0. \tag{4$'$}$$

Сделаем переход от метрических функций (3) и (4) к уравнениям $\Phi = 0$ более естественным. Суть этого перехода выражает следующая

Теорема 2. *Если двухкомпонентная метрическая функция*

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j) \tag{5}$$

задает на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ *двуметрическую феноменологически симметричную* *геометрию ранга 3, то с точностью до изотопии она определяет в R^2 такую квазигрупповую операцию с правой единицей, что правый обратный элемент совпадает с исходным и уравнение, выражающее феноменологическую симметрию, имеет подобный самой метрической функции вид:*

$$f(ij) = f(f^1(ik), f^2(ik), f^1(jk)f^2(jk)). \tag{5'}$$

Для двуметрики (3), определяющей, очевидно, такую квазигрупповую операцию, уравнения, выражающие феноменологическую симметрию, запишутся по формуле ($5'$) так:

$$f^1(ij) = f^1(ik) - f^1(jk),\ f^2(ij) = f^2(ik) - f^2(jk)$$

и они, очевидно, совпадают с уравнениями ($3'$).

Для двуметрики (4) сделать это по формуле ($5'$) нельзя. Используя изотопию $f^2(ij) \to f^1(ij)$, $f^1(ij)/f^2(ij) \to f^2(ij)$, получим эквивалентную двуметрику

$$f^1(ij) = (x_i - x_j)y_j,\ f^2(ij) = y_i/y_j, \tag{6}$$

которая определяет в R^2 квазигрупповую операцию $(x_i, y_i) \otimes (x_j, y_j) = ((x_i - x_j)y_j, y_i/y_j)$ с правой единицей $(0, 1)$ и правым обратным элементом, совпадающим с исходным: $(x, y)^{-1} = (x, y)$.

Уравнение же, выражающее феноменологическую симметрию геометрии, задаваемой двуметрикой (6) имеет следующий вид:

$$f^1(ij) = (f^1(ik) - f^1(jk))f^2(jk),\ f^2(ij) = f^2(ik)/f^2(jk). \tag{6'}$$

Заметим, что справедливость уравнений ($3'$) и ($6'$) легко проверяется.

Классификацию триметрических (s=3) геометрий в пространстве приведем по §5 монографии [2].

Теорема 3. *С точностью до изотопии триметрика $f = (f^1, f^2, f^3)$, задающая на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга 3, может быть представлена одним из следующих семи выражений:*

$$f^1(ij) = x_i - x_j,\ f^2(ij) = y_i - y_j,\ f^3(ij) = z_i - z_j; \tag{7}$$

$$f^1(ij) = y_i - y_j,\ f^2(ij) = (x_i - x_j)y_i + z_i - z_j,\ f^3(ij) = (x_i - x_j)y_j + z_i - z_j; \tag{8}$$

$$f^1(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp\left(2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right),\ f^2(ij) = (x_i - x_j)z_i,\ f^3(ij) = (x_i - x_j)z_j; \tag{9}$$

$$f^1(ij) = (x_i - x_j)^p/(y_i - y_j),\ f^2(ij) = (x_i - x_j)z_i,\ f^3(ij) = (x_i - x_j)z_j; \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp\left(2\gamma arctg\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \\ f^2(ij) = z_i + arctg\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \\ f^3(ij) = z_j + arctg\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) = \sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j, \\ f^2(ij) = z_i - \arcsin\left(\frac{\sin(x_i - x_j)\sin y_j}{\sqrt{1-(f^1(ij))^2}}\right), \\ f^3(ij) = z_j + \arcsin\left(\frac{\sin(x_i - x_j)\sin y_i}{\sqrt{1-(f^1(ij))^2}}\right); \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) = (x_i - x_j)y_i y_j, \\ f^2(ij) = z_i + \frac{1}{(x_i - x_j)y_i^2}, \\ f^3(ij) = z_j - \frac{1}{(x_i - x_j)y_j^2}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где $-1 \leq p \leq 1$ и $0 \leq \gamma < \infty$.

