ГРУППОВЫЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФИЗИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

А.А.Симонов

Понятие физической структуры впервые введено Ю.И.Кулаковым в [1]. Во всех последующих работах Кулакова и других авторов эти структуры рассматривались не на абстрактных множествах, а на множествах, оснащённых какими-нибудь другими структурами, как правило, структурами аналитических многообразий. В работе [2] В.К.Ионин впервые рассмотрел физическую структуру ранга (2, 2) на абстрактных множествах не наделяя их дополнительными структурами. В настоящей статье мы также будем исходить из абстрактных множеств, но рассмотрим другой класс задач, связанных с простейшей физической структурой геометрического типа ранга 3. Перейдём к точным формулировкам:
Будем говорить, что задана физическая структура геометрического типа ранга 3, если задана четвёрка (f, h, M, N):

$$h : N \times N \to M$$

$$f : M \times M \to M$$

и выполняются следующие аксиомы:
Аксиома 1.
f, h - сюръективные функции.
Аксиома 2.
Мощности множеств: $|M| > 3, |N| > 3$.
Аксиома 3.

$$(\forall x, y, z \in N) : h(x, y) = f(h(x, z), h(y, z)).$$

Аксиомы 1-2 являются, в большей степени, техническими аксиомами, а аксиома 3, является математическим выражением принципа феноменологической симметрии – основного постулата теории физических структур. Рассмотрим, далее, четвёрку $\langle \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{t} \rangle$ и запишем уравнение из аксиомы 3 для всех троек из неё: $\langle \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \rangle, \langle \hat{x}, \hat{y}, \hat{t} \rangle, \langle \hat{x}, \hat{z}, \hat{t} \rangle, \langle \hat{y}, \hat{z}, \hat{t} \rangle$. Из этих четырёх уравнений, при помощи замены $h(\hat{x}, \hat{t}) = x, h(\hat{y}, \hat{t}) = y, h(\hat{z}, \hat{t}) = z$, легко получить функциональное уравнение:

$$f(x, y) = f(f(x, z), f(y, z)), \tag{1}$$

которое является естественным следствием принципа феноменологической симметрии. Далее найдём решение данного уравнения.

Сформулируем теорему:

Теорема 1
Если:
1. в группоиде (f, M) для $(\forall x, y, z \in M)$ выполняется соотношение (1),
2. $(\exists z_o \in M) : x \longmapsto f(z_o, x)$ – сюръекция [1],
тогда группоид (f, M) изотопен группе $(\circ, M)$ так, что:

$$f(x, y) = x \circ y^{-1}.$$

1^0. Рассмотрим упорядоченную тройку: $z_o, z_o, y \in M$ (далее, для простоты, иногда будем опускать упоминание множества), тогда в силу условия 1 теоремы можем записать:

$$f(z_o, z_o) = f(f(z_o, y), f(z_o, y)),$$

Введём обозначение $f(z_o, z_o) = \epsilon$, т.к. $f(z_o, x)$ - сюръекция то предыдущее выражение можно переписать в виде:

$$(\forall x \in M) : f(x, x) = \epsilon.$$

2^0. Рассмотрим теперь другую упорядоченную тройку z_o, y, y:

$$f(z_o, y) = f(f(z_o, y), f(y, y)) = f(f(z_o, y), \epsilon),$$

иначе говоря элемент ϵ является правым нейтральным элементом:

$$(\forall x \in M) : f(x, \epsilon) = x.$$

3^0. Рассмотрим теперь функцию ζ определённую как:

$$f(\epsilon, x) \equiv \zeta(x).$$

Рассмотрим упорядоченную тройку $x, y, x \in M$:

$$f(x, y) = f(f(x, x), f(y, x)) = f(\epsilon, f(y, x)) = \zeta(f(y, x)) \tag{2}$$

