Федеральное агентство по образованию
Омский государственный технический университет

А. А. Симонов, И. А. Фирдман

Алгебраическая теория биформ. Случай ранга (n+1,2)

Препринт №BM07-02

Омск, 2007

Симонов А. А., Фирдман И. А. Алгебраическая теория биформ. Случай ранга $(n+1, 2)$: Препринт №ВМ07-02. Омск, ОмГТУ, 2007 – 17 с.

Введение

Принцип феноменологической симметрии и связанное с ним понятие физической структуры были введены Ю. И. Кулаковым [3]–[6] и затем развивались его учениками Г. Г. Михайличенко [8]–[13] и В. Х. Львом [7] с целью анализа и возможной унификации известных физических законов и метрических многообразий.

Исследование алгебраических аспектов феноменологической симметрии было начато В. К. Иониным [1], [2] и затем продолжено А. А. Симоновым [15]–[?] и И. А. Фирдманом [19], [21]. Фирдманом рассматривались также алгебраические физические структуры с требованием непрерывности [20], [21].

В 2005 г. Симоновым был анонсирован результат [17], согласно которому алгебраические структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ ранга $(n+1,2)$ в предложенной им [16] аксиоматике находятся в соответствии с точно n-транзитивными группами преобразований множества R. В данной работе приводится доказательство этого утверждения и его топологизация для случая непрерывных физических структур. На основе полученного соответствия проводится классификация непрерывных физических структур ранга $(n+1,2)$ с указанием в явном виде действия биформы $\langle,\rangle$.

1 Классификационные результаты для n-транзитивных непрерывных групп преобразований

Приведем для полноты изложения следующие известные результаты о n-транзитивных непрерывных группах преобразований, которыми мы будем пользоваться далее ([14], [22],[23]).

Определение 1.1. *Пусть G — группа преобразований множества E. G называется точно n-транзитивной группой преобразований E, если для любых двух упорядоченных наборов из n попарно различных элементов $a_1, \ldots, a_n \in E$, $b_1, \ldots, b_n \in E$ найдется ровно один элемент $g \in G$ такой, что $g(a_k) = b_k$, $k = 1, \ldots, n$.*

Теорема 1.1. *Если E — бесконечное множество, то для $n \geq 4$ не существует точно n-транзитивных групп преобразований E.*

Определение 1.2. *Пусть G — топологическая группа, E — топологическое пространство. G называется непрерывной группой преобразований* *топологического пространства E, если G является группой преобразований множества E и отображение $G \times E \to E$, сопоставляющее каждой паре элементов $(g, e) \in G \times E$ элемент $g(e) \in E$, является непрерывным.*

Теорема 1.2. *Пусть G — точно 3-транзитивная непрерывная группа преобразований локально компактного, не всюду несвязного, удовлетворяющего первой аксиоме счетности топологического пространства E. Тогда найдется такой гомеоморфизм φ пространства E на вещественную или комплексную проективную прямую, что группа $\varphi G \varphi^{-1}$ окажется группой всех дробно-линейных преобразований этой прямой (с топологией, индуцированной топологией прямого произведения на множестве коэффициентов этих преобразований).*

Для формулировки следующей теоремы нам понадобится ввести следующее обозначение. Пусть $\mathbb{H}$ — тело кватернионов, Γ – однопараметрическая подгруппа ее мультипликативной группы, такая, что для каждого вещественного положительного числа r найдется в точности один элемент из Γ с нормой r (будем обозначать его $\gamma(r)$, функция $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{H}$ непрерывна). Обозначим за G_Γ группу преобразований $\mathbb{H}$, состоящую из следующих преобразований:

$$y(x) = a \cdot x \cdot b + c \qquad (a, b, c \in \mathbb{H},\ |a| = 1,\ b \in \Gamma).$$

Согласно [23], G_Γ (с топологией, индуцированной топологией $\mathbb{H}^3$) будет непрерывной точно 2-транзитивной группой преобразований $\mathbb{H}$.