Естественный переход от триметрик (7) – (13) к уравнениям $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = 0$ определяет аналогичная второй следующая

Теорема 4. *Если трехкомпонентная метрическая функция*

$$f(ij) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) \tag{14}$$

задает на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ триметрическую феноменологически симметричную геометрию ранга 3, то с точностью до изотопии она определяет в R^3 такую квазигрупповую операцию с правой единицей, что правый обратный элемент совпадает с исходным и уравнение, выражающее феноменологическую симметрию, имеет подобный самой метрической функции вид:

$$f(ij) = f(f^1(ik), f^2(ik), f^3(ik), f^1(jk), f^2(jk), f^3(jk)). \tag{14$'$}$$

Триметрика (7) на R^3 задает квазигрупповую опреацию $(x_i, y_i, z_i) \otimes (x_j, y_j, z_j) = (x_i - x_j, y_i - y_j, z_i - z_j)$ с правой единицей $(0, 0, 0)$ и правым обратным элементом, равным исходному. Чтобы записать соответствующие уравнения (14$'$), используем подобный двуметрическому случаю переход: $f^1(ij) \to f^1(ij)$, $f^2(ij) \to f^2(ij)$, $f^3(ij) \to f^3(ij)$, $x_i \to f^1(ik)$, $y_i \to f^2(ik)$, $z_i \to f^3(ik)$, $x_j \to f^1(jk)$, $y_j \to f^2(jk)$, $z_j \to f^3(jk)$. Отсюда легко записать систему (14$'$) для функций (7):

$$f^1(ij) = f^1(ik) - f^1(jk),\ f^2(ij) = f^2(ik) - f^2(jk),\ f^2(ij) = f^2(ik) - f^2(jk). \tag{7$'$}$$

Триметрика (8) в R^3 не задает квазигрупповую операцию, в которой правый обратный элемент совпадает с исходным. Чтобы выполнялось последнее, надо перейти к эквивалентной триметрике с помощью изотопии: $(f^2 - f^3)/f^1 \to f^1$, $f^1 \to f^2$, $f^3 \to f^3$. Тогда для триметрики (8) получим другое координатное представление:

$$f^1(ij) = x_i - x_j,\ f^2(ij) = y_i - y_j,\ f^3(ij) = (x_i - x_j)y_j + z_i - z_j. \tag{15}$$

Триметрика (15) уже задает квазигрупповую операцию с правой единицей $(0, 0, 0)$ и правым обратным элементом, совпадающим с исходным.

Уравнение (14′), выражающее феноменологическую симметрию геометрии, задаваемой триметрикой (15), запишется в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) = f^1(ik) - f^1(jk), \\ f^2(ij) = f^2(ik) - f^2(jk), \\ f^3(ij) = (f^1(ik) - f^1(jk))f^2(jk) + f^3(ik) - f^3(jk). \end{array}\right\} \tag{15′}$$

Заметим, что во всех квазигрупповых операциях $(x_i, y_i, z_i) \otimes (x_j, y_j, z_j) = (f^1(ij), f^2(ij), f^3(ij))$, задаваемых триметриками (9) – (13), правый обратный элемент также не совпадает с исходным. Поэтому в дальнейшем, не отмечая каждый раз это обстоятельство, сразу будем записывать нужную изотопию.

Для триметрики (9) соответствующая изотопия будет следующей: $f^3 \to f^1$, $\dfrac{f^3 \ln(f^1/(f^3)^2)}{2} \to f^2$, $f^2/f^3 \to f^3$. После неё выражения (9) преобразуются к виду:

$$f^1(ij) = (x_i - x_j)z_j,\ f^2(ij) = (y_i - y_j - (x_i - x_j)\ln z_j)z_j,\ f^3(ij) = z_i/z_j. \tag{16}$$

Запишем для триметрики (16) уравнение (14′):

$$f^1(ij) = (f^1(ik) - f^1(jk))f^3(jk),\ f^2(ij) = (f^2(ik) - f^2(jk) - (f^1(ik) - f^1(jk))\ln f^3(jk))f^3(jk),$$
$$f^3(ij) = \frac{f^3(ik)}{f^3(jk)}. \tag{16′}$$

Для триметрики (10) осуществим следующую изотопию: $f^3 \to f^1$, $(f^3)^p/f^1 \to f^2$, $f^2/f^3 \to f^3$. Тогда триметрика (10) преобразуется к виду:

$$f^1(ij) = (x_i - x_j)z_j,\ f^2(ij) = (y_i - y_j)z_j^p,\ f^3(ij) = \frac{z_i}{z_j}. \tag{17}$$

Уравнение (14′) для триметрики (17) запишется так:

$$f^1(ij) = (f^1(ik) - f^1(jk))f^3(jk),\ f^2(ij) = (f^2(ik) - f^2(jk))(f^3(jk))^p,\ f^3(ij) = \frac{f^3(ik)}{f^3(jk)}. \tag{17′}$$

Соответствующая изотопия для триметрики (11) запишется так: $\dfrac{f^1}{\sqrt{(\tan f^3)^2 + 1}} \to f^1$, $\dfrac{f^1 \tan f^3}{\sqrt{(\tan f^3)^2 + 1}} \to f^2$, $f^2 - f^3 \to f^3$. В результате получим:

