Новости науки

ФИЗИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА РАНГА (3,2).

А.А. Симонов - г. Горно-Алтайск

В работах [1], [2], [3] введены понятия *физической структуры* и *физической структуры алгебраического типа*. В настоящей работе рассмотрена физическая структура ранга (3, 2) в смысле работы [3].Сформулируем задачу применительно к данному случаю.

Для пары (3, 2) возьмём множества, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$ и их прямое произведение $A=\{1,2,3\}\times\{1,2\}$. Для произвольных множеств M, N построим множества кортов, задаваемые всеми инъективными отображениями x: $\{1,2,3\} \to M$, ξ: $\{1,2\} \to N$. Множество всех отображений вида $\phi = x \times \xi$ будем обозначать как Φ. На тройке (M, N, B) действует функция f: $M \times N \to B$, называемая *репрезентатором* физической структуры.

Под *верификатором* физической структуры будем понимать функциональное соответствие g_{11}: $B^{2\cdot 3-1} \to B$. *Верификатор* можно представить в виде матрицы[1] $\gamma = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{pmatrix}$ такой, что $f_{11} = g_{11}\begin{pmatrix} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{pmatrix}$. Множество всех таких матриц обозначим как Γ. Шестёрка[2] (Φ, f, A, M, N, B) определяет физическую структуру алгебраического типа, если диаграмма коммутативна. За точной формулировкой физической структуры алгебраического типа необходимо обращаться к работе [3].
Перед формулировкой теоремы введём некоторые обозначения. Для произвольных элементов $u, v \in B$ множества $B \setminus \{u\}$ и $B \setminus \{u, v\}$ будем обозначать соответственно B_u и B_{uv}. Множество B^2 без диагональных элементов обозначим как

$$\Omega = B^2 \setminus \{(u,u) \mid u \in B\}.$$

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[rr, "\Gamma"] & & B \end{tikzcd}$$

Теорема (ФС ранга (3, 2)).
При выполнении аксиом ФС для $(r, s) = (3, 2)$ следует:
1. Существование таких биективных соответствий x: $M \to B$, ζ: $N \to \Omega$ и такой функции f: $B\times\Omega \to B$, что ФС (g, M, N, B) эквивалентна ФС (f, B, Ω, B) и справедливо: $(\forall\ \alpha \in N)$, $(\forall\ i \in M)$: $g(i, \alpha) = f(x(i), \zeta(\alpha))$.
2. На множестве B индуцирована алгебра $(0, e, ^{-1}, \varphi, \cdot, B)$, где:
2.1. элемент $0 \in B$ в частичной операции $(\cdot)$:$B\times B_0 \to B$ является левым зануляющим элементом: $(\forall\ x \in B_0)$: $0 \cdot x = 0$;

[1] Как правило, под верификатором подразумевается именно такая матрица.
[2] В данном случае, когда определен ранг ФС и множество кортов, то вместо шестёрки далее будем говорить о четвёрке (f, M, N, B).

2.2. алгебра, построенная на ограничении частичной операции $(\cdot)$ на множество B_0 – $(e, {}^{-1}, \cdot, B_0)$ будет групповой;
2.3. для функции φ: $B \to B$, $\varphi(0) = e$, для произвольных $x \in B$, $y \in B_e$ выполнено соотношение:

$$\varphi(\varphi(x)\cdot\varphi(y)) = \begin{cases} \varphi\left(x\cdot\varphi(\frac{1}{y})\right)\cdot y & \text{при } y \neq 0 \\ x & \text{при } y = 0 \end{cases}$$

3. Репрезентатор представим в виде:

$$f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha) = \begin{cases} \varphi\left(x_i\cdot\varphi(\xi_\alpha\cdot\frac{1}{\eta_\alpha})\right)\cdot\eta_\alpha & \text{при } \eta_\alpha \neq 0 \\ x_i\cdot\xi_\alpha & \text{при } \eta_\alpha = 0 \end{cases}$$