Теорема 1.3. *Пусть G — точно 2-транзитивная непрерывная группа преобразований локально компактного, связного, удовлетворяющего первой аксиоме счетности топологического пространства E. Тогда найдется такой гомеоморфизм φ пространства E на множество вещественных чисел, комплексных чисел или кватернионов, что группа $\varphi G \varphi^{-1}$ окажется группой всех линейных преобразований вида $y(x) = a \cdot x + b$ ($a \neq 0$) соответствующего тела, либо, в последнем случае, группой вида G_Γ.*

2 Аксиоматика физической структуры ранга $(n+1, 2)$ и формулировка классификационной теоремы.

Рассмотрим многоосновную алгебраическую систему $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$, где $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — произвольные множества, R — хаусдорфово локально компактное, связное топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, $\langle,\rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ — отображение, называемое биформой.

Будем предполагать, что биформа удовлетворяет условию невырожденности в его обычном смысле.

Пусть задано натуральное число n. Обозначим за $\overline{R^n} \subseteq R^n$ множество всех таких n-ок элементов R, все элементы в каждой из которых попарно различны. Обозначим за $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}^n$ множество всех n-ок элементов $\mathcal{M}$, все элементы которых попарно различны. Будем говорить, что система $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \langle,\rangle, R)$ является непрерывной физической структурой ранга $(n+1, 2)$, если она удовлетворяет, кроме условия невырожденности биформы, следующим аксиомам:

Аксиома T1' Существует такая функция $F : R \times R^n \times R^n \to R$, определенная и непрерывная на подмножестве $R \times \overline{R^n} \times \overline{R^n}$, что для всех $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}},\ i \in \mathcal{M},\ \mathfrak{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}},\ \alpha \in \mathcal{N}$ выполнено

$$\langle i, \alpha \rangle = F(\langle i, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \mathfrak{A} \rangle, \langle I, \alpha \rangle).$$

Аксиома A2" Для любого элемента $\alpha \in \mathcal{N}$ и любого $r \in R$ найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \alpha \rangle = r$. Для любой n-ки $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ и любой n-ки $r \in \overline{R^n}$ найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \alpha \rangle = r$.

Зададим на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ топологию таким же образом, как [20], [21] — как минимальную, в которой биформа раздельно непрерывна.

Теорема 2.1. *Для любой непрерывной физической структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle,\rangle)$ ранга $(n+1, 2)$, $n \geq 2$, выполняются следующие утверждения.*

1. *Ранг структуры должен принимать одно из значений $(3, 2)$, $(4, 2)$.*

2. *Для произвольных $Z \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $\omega \in \mathcal{N}$ отображения $\langle Z, \cdot \rangle : \mathcal{N} \to \overline{R^n}$ и $\langle \cdot, \omega \rangle : \mathcal{M} \to R$ будут гомеоморфизмами (далее в формулировке теоремы также считаем $Z \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $\omega \in \mathcal{N}$ произвольными).*

3. *В случае ранга $(3, 2)$ найдется такой гомеоморфизм $\varphi : R \to T$, где T — топологическое пространство вещественных чисел $\mathbb{R}$, комплексных чисел $\mathbb{C}$ или кватернионов $\mathbb{H}$, что будет иметь место одно из следующих тождеств, выполненное для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ (обозначаем $\langle i, \omega \rangle = x_1$, $\langle Z, \alpha \rangle = (\xi_1, \xi_2)$, $+$ и $\cdot$ — обычные сложение и умножение в соответствующих топологических телах T):*

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}((\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)) \cdot \varphi(x_1) + \varphi(\xi_2)), \qquad T = \mathbb{R},\ \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{H}; \tag{2.1}$$

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}(a \cdot \varphi(x_1) \cdot b + \varphi(\xi_2)), \tag{2.2}$$

где $T = H$, $\Gamma \subset \mathbb{H}$ и отображение $\gamma : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ описаны в теореме 1.2, $a = (\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)) \cdot b^{-1}$, $b = \gamma(|\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)|)$.