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) = ((x_i - x_j)\cos z_j - (y_i - y_j)\sin z_j)\exp(-\gamma z_j), \\ f^2(ij) = ((x_i - x_j)\sin z_j - (y_i - y_j)\cos z_j)\exp(-\gamma z_j), \\ f^3(ij) = z_i - z_j. \end{array}\right\} \tag{18}$$

Тогда уравнение (14′), выражающее феноменологическую симметрию, запишем в следующей форме:

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) = ((f^1(ik) - f^1(jk))\cos f^3(jk) - (f^2(ik) - f^2(jk))\sin f^3(jk))\exp(-\gamma f^3(jk)), \\ f^2(ij) = ((f^1(ik) - f^1(jk))\sin f^3(jk) - (f^2(ik) - f^2(jk))\cos f^3(jk))\exp(-\gamma f^3(jk)), \\ f^3(ij) = f^3(ik) - f^3(jk). \end{array}\right\} \tag{18′}$$

Триметрика (12) может быть представлена в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} f^1(ij) = x_i\sqrt{1 - x_j^2 - y_j^2 - z_j^2} - x_j\sqrt{1 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2} + y_i z_j - z_i y_j, \\ f^2(ij) = y_i\sqrt{1 - x_j^2 - y_j^2 - z_j^2} - y_j\sqrt{1 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2} + z_i x_j - x_i z_j, \\ f^3(ij) = z_i\sqrt{1 - x_j^2 - y_j^2 - z_j^2} - z_j\sqrt{1 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2} + x_i y_j - y_i x_j. \end{array}\right\} \tag{19}$$

Для триметрики (12) пока не найдена в явном виде та изотопия, при которой она переходит в триметрику (19), однако её существование следует из локального изоморфизма транзитивных групп движений обеих триметрик, вследствии чего оказываются изоморфными их трехмерные алгебры Ли. Эти алгебры в некотором базисе имеют совпадающие структурные константы, причем соответствующая абстрактная алгебра с точностью до замены координат в преобразуемом трехмерном многообразии имеет единственное представление (см. [2], стр. 45-49). Соответствующее триметрике (19) уравнение (14′) будет иметь вид:

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) = f^1(ik)\sqrt{1 - f^1(jk)^2 - f^2(jk)^2 - f^3(jk)^2} - \\ - f^1(jk)\sqrt{1 - f^1(ik)^2 - f^2(ik)^2 - f^3(ik)^2} + f^2(ik)f^3(jk) - f^3(ik)f^2(jk), \\ f^2(ij) = f^2(ik)\sqrt{1 - f^1(jk)^2 - f^2(jk)^2 - f^3(jk)^2} - \\ - f^2(jk)\sqrt{1 - f^1(ik)^2 - f^2(ik)^2 - f^3(ik)^2} + f^3(ik)f^1(jk) - f^1(ik)f^3(jk), \\ f^3(ij) = f^3(ik)\sqrt{1 - f^1(jk)^2 - f^2(jk)^2 - f^3(jk)^2} - \\ - f^3(jk)\sqrt{1 - f^1(ik)^2 - f^2(ik)^2 - f^3(ik)^2} + f^1(ik)f^2(jk) - f^2(ik)f^1(jk). \end{array}\right\} \tag{19′}$$

Для триметрики (13) изотопия имеет вид: $\dfrac{1}{f^3} \to f^1$, $f^1 f^3 \to f^2$, $f^2 - \dfrac{1}{f^3(f^1)^2} \to f^3$. Тогда систему (13) можно переписать следующим образом:

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) = \dfrac{y_j^2(x_i - x_j)}{1 + z_j y_j^2(x_i - x_j)}, \\ f^2(ij) = \dfrac{(y_j^2 z_j(x_i - x_j) + 1)y_i}{y_j}, \\ f^3(ij) = \dfrac{(y_i^2 y_j^2 z_i z_j(x_i - x_j) + z_i y_i^2 + z_j y_j^2}{y_i^2(z_j y_j^2(x_i - x_j) + 1)}. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Уравнение (14′) для триметрики (20) запишется так:

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= \frac{(f^2(jk))^2(f^1(ik)-f^1(jk))}{1+f^3(jk)(f^2(jk))^2(f^1(ik)-f^1(jk))},\\ f^2(ij) &= \frac{((f^2(jk))^2f^3(jk)(f^1(ik)-f^1(jk))+1)f^2(ik)}{f^2(jk)},\\ f^3(ij) &= \frac{((f^2(ik))^2(f^2(jk))^2f^3(ik)f^3(jk)(f^1(ik)-f^1(jk))+f^3(ik)(f^2(ik))^2+f^3(jk)(f^2(jk))^2}{f^2(ik)^2(f^3(jk)(f^2(jk))^2(f^1(ik)-f^1(jk))+1)}. \end{aligned}\right\} \tag{20$'$}$$

Классификацию четыреметрических (s=4) геометрий в R^4 приведем по статье [3].