Доказательство

1^0 Для произвольных $m \neq n \in M$, $\sigma \in N$ построим биекции:
x: $M \to B$ и ζ: $N \to \Omega$.
Действительно, если определить функцию ζ как
ζ: $\alpha \to (g(m, \alpha), g(n, \alpha))$
тогда, представленная таким образом функция будет сюръективной - как следствие аксиомы[3] 4 и инъективной - как следствие леммы 3.
Аналогично,
функция x: $i \to g(i, \sigma)$ будет биективной (сюръекция следует из аксиомы 3, инъективность следует из леммы 3 для $s = 2$). Перепишем тогда *репрезентатор* в виде:
$g(i, \alpha) = g(x^{-1}(x_i), \zeta^{-1}(\xi_\alpha,\eta_\alpha)) = f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$,
где $\xi_\alpha = g(m,\alpha)$, $\eta_\alpha = g(n,\alpha)$, $x_i = x(i, \sigma)$.
Положение пункта 1 теоремы доказано.
Произведём эквивалентное преобразование:
$(g, M, N, B) \to (f, B, \Omega, B)$.
Тогда для *репрезентатора* f выполнены следующие соотношения:

$$f(x_i, \xi_\sigma, \eta_\sigma) = x_i$$
$$f(x_m, \xi_\alpha, \eta_\alpha) = \xi_\alpha$$
$$f(x_n, \xi_\alpha, \eta_\alpha) = \eta_\alpha \tag{1}$$

Рассматривая частный случай $\alpha = \sigma$ приходим к:
$f(x_m, \xi_\sigma, \eta_\sigma) = \xi_\sigma = x_m$
$f(x_n, \xi_\sigma, \eta_\sigma) = \eta_\sigma = x_n$
Введём обозначения: $x_m = e$, $x_n = 0$, тогда соотношения (1) перепишутся в виде:

$$f(x, e, 0) = x \tag{2}$$

$$f(e, \xi, \eta) = \xi \tag{3}$$

$$f(0, \xi, \eta) = \eta \tag{4}$$

2^0 Рассмотрим частичную операцию (далее просто *операцию*):

$$f_0: B \times B_0 \to B,$$

определённую как $f_0(x, y) = f(x, y, 0)$. Элемент e - будет нейтральным элементом в операции (f_0, B), что следует из соотношений (2) и (3). Очевидно, что ограничение операции f_0 на подмножестве B_0 - будет группоидом с нейтральным
элементом - e.

[3] Здесь и далее приводимые ссылки на аксиомы и леммы относятся к работе [3].

Для частичной операции f_0 введём специальное обозначение:

$$f_0(x, y) = x \cdot y = x\, y, \text{ где } x \in B,\ y \in B_0. \tag{5}$$

Рассматривая *верификаторы*, построенные на корте $\langle x, e, 0\rangle \times \langle ((y \cdot z), 0), (y, 0)\rangle$:

$$f(x, y\cdot z, 0) = g_{11}\begin{pmatrix} & f(e, y\cdot z, 0) & f(0, y\cdot z, 0) \\ f(x, y, 0) & f(e, y, 0) & f(0, y, 0)\end{pmatrix} = g_{11}\begin{pmatrix} & y\cdot z & 0 \\ f(x, y, 0) & y & 0\end{pmatrix}$$

и корте $\langle (x \cdot y), y, 0\rangle \times \langle (z, 0), (e, 0)\rangle$:

$$f(x\cdot y, z, 0) = g_{11}\begin{pmatrix} & f(y, z, 0) & f(0, z, 0) \\ f\big((x\cdot y), e, 0\big) & f(y, e, 0) & f(0, e, 0)\end{pmatrix} = g_{11}\begin{pmatrix} & y\cdot z & 0 \\ x\cdot y & y & 0\end{pmatrix}$$

приходим к равенству:

$$(x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z),$$

т.е. ассоциативности операции f_0. Кроме того, из аксиомы 3 и леммы 3 следует:

$$(\forall\ y \in B_0),\ (\forall\ z \in B),\ (\exists!\ x \in B):\ x \cdot y = z,$$

следовательно, можно ввести функцию взятия левого обратного - e_0: $B_0 \to B_0$ так, что $(\forall\ x \in B_0)$, $(\exists!\ e_0(x) \in B_0)$: $e_0(x) \cdot x = e$, приходим к тому, что ограничение операции f_0 на подмножестве B_0 является групповой операцией, следовательно, левая и правая обратные совпадают и более естественно её обозначать в виде $e_0(x) = x^{-1}$. Положение пунктов 2.1. и 2.2. теоремы доказаны.