4. *В случае ранга $(4, 2)$ найдется такой гомеоморфизм $\varphi : R \to T$ (где T — это вещественная проективная прямая $RP_1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ или $CP_1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$), что для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$*

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}\left(\frac{a \cdot \varphi(x_1) + b}{c \cdot \varphi(x_1) + d}\right), \tag{2.3}$$

где $x_1 = \langle i, \omega \rangle$, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \langle Z, \alpha \rangle$, a, b, c, d — такие элементы T, что дробно-линейное преобразование $y(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ переводит упорядоченную тройку точек $(0, 1, \infty)$ в $(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \varphi(\xi_3))$.

Замечание 2.1. Все представленные в данной классификации структуры могут быть построены.

Отметим, что случай ранга $(2, 2)$ был разобран В. К. Иониным [1] без требования согласованности биформы с какой-либо топологией на R. Приведем соответствующий результат для полноты изложения.

Теорема 2.2. *Пусть $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ — многоосновная алгебраическая система, удовлетворяющая аксиомам невырожденности биформы, T1 (без требования непрерывности F), A2' (с рангом $(2, 2)$).*

Тогда для произвольных элементов $z \in \mathcal{M}$, $\omega \in \mathcal{N}$ мы можем так задать на R структуру группы с единицей $e = \langle z, \omega \rangle$, что для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$

$$\langle i, \alpha \rangle = \langle i, \omega \rangle \cdot \langle z, \alpha \rangle,$$

где $\cdot$ — умножение в группе R.

Функция F при этом представляется для произвольных $x, y, z \in R$ в виде

$$F(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z.$$

Из наличия топологии на R и требования непрерывности F в аксиоме T1 тогда будет сразу следовать согласованность операции $\cdot$ в группе R с топологией — достаточно подставить в выражение для F в теореме 2.2 $z = e$.

3 Предварительные леммы

Фиксируем некоторые элементы $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{M}$, такие, что $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{M}^n$, и элемент $\omega \in \mathcal{N}$.

Лемма 3.1. *Для всех $I \in \mathcal{B}_\mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ отображения $\langle I, \cdot\rangle : \mathcal{N} \to \overline{R^n}$, $\langle \cdot, \alpha\rangle : \mathcal{M} \to R$ биективны.*

Доказательство. Сюръективность данных отображений составляет содержание аксиомы A2". Покажем инъективность отображения $\langle I, \cdot\rangle$ для фиксированного $I \in \mathcal{B}_\mathcal{M}$. Действительно, если найдутся такие $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \alpha\rangle = \langle I, \alpha'\rangle$, то для любого $i \in \mathcal{M}$ $\langle i, \alpha\rangle = F(\langle i, \omega\rangle, \langle I, \omega\rangle, \langle I, \alpha\rangle) = \langle i, \alpha'\rangle$, откуда, ввиду невырожденности биформы, следует $\alpha = \alpha'$, что дает инъективность $\langle I, \cdot\rangle$. Аналогично получается и инъективность $\langle \cdot, \alpha\rangle$ для любого $\alpha \in \mathcal{N}$. □

Покажем, что для нашей системы будет выполняться аксиома A1 [19], [21].

Лемма 3.2. *Пусть $I' \in \mathcal{M}^n$, $i, i' \in \mathcal{M}$, $\alpha, \alpha', \beta' \in \mathcal{N}$. Пусть $\langle Z, \beta'\rangle = \langle I', \omega\rangle$, $\langle i', \omega\rangle = \langle i, \beta'\rangle$, $\langle Z, \alpha'\rangle = \langle I', \alpha\rangle$. Тогда $\langle i', \alpha\rangle = \langle i, \alpha'\rangle$.*

Доказательство. Заметим, что $\langle Z, \beta'\rangle \in \overline{R^n}$, поскольку все элементы из Z попарно различны, а отображение $\langle I, \cdot\rangle$ инъективно. Теперь если для некоторых $I' \in \mathcal{M}^n$, $\beta' \in \mathcal{N}$ выполнено $\langle Z, \beta'\rangle = \langle I', \omega\rangle$, то, ввиду биективности $\langle \cdot, \omega\rangle$, должны быть различными и элементы из I', и поэтому $I' \in \mathcal{B}_\mathcal{M}$. Теперь доказываемое утверждение является тривиальным следствием аксиомы T1': $\langle i', \alpha\rangle = F(\langle i', \omega\rangle, \langle I', \omega\rangle, \langle I', \alpha\rangle) = F(\langle i, \beta'\rangle, \langle Z, \beta'\rangle, \langle Z, \alpha'\rangle) = \langle i, \alpha'\rangle$. □