Теорема 5. *С точностью до изотопии четыреметрика $f=(f^1,f^2,f^3,f^4)$, задающая на четырехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга 3, может быть представлена явно одним из следующих четырнадцати выражений:*

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij)=(x_i-x_j)^2\exp[\varepsilon(w_i+w_j)],\ f^2(ij)=(y_i-y_j)^2\exp[k(w_i+w_j)],\\ f^3(ij)=(z_i-z_j)^2\exp[l(w_i+w_j)],\ f^4(ij)=w_i-w_j; \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij)=[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2]\exp\left[-2k\operatorname{arctg}\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\right],\\ f^2(ij)=2\operatorname{arctg}\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}+w_i+w_j,\\ f^3(ij)=(z_i-z_j)^2\exp[l(w_i+w_j)],\ f^4(ij)=w_i-w_j; \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij)=(x_i-x_j)^2\exp\left[-2k\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\right],\ f^2(ij)=2\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}+w_i+w_j,\\ f^3(ij)=(z_i-z_j)^2\exp[\varepsilon(w_i+w_j)],\ f^4(ij)=w_i-w_j; \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij)=x_i-x_j,\ f^2(ij)=2\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}-(w_i+w_j),\\ f^3(ij)=z_i-z_j-\frac{(y_i-y_j)^2}{2(x_i-x_j)},\ f^4(ij)=w_i-w_j; \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij)=x_i-x_j,\ f^2(ij)=2\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}-(w_i+w_j),\\ f^3(ij)=(x_i-x_j)\ln(z_i-z_j+y_i-y_j+x_i-x_j)-y_i+y_j,\ f^4(ij)=w_i-w_j; \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij)=(x_i-x_j)^2\exp\left[-2k\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\right],\ f^2(ij)=2\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}-(w_i+w_j),\\ f^3(ij)=k(y_i-y_j)-(x_i-x_j)-k^2(z_i-z_j),\ f^4(ij)=w_i-w_j; \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij)=(x_i-x_j)^2\exp\left[-2k\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\right],\ f^2(ij)=2\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}-(w_i+w_j),\\ f^3(ij)=2\frac{z_i-z_j}{x_i-x_j}-k\left(\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\right)^2,\ f^4(ij)=w_i-w_j; \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij)=(x_i-x_j-z_i(y_i-y_j))^2\exp[c(w_i+w_j)],\\ f^2(ij)=(x_i-x_j-z_j(y_i-y_j))^2\exp[c(w_i+w_j)],\\ f^3(ij)=(y_i-y_j)^2\exp(w_i+w_j),\ f^4(ij)=w_i-w_j; \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij)=(x_i-x_j)e^{z_i},\ f^2(ij)=(x_i-x_j)e^{z_j},\\ f^3(ij)=(y_i-y_j)e^{w_i},\ f^4(ij)=(y_i-y_j)e^{w_j}; \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij)=[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2]\exp(z_i+z_j), \\ f^2(ij)=2\operatorname{arctg}\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}+w_i+w_j,\ f^3(ij)=z_i-z_j,\ f^4(ij)=w_i-w_j; \end{array}\right\} \qquad (30)$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij)=\sin y_i\sin y_j\cos(x_i-x_j)+\cos y_i\cos y_j, \\ f^2(ij)=z_i-\varepsilon(i)\arcsin\dfrac{\sin(x_i-x_j)\sin y_j}{\sqrt{1-(f^1(ij))^2)}}, \\ f^3(ij)=z_j+\varepsilon(i)\arcsin\dfrac{\sin(x_i-x_j)\sin y_i}{\sqrt{1-(f^1(ij))^2)}}, \\ f^4(ij)=w_i-w_j; \end{array}\right\} \qquad (31)$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij)=(x_i-x_j)y_iy_j,\ f^2(ij)=z_i+\dfrac{1}{(x_i-x_j)y_i^2}, \\ f^3(ij)=z_j-\dfrac{1}{(x_i-x_j)y_j^2},\ f^4(ij)=w_i-w_j, \end{array}\right\} \qquad (32)$$

где k, l, c, q – *произвольные постоянные,* $\varepsilon=0,\ 1$, $\varepsilon(i)=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial f^1(ij)}{\partial y_i}\right)$, $\varepsilon(j)=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial f^1(ij)}{\partial y_i}\right)$, *а также неяно выражениями:*