откуда следует:

$$(\forall x \in M) : \zeta(\zeta(x)) = x.$$

Кроме того из $f(\epsilon, \epsilon) = \epsilon$ следует $\zeta(\epsilon) = \epsilon$.
4^0. Покажем теперь, что ζ – биекция, действительно из (2) следует, что ζ – сюръекция, остаётся показать её инъективность. Допустим, что:

$$(\exists \hat{x}, x \in M) : \hat{x} \neq x, \zeta(\hat{x}) = \zeta(x)$$

Тогда подействуем функцией ζ на обе части равенства $\zeta(\hat{x}) = \zeta(x) \Rightarrow$

$$\hat{x} = \zeta(\zeta(\hat{x})) = \zeta(\zeta(x)) = x.$$

Пришли к противоречию, т.о. наше допущение неверно.
5^0. При помощи изотопии рассмотрим новый группоид $(\circ, M)$:

$$x \circ y \equiv f(x, \zeta(y))$$

и покажем, что для него выполняются аксиомы группы. Действительно введённый в п. 1^0 элемент ϵ в соответствии с п. 3^0 является как правым:

$$x \circ \epsilon = f(x, \zeta(\epsilon)) = f(x, \epsilon) = x,$$

[1] При помощи переобозначения $f(x, y) \to g(y, x)$ уравнение $f(x, y) = f(f(z, x), f(z, y))$ сводится к рассматриваемому с одновременной заменой условия 2 на $(\exists z_o \in M) : x \to f(x, z_o)$ – сюръекция.

так и левым нейтральным элементом:

$$\epsilon \circ x = f(\epsilon, \zeta(x)) = \zeta(\zeta(x)) = x.$$

Допустим теперь, что нейтральный элемент не единственен, т.е. $(\exists \hat{\epsilon} \in M)$ такой, что $\hat{\epsilon} \neq \epsilon$ и $(\forall x \in M)$: $\hat{\epsilon} \circ x = x \circ \hat{\epsilon} = x$, тогда, с одной стороны $\hat{\epsilon} \circ \epsilon = \epsilon$, а с другой стороны $\hat{\epsilon} \circ \epsilon = \hat{\epsilon}$, т.о. образом пришли к противоречию с предположением. Итак группоид $(\circ, M)$ имеет единственный нейтральный элемент ϵ.

6^0. Покажем теперь существование и единственность обратного элемента, т.е. $(\forall x \in M), (\exists!\ \zeta(x) \in M) : \zeta(x) \circ x = x \circ \zeta(x) = \epsilon$. Используя результаты п. 1^0 Проверим $\zeta(x)$ в качестве левого обратного элемента:

$$\zeta(x) \circ x = f(\zeta(x), \zeta(x)) = \epsilon,$$

для правого обратного получим:

$$x \circ \zeta(x) = f(x, \zeta(\zeta(x))) = f(x, x) = \epsilon.$$

Осталось показать единственность обратного элемента $\zeta(x)$, что эквивалентно утверждению: $(\forall z, \hat{z} \in M)$ из равенства $f(z, \hat{z}) = \epsilon \Rightarrow z = \hat{z}$. Допустим противоположное, пусть найдутся $z \neq \hat{z} \in M$, что $f(z, \hat{z}) = \epsilon$. Рассмотрим упорядоченную тройку $z, \epsilon, \hat{z}$:

$$z = f(z, \epsilon) = f(f(z, \hat{z}), f(\epsilon, \hat{z})) = f(\epsilon, \zeta(\hat{z})) = \zeta(\zeta(\hat{z})) = \hat{z}.$$

Пришли к противоречию, т.о. наше допущение неверно. Итак в группоиде $(\circ, M)$ для каждого элемента x существует единственный обратный элемент – $\zeta(x)$, обозначим его как x^{-1}. Для исходной функции в новых обозначениях можно записать [2]:

$$f(x, y) = x \circ y^{-1}.$$

7^0. Покажем теперь, что на $(\circ, M)$ выполняется ассоциативность. Рассмотрим сначала упорядоченную тройку x, ϵ, y:

$$x \circ \epsilon^{-1} = (x \circ y^{-1}) \circ (\epsilon \circ y^{-1})^{-1} \Rightarrow x = (x \circ y^{-1}) \circ y. \tag{3}$$

Перепишем теперь соотношение (2) в новых обозначениях:

$$(x \circ y)^{-1} = \zeta(f(x, y^{-1})) = f(y^{-1}, x) = y^{-1} \circ x^{-1}. \tag{4}$$

Определим теперь упорядоченную тройку: $x, (y \circ z)^{-1}, y^{-1}$ тогда в новых обозначениях и с учётом соотношений (3), (4):

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ ((y \circ z)^{-1} \circ y)^{-1} = (x \circ y) \circ (z^{-1})^{-1} = (x \circ y) \circ z.$$

Получили ассоциативность для произвольных элементов множества M. Итак в п. $5^0 - 7^0$ получили все аксиомы группы. Теорема доказана.