3^0 Рассмотрим *верификатор*, построенный на корте $\langle x, e, 0\rangle \times \langle (\xi, \eta), (u, 0)\rangle$

$$f(x, \xi, \eta) = g_{11}\begin{pmatrix} & \xi & \eta \\ x\cdot u & u & 0\end{pmatrix}, \tag{6}$$

и корте $\langle x, y, 0\rangle \times \langle (\xi, \eta), (e, 0)\rangle$

$$f(x, \xi, \eta) = g_{11}\begin{pmatrix} & f(y, \xi, \eta) & \eta \\ x & y & 0\end{pmatrix},$$

перепишем теперь данное выражение, с учётом (6):

$$f(x, \xi, \eta) = f(x \cdot y^{-1}, f(y, \xi, \eta), \eta). \tag{7}$$

Хотя данное выражение было получено при некоторых ограничениях на x, y, ξ, η:

$$x, y \in B_0,\ x \neq y,\ (\xi, \eta) \in \Omega \setminus \{(e, 0)\},\ (\xi, \eta) \neq (y^{-1}, 0),$$

но, как легко проверить, оно остаётся справедливым и для произвольных элементов $x, y, \xi, \eta \in B$ с единственным ограничением: $y \neq 0$.

4^0 Построим биективное соответствие ψ_η: $B \to B$ как:

$$\psi_\eta(x) = \begin{cases} f\big(x, 0, \eta\big) & \text{при}\ \eta \neq 0 \\ x & \text{при}\ \eta = 0\end{cases} \tag{8}$$

Введём специальное обозначение для соответствия $\psi_e(x) = \varphi(x)$. Рассмотрим теперь *верификатор*, построенный на корте $\langle \varphi(x), 1, 0\rangle \times \langle (0, 1), (1, 0)\rangle$:

$$\varphi\big(\varphi(x)\big) = f(\varphi(x), 0, e) = g_{11}\begin{pmatrix} & 0 & e \\ \varphi(x) & e & 0\end{pmatrix}$$

Сравнивая его с *верификатором*, построенном на корте $\langle x, 0, 1\rangle \times \langle (1,0), (0,1)\rangle$,

приходим к выражению:

$$\varphi(\varphi(x)) = x. \tag{9}$$

Хотя данное выражение было получено при условии $x \in B_{0e}$, но из определения (8) следует, $\varphi(0) = e$ и $\varphi(e) = 0$, следовательно, выражение (9) справедливо для произвольного $x \in B$. Рассмотрим теперь *верификатор*, построенный на корте $<\varphi(x), 0, 1> \times <(\eta, 0), (1, 0)>$:

$$\varphi(x)\eta = f(\varphi(x),\eta,0) = g_{11}\begin{pmatrix} & 0 & \eta \\ \varphi(x) & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Сравнивая его с *верификатором*, построенном на корте $<x, 1, 0> \times <(0, \eta), (0,1)>$, приходим к равенству

$$\psi_\eta(x) = \varphi(x)\eta, \tag{10}$$

справедливому для $(\forall\ x \in B)$, $(\forall\ \eta \in B_0)$. С учётом соотношения (9) обратное отображение для (10) выражается в виде:

$$\psi_\eta^{-1}(x) = \varphi(x \cdot \eta^{-1}). \tag{11}$$

5^0 Используя соответствие (8) построим частичную операцию ω_η: $B \times B_0 \to B$ в виде:

$$\omega_\eta(x,y) = \begin{cases} \psi_\eta^{-1}\left(f\left(x,\psi_\eta(y),\eta\right)\right) & \text{при } \eta \neq 0 \\ x \cdot y & \text{при } \eta = 0 \end{cases}. \tag{12}$$

Элемент e - будет нейтральным элементом в частичной операции (ω_η, B), что следует из соотношений (2), (3), (8). Из аксиомы 3 следует, что на подмножестве B_0 определена операция взятия левого обратного e_η: $B_0 \to B_0$ так, что

$$(\forall\ x \in B_0):\ \omega_\eta(e_\eta(x), x) = e,$$

а элемент $0 \in B$ является левым зануляющим элементом:

$$\omega_\eta(0, x) = 0.$$

Выражение (7) с учётом (12) можно переписать в виде:

$$\omega_\eta(x, u) = \omega_\eta(x \cdot y^{-1}, \omega_\eta(y, u)). \tag{13}$$

Рассматривая для (13) частный случай $x = e$, $y = e_\eta(u)$ получим:

$$e_\eta(u) = u^{-1}.$$

Тогда для (13) при $y = u^{-1}$ получим:

$$\omega_\eta(x, u) = x\ u.$$

Следовательно, выражение (12) с учётом (10) и (11) можно переписать в виде:

$$f(x,\xi,\eta) = \psi_\eta\left(\omega_\eta(x,\psi_\eta^{-1}(\xi))\right) = \begin{cases} \varphi\left(x\varphi(\xi\frac{1}{\eta})\right)\eta & \text{при } \eta \neq 0 \\ x\xi & \text{при } \eta = 0 \end{cases}. \tag{14}$$

Положение пункта 3 теоремы доказано.