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij)=f^1(x_i-x_j-z_i(y_i-y_j),x_i-x_j-z_j(y_i-y_j),y_i-y_j,w_i,w_j), \\ f^2(ij)=f^2(x_i-x_j-z_i(y_i-y_j),x_i-x_j-z_j(y_i-y_j),y_i-y_j,w_i,w_j), \\ f^3(ij)=f^3(x_i-x_j-z_i(y_i-y_j),x_i-x_j-z_j(y_i-y_j),y_i-y_j,w_i,w_j), \\ f^4(ij)=w_i-w_j, \end{array}\right\} \qquad (33)$$

причем функции f^1, f^2, f^3, *и* f^4 – *независимые интегралы уравнения*

$$\left(qu-\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}\left(\frac{v-u}{\vartheta}\right)^2\right)\frac{\partial f}{\partial u}+\left(qu+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}\left(\frac{v-u}{\vartheta}\right)^2\right)\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{v-u}{\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}+\frac{\partial f}{\partial w_i}+\frac{\partial f}{\partial w_j}=0; \qquad (33')$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij)=f^1(x_i-x_j-z_i(y_i-y_j),x_i-x_j-z_j(y_i-y_j),y_i-y_j,w_i,w_j), \\ f^2(ij)=f^2(x_i-x_j-z_i(y_i-y_j),x_i-x_j-z_j(y_i-y_j),y_i-y_j,w_i,w_j), \\ f^3(ij)=f^3(x_i-x_j-z_i(y_i-y_j),x_i-x_j-z_j(y_i-y_j),y_i-y_j,w_i,w_j), \\ f^4(ij)=w_i-w_j, \end{array}\right\} \qquad (34)$$

причем функции f^1, f^2, f^3, *и* f^4 – *независимые интегралы уравнения*

$$\left(2u-\frac{1}{2}\left(\frac{v-u}{\vartheta}\right)^2\right)\frac{\partial f}{\partial u}+\left(2v+\frac{1}{2}\left(\frac{v-u}{\vartheta}\right)^2\right)\frac{\partial f}{\partial v}+\left(2v+\frac{v-u}{\vartheta}\right)\frac{\partial f}{\partial \vartheta}+\frac{\partial f}{\partial w_i}+\frac{\partial f}{\partial w_j}=0; \qquad (34')$$

где для (33′), (34′) *введены обозначения:* $u=(x_i-x_j)-(y_i-y_j)z_i$, $v=(x_i-x_j)-(y_i-y_j)z_j$, $\vartheta=y_i-y_j$.

Естественный переход от четырехметрик (21)-(34) к уравнениям $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4)=0$ определяет аналогичная второй и четвертой следующая

Теорема 6. *Если четырехкомпонентная метрическая функция*

$$f(ij)=f(x_i,y_i,z_i,w_i,x_j,y_j,z_j,w_j) \qquad (35)$$

задает на четырехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ четыреметрическую феноменологически симметричную геометрию ранга 3, то с точностью до изотопии она определяет в R^3 такую квазигрупповую операцию с правой единицей, что правый обратный элемент совпадает с исходным и уравнение, выражающее феноменологическую симметрию, имеет подобный самой метрической функции вид:

$$f(ij) = f(f^1(ik), f^2(ik), f^3(ik), f^4(ik), f^1(jk), f^2(jk), f^3(jk), f^4(jk)). \qquad (35')$$

Соответствующие детальные исследования автор предоставляет провести заинтересованному читателю.

В заключение автор выражает благодарность участникам научного семинара по теории физических структур профессору Г.Г. Михайличенко и доценту В.А. Кырову, оказавших помощь в формулировке задачи и её решении в данной работе.

Литература

[1] Михайличенко Г.Г. *Простейшие полиметрические геометрии // Докл. АН РФ.* – 1996. – Т.348 – №1. – С. 22-24.

[2] Михайличенко Г.Г. *Полиметрические геометрии.* – Новосибирск: НГУ, 2001. – 144 с.

[3] Кыров В.А. *Классификация четырехмерных транзитивных локальных групп Ли преобразований пространства R^4 и их двухточечных инвариантов // Известия вузов. Математика.* – 2008. – №6. – С. 29-42.

Р.М. Мурадов
кафедра физики и методики преподавания физики,
Горно-Алтайский государственный университет,
649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1,
e-mail: rembo2009@yandex.ru

R.M. Muradov
Chair of Physics Teaching Principles,
Gorny Altai State University,
1 Lenkin str., Gorno-Altaisk, 649000, Russia,
e-mail: rembo2009@yandex.ru