Определим так же, как в главе [19], [21], отношение зависимости на $\mathcal{N}$ и связанный с ним набор функций. А именно, для элементов $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ будем говорить, что β зависит от α, если для любых $i, i' \in \mathcal{M}$ из $\langle i, \alpha\rangle = \langle i', \alpha\rangle$ следует $\langle i, \beta\rangle = \langle i', \beta\rangle$. Каждому элементу $\alpha \in [\omega]$ сопоставим функцию $u_\alpha^R \to R$, такую, что $u(\langle i, \omega\rangle) = \langle i, \alpha\rangle$ (это определение корректно в силу леммы 3.1). Обозначим множество всех таких функций $\langle u_\alpha | \alpha \in \mathcal{N}\} = U$ (ср. с $U_\mathcal{N}$ [19], [21]). Поскольку отображение $\langle \cdot, \omega\rangle$ сюръективно, каждая такая функция определена на всем R. В [19], [21] показано, что из аксиомы A1 следует аксиома A5, а именно следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Множество U замкнуто относительно композиции функций.*

Кроме того, U содержит тождественную функцию $\mathrm{id} = U[\omega]$.

Лемма 3.4. *$\overline{R^n}$ будет открыто в R^n*

Доказательство. Пусть $(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{R^n}$. Мы можем построить его открытую в R^n окрестность, лежащую в $\overline{R^n}$, следующим образом: находим с помощью хаусдорфовости систему непересекающихся окрестностей $A_1, \ldots, A_n$ элементов $a_1, \ldots, a_n$ в R (строим для каждой пары элементов окрестности, отделяющие их друг от друга; после этого A_1, например, будет пересечением $n-1$ построенных окрестностей элемента a_1), и затем в качестве нужной нам окрестности берем $A = A_1 \times \ldots \times A_n \subseteq R^n$. $\square$

Лемма 3.5. *Для любых $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ отображения $\langle I, \cdot\rangle$, $\langle \cdot, \alpha\rangle$ являются гомеоморфизмами.*

Доказательство. Действительно, непрерывность сразу следует из раздельной непрерывности биформы. Покажем открытость отображения $\langle I, \cdot\rangle$.

Докажем, например, первое утверждение. Нам достаточно показать, что открыты образы всех элементов некоторой открытой базы топологии пространства $\mathcal{N}$. Предбаза рассматриваемой нами топологии состоит из всех множеств вида $\pi_j^{-1}(U)$, $j \in \mathcal{M}$, U — открытое подмножество R. Пусть $\pi_{j_1}^{-1}(U_1), \ldots,\ \pi_{j_k}^{-1}(U_k)$, где $(j_1, \ldots, j_k) = J \in \mathcal{M}^k$, $U_1, \ldots,\ U_k$ — открытые подмножества R, есть некоторый конечный набор элементов предбазы. Рассмотрим некоторый j_t, $1 \leq t \leq k$. Фиксируем какую-нибудь базу $\mathfrak{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$. Из аксиомы T1' получаем тогда, что для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle j_t, \alpha\rangle = F(\langle j_t, \mathfrak{A}\rangle, \langle I, \mathfrak{A}\rangle, \langle I, \alpha\rangle) = u_t(\langle I, \alpha\rangle)$ (при любом фиксированном j_t). При этом $u_t : R^n \to R$ определена на открытом множестве $\overline{R^n}$, ввиду аксиомы A2', и непрерывна, ввиду непрерывности F.