Если теперь "забыть"об истоках функционального уравнения (1) – принципе феноменологической симметрии, то с чисто математической точки зрения представляет интерес рассмотреть все его варианты, получающиеся перестановками переменных x, y, z. Таких несводимых друг другу вариантов будет всего восемь (включая уже рассмотренное уравнение):

---

[2]или в эквивалентном виде $f(x, y) = y^{-1} \circ x$

1. f(x, y) = f(f(x, y), f(z, z)),
2. f(x, y) = f(f(y, x), f(z, z)),
3. f(x, y) = f(f(x, z), f(y, z)),
4. f(x, y) = f(f(y, z), f(x, z)),
5. f(x, y) = f(f(x, z), f(z, y)),
6. f(x, y) = f(f(z, y), f(x, z)),
7. f(x, y) = f(f(z, x), f(y, z)),
8. f(x, y) = f(f(y, z), f(z, x)).

С нашей точки зрения наибольший интерес, помимо рассмотренного уравнения, представляет ещё уравнение под номером 4 для которого представим полное решение. Уравнения 1-2 очень экзотичны и накладывают слабые ограничения. Если исходить из того, что f – квазигруппа то решением первого уравнения будет произвольная лупа $(\circ, M)$ так, что $f(x,y) = x \circ y^{-1}$ или $f(x,y) = {}^{-1}y \circ x$ (где ${}^{-1}y$ – левый обратный элемент). Решением второго уравнения будет лупа $(\circ, M)$ с условием: $(\forall x \in M)$: $x^{-1} = {}^{-1}x$ так, что $f(x,y) = x^{-1} \circ y$ или $f(x,y) = y \circ x^{-1}$.

Уравнения 5-8, в отличие от 1-2, наоборот, накладывают очень сильные ограничения так, что их решениями будут абелевы группы $(\circ, M)$ с дополнительным условием: $(\forall x \in M)$: $x^{-1} = x$ так, что $f(x,y) = x \circ y$.
Рассмотрим теперь уравнение 4:

Теорема 2
Если:
1. в группоиде (f, M) $(\forall x, y, z \in M)$ выполняется соотношение:

$$f(x,y) = f(f(y,z), f(x,z)),$$

2. $(\exists z_o \in M)$: $x \to f(z_o, x)$ – сюръекция [3],
тогда группоид (f, M) изотопен абелевой группе $(\circ, M)$ так, что:

$$f(x,y) = x^{-1} \circ y.$$

8^0. Рассматривая упорядоченные тройки (z_o, z_o, x) и (z_o, y, y), как и в п.п. $1^0 - 2^0$ придём аналогичным образом к выводам:

$$(\forall x \in M): \ \ f(x,x) = \epsilon,$$
$$(\forall x \in M): \ \ f(\epsilon, x) = x,$$

т.е. элемент $\epsilon \equiv f(z_o, z_o)$ является теперь уже левым нейтральным элементом.
9^0. Введём функцию ζ определённую как:

$$f(x, \epsilon) \equiv \zeta(x).$$

Рассмотрим упорядоченную тройку x, y, x:

$$f(x,y) = f(f(y,x), f(x,x)) = f(f(y,x), \epsilon) = \zeta(f(y,x))$$

откуда следует:

$$(\forall x \in M): \ \ \zeta(\zeta(x)) = x$$

Аналогичным с п. $3^0 - 4^0$ теоремы 1 можно показать, что ζ – биекция и $\zeta(\epsilon) = \epsilon$.
10^0. При помощи изотопии рассмотрим новый группоид $(\circ, M)$:

$$x \circ y \equiv f(\zeta(x), y)$$

и покажем, что для него выполняются аксиомы группы. Действительно введённый в п. 8^0 элемент ϵ в соответствии с п. 9^0 является как левым

$$\epsilon \circ x = f(\zeta(\epsilon), x) = f(\epsilon, x) = x,$$

[3] При помощи переобозначения $f(x,y) \to g(y,x)$ уравнение $f(x,y) = f(f(z,y), f(z,x))$ сводится к рассматриваемому с заменой условия 2 на $(\exists z_o \in M) : x \to f(x, z_o)$ – сюръекция