6^0 Из соотношений (2 - 4) наряду с введённой в 2^0 частичной операцией f_0 можно ввести частичную операцию f_e: $B \times B_e \to B$ (далее просто *операцию*) определённую как:

$$f_e(x,y) = f(x, e, y) \equiv x \bullet y.$$

Для того чтобы воспользоваться полученными в параграфах 2^0 - 5^0 результатами, произведём переобозначение:

$$(f(x, \xi, \eta), e, 0) \to (f'(x, \xi, \eta), 0, e),$$

где $f'(x, \xi, \eta) = f(x, \eta, \xi)$. Тогда ограничение операции f_e на подмножестве B_e будет групповой операцией. При этом, на подмножестве B_e для каждого элемента $x \in B_e$ определена его обратная e':$B_e \to B_e$

$$f_e\ (e'(x),\ x) = 0.$$

Аналогично с введением в 4^0 функции ψ введём функцию ψ':

$$\psi'_\eta(x) = \begin{cases} f(x,\xi,e) & \text{при}\ \xi \neq e \\ x & \text{при}\ \xi = e \end{cases}$$

откуда можно получить эквивалентное (14) выражение:

$$f(x,\xi,\eta) = \psi'_\xi\left(x \bullet \psi'^{-1}_\xi(\eta)\right) = \begin{cases} \varphi(x \bullet \varphi(\xi \bullet e'(\xi))) & \text{при}\ \xi \neq e \\ x \bullet \eta & \text{при}\ \xi = e \end{cases}. \tag{15}$$

Сравнивая (14) и (15) при $\xi = e$ (и, следовательно, $\eta \neq e$) приходим к выражению операции ($\bullet$) через операцию ($\cdot$):

$$x \bullet \eta = f(x,e,\eta) = \begin{cases} \varphi\left(x\varphi(\frac{1}{\eta})\right)\eta & \text{при}\ \eta \neq 0 \\ x & \text{при}\ \eta = 0 \end{cases}. \tag{16}$$

Сравнивая (14) и (15) при $\xi = 0$ приходим к соотношению:

$$\varphi(x)\cdot\eta = \varphi(x\bullet\varphi(\eta)),$$

иначе говоря, с учётом соотношения (9) можно записать:

$$x\bullet y=\varphi(\varphi(x)\cdot\varphi(y)),\ \text{при}\ x \in B,\ y \in B_e, \tag{17}$$

т.е. φ: $(\bullet\ ,B) \to (\cdot\ ,B)$ - изоморфизм.

С учётом (16) при $y \neq e$ получаем соотношение

$$\varphi(\varphi(x)\varphi(y)) = \begin{cases} \varphi\left(x\varphi(\frac{1}{y})\right)y & \text{при}\ y \neq 0 \\ x & \text{при}\ y = 0 \end{cases}. \tag{18}$$

Положение пункта 2.3. теоремы доказано.

Соотношение (18) для частного случая $\frac{1}{x} = \varphi\left(\frac{1}{y}\right)$, $x \in B_{0e}$ в обозначениях ρ: $B_{0e} \to B_{0e}$, где функция $\rho(x) = \varphi(x^{-1})$, имеет простой вид:

$$\rho^3(x) = x.$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что полученный результат хорошо согласуется с решениями,
физической структуры ранга (3, 2) когда множество B рассматривается как R [4], R^2 [5] и эти результаты можно рассматривать как представления алгебры (0, e, $^{-1}$, φ, $\cdot$, B) на конкретных множествах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.И. Кулаков. Элементы теории физических структур (с дополнениями Г.Г. Михайличенко) // Н.: НГУ. 1968.
2. Г.Г. Михайличенко. Математический аппарат теории физических структур. //Горно-Алтайск: Универ-Принт ГАГУ, 1997.
3. А.А. Симонов. Аксиомы физической структуры и простейшие следствия. // Горно-Алтайск, Наука, культура, образование, 1999, №3, с. 177-180.
4. Г.Г. Михайличенко. Бинарная физическая структура ранга (3, 2). // Сиб. матем. ж. 1973, Т.XIV, №5, с. 1057-1064.
5. Г.Г. Михайличенко. Двуметрические физические структуры и комплексные числа. // ДАН 1991, том 321, №4, с. 677-680.