Через $u : \overline{R^n} \to R^k$ обозначим декартово произведение отображений $u_1, \ldots, u_k : R^n \to R$. Из построения следует, что u определено на $\overline{R^n}$, непрерывно, и для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ верно $u(\langle I, \alpha\rangle) = \langle J, \alpha\rangle$. Тогда $\pi_I(\pi_{j_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_{j_k}^{-1}(U_k)) = \{\langle I, \alpha\rangle,\ \alpha \in \mathcal{N} : \langle j_1, \alpha\rangle \in U_1, \ldots, \langle j_k, \alpha\rangle \in U_k\} = u^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_k)$, то есть, ввиду непрерывности u, открыто в $\overline{R^n}$, а значит, ввиду леммы 3.4, и в R^n. Таким образом, мы доказали, что π_I переводит любое множество из открытой базы $\mathcal{N}$ в открытое множество из R^n, что нам и требовалось.

Открытость отображения $\langle , \cdot\alpha\rangle$ доказывается точно так же. $\square$

Дословно повторяя доказательства предложения 3 [20] и леммы 2 [20], мы получаем также следующие утверждения.

Лемма 3.6. *Все функции из U непрерывны.*

Лемма 3.7. *Биформа $\langle,\rangle$ совместно непрерывна.*

4 Групповая структура на U

Обозначим далее $\langle Z, \omega \rangle = (e_1, \ldots, e_n) = E$. Очевидно, все $e_1, \ldots, e_n$ различны (иначе база Z содержала бы совпадающие элементы).

Лемма 4.1. *Пусть $a_1, \ldots, a_n \in R$ попарно различны. Тогда для любых $b_1, \ldots, b_n$ найдется $u \in U$, такая, что $u(a_1) = b_1, \ldots, u(a_n) = b_n$.*

Доказательство. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ возьмем такой $i_k \in \mathcal{M}$, что $\langle i_k, \omega \rangle = r_k$. Поскольку все $a_1, \ldots, a_n$ различны, то и все $i_1, \ldots, i_n$ различны. Тогда $(i_1, \ldots, i_n) = I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$. Возьмем, с помощью аксиомы A2', такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \alpha \rangle = (b_1, \ldots, b_n)$. Тогда $u = U[\alpha]$, легко видеть, удовлетворяет условиям предложения. □

Лемма 4.2. *Пусть $a_1, \ldots, a_n \in R$. Тогда существует единственная функция $u \in U$, такая, что $u(e_1) = a_1, \ldots, u(e_n) = a_n$.*

Доказательство. Следует непосредственно из определения U и из биективности отображения $\langle Z, \cdot \rangle$: соответствующая функция u будет функцией $U[\alpha]$ для такого $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle Z, \alpha \rangle = (a_1, \ldots, a_n)$. □

Лемма 4.3. *Множество U является группой относительно композиции функций.*

Доказательство. Нам осталось доказать только наличие обратного элемента относительно композиции. Пусть $u \in U$. Обозначим $a_1 = u(e_1), \ldots, a_n = u(e_n)$. Все $a_1, \ldots, a_n$ попарно различны, так как в противном случае для $\alpha \in \mathcal{N}$, такого, что $u = U[\alpha]$, получаем $\langle Z, \alpha \rangle = (u(\langle z_1, \omega \rangle), \ldots, u(\langle z_n, \omega \rangle)) = (a_1, \ldots, a_n)$, и если в наборе $a_1, \ldots, a_n$ есть совпадающие элементы, то они, ввиду инъективности отображения $\langle Z, \cdot \rangle$, будут и в наборе $z_1, \ldots, z_n$ — противоречие. Пусть $u' \in U$ - такая (существующая по лемме 4.1) функция, что $u'(a_1) = e_1, \ldots, u'(a_n) = e_n$. Обозначим $v = u' \circ u$. $v' \in U$ как композиция функций из U (лемма 3.3). При этом $v(e_1) = e_1, \ldots, v(e_n) = e_n$. Согласно лемме 4.2, в U есть только одна такая функция, а именно тождественная. Поэтому u' будет обратной к u. □