так и правым нейтральным элементом:

$$x \circ \epsilon = f(\zeta(x), \epsilon) = \zeta(\zeta(x)) = x.$$

Единственность нейтрального элемента показана в п. 5^0.
11^0. Покажем теперь существование и единственность обратного элемента, т.е. $(\forall x \in M)$, $(\exists!\ \zeta(x) \in M) : \zeta(x) \circ x = x \circ \zeta(x) = \epsilon$. Проверим $\zeta(x)$ в качестве левого обратного:

$$\zeta(x) \circ x = f(\zeta(\zeta(x)), x) = f(x, x) = \epsilon,$$

для правого обратного получим:

$$x \circ \zeta(x) = f(\zeta(x), \zeta(x)) = \epsilon.$$

Осталось показать единственность обратного элемента $\zeta(x)$, что эквивалентно утверждению: $(\forall z, \hat{z} \in M)$ if $f(z, \hat{z}) = \epsilon \Rightarrow z = \hat{z}$. Допустим противоположное, пусть найдутся $z \neq \hat{z} \in M$, что $f(z, \hat{z}) = \epsilon$. Рассмотрим упорядоченную тройку $\epsilon, z, \hat{z}$:

$$z = f(\epsilon, z) = f(f(z, \hat{z}), f(\epsilon, \hat{z})) = f(\epsilon, \hat{z}) = \hat{z}.$$

Пришли к противоречию, т.о. наше допущение неверно. Итак в группоиде $(\circ, M)$ для каждого элемента x существует единственный обратный элемент – $\zeta(x)$, обозначим его как x^{-1}. Для исходной функции в новых обозначениях можно записать:

$$f(x, y) = x^{-1} \circ y.$$

12^0. Покажем теперь, что на $(\circ, M)$ выполняется ассоциативность. Рассмотрим сначала упорядоченную тройку $\zeta(x), y, \epsilon$:

$$f(\zeta(x), y) = f(f(y, \epsilon), f(\zeta(x), \epsilon)) = f(\zeta(y), x)$$

или в новых обозначениях:

$$x \circ y = y \circ x,$$

получили коммутативность в группоиде $(\circ, M)$. Далее рассмотрим упорядоченную тройку x^{-1}, ϵ, y:

$$(x \circ \epsilon) = (\epsilon \circ y)^{-1} \circ (x \circ y) \Rightarrow x = y^{-1} \circ (x \circ y). \tag{5}$$

Перепишем соотношение из п. 9^0 для группоида $(\circ, M)$:

$$(x \circ y)^{-1} = \zeta(f(x^{-1}, y)) = f(y, x^{-1}) = y^{-1} \circ x^{-1}. \tag{6}$$

И, наконец, рассмотрим упорядоченную тройку $(x \circ y)^{-1}, z, y^{-1}$ для которой с учетом коммутативности и соотношений (5), (6) можно записать:

$$(x \circ y) \circ z = (z^{-1} \circ y^{-1})^{-1} \circ ((x \circ y) \circ y^{-1}) \Rightarrow$$
$$(x \circ y) \circ z = (y \circ z) \circ x = x \circ (y \circ z).$$

Получили ассоциативность для произвольных элементов множества M. Итак в группоиде $(\circ, M)$ выполнены аксиомы абелевой группы.
Теорема доказана.

Список литературы

[1] *КУЛАКОВ Ю.И.* Элементы теории физических структур. Новосибирск, 1968. - 226с.

[2] *ИОНИН В.К.* Абстрактные группы как физические структуры //Системология и методологические проблемы информационнологических систем. - Новосибирск, 1990. -Вып. 135: Вычислительные системы. -С. 40-43.