Лемма 4.4. *Пусть $a_1, \ldots, a_n \in R$ попарно различны, $b_1, \ldots, b_n \in R$ попарно различны. Тогда существует единственная функция $u \in U$, такая, что $u(a_1) = b_1, \ldots, u(a_n) = b_n$.*

Доказательство. Существование было доказано леммой 4.1. Покажем единственность. Пусть функции $u, u' \in U$ удовлетворяют условиям предложения. Рассмотрим функции $v, v' \in U$, такие, что $v(e_1) = a_1, \ldots, v(e_n) = a_n$, $v'(e_1) = b_1, \ldots, v'(e_n) = b_n$. Обозначим $w = (v')^{-1} \circ u \circ v \in U$. Для нее $w(e_1) = e_1, \ldots, w(e_n) = e_n$, откуда, по лемме 4.2, $w = \mathrm{id}$, что означает $u = v' \circ v^{-1}$. Аналогично $(v')^{-1} \circ u' \circ v = \mathrm{id}$, что дает $u = v' \circ v^{-1}$. Таким образом, $u = v' \circ v^{-1} = u'$. $\square$

Нами доказано, таким образом (леммы 4.3, 4.4), следующее

Предложение 4.1. *U является точно n-транзитивной группой преобразований множества R.*

Зададим теперь топологию на U следующим образом. Каждому элементу $u \in U$ однозначно соответствует элемент $\alpha \in \mathcal{N}$, такой, что $u = U[\alpha]$. При этом отображение $\langle Z, \cdot \rangle$ задает гомеоморфное соответствие между $\mathcal{N}$ и R^n. Таким образом, мы имеем биективное соответствие $U \to \overline{R^n}$. Обозначим это отображение как $N : U \to \overline{R^n}$ и будем рассматривать на U индуцированную им топологию — ту, в которой N становится гомеоморфизмом.

Лемма 4.5. *U является топологической группой относительно операции композиции.*

Доказательство. Умножение и взятие обратного в U индуцируют в R^n посредством отображения N частичные бинарное и унарное отображение, соответственно. Нам надо показать их непрерывность. Для этого сначала получим их в явном виде.

Пусть $u, v, w \in U$, $u \circ v = w$. Обозначим $\alpha = V[u]$, $\beta = V[v]$, $\gamma = V[w]$, $\langle Z, \alpha \rangle = (a_1, \ldots, a_n)$, $\langle Z, \beta \rangle = (b_1, \ldots, b_n)$, $\langle Z, \gamma \rangle = (c_1, \ldots, c_n)$ (тогда, в частности, $N[u] = (a_1, \ldots, a_n)$. Пусть $r \in R$, $i \in \mathcal{M}$ таков, что $\langle i, \omega \rangle = r$. Тогда, согласно аксиоме T1', $u(r) = u(\langle i, \omega \rangle) = \langle i, \alpha \rangle = F(\langle i, \omega \rangle, \langle Z, \omega \rangle, \langle Z, \alpha \rangle) = F(r, E, a_1, \ldots, a_n)$. Аналогично $v(r) = F(r, E, b_1, \ldots, b_n)$. Теперь для любого $k = 1, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
c_k = \langle z_k, \gamma \rangle = {} & \\
& w(\langle z_k, \omega \rangle) = w(e_k) = u \circ v(e_k) = u(v(e_k)) = F(v(e_k), E, a_1, \ldots, a_n) = \\
& \qquad F(F(e_k, E, b_1, \ldots, b_n), E, a_1, \ldots, a_n).
\end{aligned}
$$

Ввиду непрерывности F, это означает, что c_k непрерывно зависит от $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. Тогда $N[w]$ непрерывно зависит от $N[u]$, $N[v]$ и, ввиду гомеоморфности N, w непрерывно зависит от u, v. Непрерывность композиции в U доказана.

Пусть $u, v \in U$ таковы, что $u \circ v = \mathrm{id}$, α, β и $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ определены так же, как раньше. Тогда, пользуясь проведенными выше выкладками, имеем для любого $k = 1, \dots, n$

$$e_k = F(F(e_k, E, b_1, \dots, b_n), E, a_1, \dots, a_n) = \\ F(F(z_k, \omega\rangle, \langle Z, \Omega\rangle, \langle Z, \beta\rangle), E, a_1, \dots, a_n) = F(b_k, E, a_1, \dots, a_n).$$

Пусть $(i_1, \dots, i_n) = I \in \mathcal{M}^n$ таковы (отметим, что они единственны ввиду невырожденности биформы), что $\langle I, \omega\rangle = (a_1, \dots, a_n)$. Согласно лемме 3.5, отображение $\langle \cdot, \omega\rangle : \mathcal{M} \to R$ открыто, поэтому I непрерывно зависит от $(a_1, \dots, a_n)$. Поскольку все $(a_1, \dots, a_n)$ различны, $I \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$. Тогда найдется единственный такой $\gamma \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \gamma\rangle = E$. Поскольку, согласно лемме 3.5, отображение $\langle I, \cdot\rangle : \mathcal{N} \to R^n$ открыто, γ непрерывно зависит от I.

Пусть $i \in \mathcal{M}$ таков, что $\langle i, \gamma\rangle = b_k$. Тогда

$$e_k = F(b_k, E, a_1, \dots, a_n) = F(\langle i, \gamma\rangle, \langle I, \gamma\rangle, \langle I, \omega\rangle) = \langle i, \omega\rangle.$$

Поскольку, с другой стороны, $e_k = \langle z_k, \omega\rangle$ (по заданию e_k), получаем $i = z_k$, то есть $b_k = \langle z_k, \gamma\rangle$. Поскольку биформа раздельно непрерывна, это означает, что b_k непрерывно зависит от γ.

Итак, I непрерывно зависит от $(a_1, \dots, a_n)$, γ непрерывно зависит от I, а b_k непрерывно зависит от γ. Это означает, что $(b_1, \dots, b_n)$ непрерывно зависит от $(a_1, \dots, a_n)$, что, ввиду гомеоморфности N, дает непрерывную зависимость v от u. $\square$

Предложение 4.2. *U является непрерывной группой преобразований множества R.*

Доказательство. U — непрерывная группа, и нам осталось показать, что отображение $U \times R \to R$, соответствующее определяемым функциями из U преобразованиям, непрерывно.

Пусть $u \in U$, $r \in R$. Тогда

$$u(r) = u(\langle(\pi^{\omega})^{-1}(r), \omega\rangle) = \langle(\pi^{\omega})^{-1}(r), V[u]\rangle. \tag{4.1}$$

Оператор $V : U \to \mathcal{N}$ является гомеоморфизмом, поскольку гомеоморфизмами являются отображения $N : U \to \overline{R^n}$ и, как показано в лемме 3.5,

$\pi_Z : \mathcal{N} \to \overline{R^n}$, тогда как $V = \pi_Z^{-1} \circ N$. Согласно лемме 3.5, гомеоморфизмом является также отображение $\pi^\omega : \mathcal{M} \to R$. $\langle , \rangle$ совместно непрерывна, согласно лемме 3.7. Тогда формула (4.1) дает непрерывную зависимость $u(r)$ от u и r. □

Мы сопоставили, таким образом, каждой непрерывной физической структуре $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ ранга $(n+1, 2)$ точно n-транзитивную непрерывную группу преобразований топологического пространства R. Покажем теперь, что можно произвести и обратное сопоставление.

Предложение 4.3. *Пусть n — натуральное число, $n \geq 2$, R — хаусдорфовое недискретное топологическое пространство, содержащее не менее, чем n элементов. Пусть U — точно n-транзитивная непрерывная группа преобразований пространства R, причем, элемент u этой группы, переводящий n-ку $(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{R^n}$ в n-ку $(b_1, \ldots, b_n) \in \overline{R^n}$, непрерывно зависит от $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Обозначим $\mathcal{M} = R$, $\mathcal{N} = \overline{R^n}$ — множество строк длины n с попарно различными элементами из R, с топологией, индуцированной топологией прямого произведения. Введем биформу $\langle , \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ следующим образом. Фиксируем попарно различные элементы $e_1, \ldots, e_n \in R$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$. Пусть $i = (x_1)$, $\alpha = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Сопоставим элементу α преобразование $u_\alpha \in U$, переводящее $e_1, \ldots, e_n$ в $\xi_1, \ldots, \xi_n$, соответственно. Теперь полагаем*

$$\langle i, \alpha \rangle := u_\alpha(x_1).$$

Тогда система $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle , \rangle)$ будет удовлетворять аксиомам непрерывной физической структуры ранга $(n+1, 2)$.

Доказательство. Невырожденность биформы очевидна из построения. Проверим выполнение аксиомы A2”. Пусть $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{N}$, $r \in R$. Нам надо найти такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \alpha \rangle = r$. Обозначим $u_\alpha^{-1}(r) = x$, $i = (x)$. Тогда $\langle i, \alpha \rangle = u_\alpha(x) = r$, что и требовалось. Пусть теперь $I \in \mathcal{B}_\mathcal{M}$, $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \overline{R^n}$. Положим $i_k = (x_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Пусть $u \in U$ такова, что $u(x_1) = r_1, \ldots, u(x_n) = r_n$. Обозначим $\alpha = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$. Тогда $u_\alpha = u$, и для $k = 1, \ldots, n$ $\langle i_k, \alpha \rangle = u(x_k) = r_k$.

Проверим теперь выполнение аксиомы T1’. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $i_1, \ldots, i_n \in \mathcal{B}_\mathcal{M}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$. Обозначим $i = (x)$, $i_1 = (x_1), \ldots, i_n = (x_n)$. Нам надо найти такую функцию F, что (при любом выборе $i, i_1, \ldots, i_n, \alpha, \beta$)

$$u_\alpha(x) = F(u_\beta(x), u_\beta(x_1), \ldots, u_\beta(x_n), u_\alpha(x_1), \ldots, u_\alpha(x_n)).$$

Элемент u группы U, переводящий $u_\beta(x_k)$ в $u_\alpha(x_k)$ для всех $k = 1, \ldots, n$, единственен и непрерывно зависит от $u_\beta(x_1), \ldots, u_\beta(x_n), u_\alpha(x_1), \ldots, u_\alpha(x_n)$. При этом, очевидно, $u = u_\alpha \circ u_\beta^{-1}$. Тогда $u_\alpha(x) = u(u_\beta(x))$, и, поскольку U — непрерывная группа преобразований, $u_\alpha(x)$ непрерывно и однозначно зависит от $u_\beta(x), u_\beta(x_1), \ldots, u_\beta(x_n), u_\alpha(x_1), \ldots, u_\alpha(x_n)$, что и дает требуемое. □

Замечание 4.1. Для групп U, заданных в теоремах 1.2, 1.3, условие предложения 4.3 (о непрерывной зависимости функции, переводящей n-ку $(a_1, \ldots, a_n)$ в n-ку $(b_1, \ldots, b_n)$), выполнено.

Доказательство. Для групп линейных и дробно-линейных преобразований это тривиально следует из известных формул, выражающих коэффициенты соответствующих преобразований. Рассмотрим наиболее сложный случай групп G_Γ. Пусть $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{H}$. Рассмотрим преобразование вида $y = a \cdot x \cdot b + c$ из G_Γ, переводящее x_1 в y_1, x_2 в y_2. Получаем $y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)\beta$, откуда, ввиду того, что $|a| = 1$, имеем (см. также [23])

$$\begin{aligned} b &= \gamma(|(y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1)^{-1}|), \\ a &= (y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1)^{-1} \cdot b, \\ c &= y_1 - a \cdot x_1 \cdot b. \end{aligned}$$

Коэффициенты a, b, c, таким образом, непрерывно зависят от x_1, x_2, y_1, y_2, что и дает непрерывную зависимость от них соответствующих элементов U. □

Предложение 4.3 вместе с замечанием 4.1 доказывает замечание 2.1 к теореме 2.1.

5 Классификация

Согласно ранее изложенному, U является непрерывной n-транзитивной группой преобразований локально компактного, связного, удовлетворяющего первой аксиоме счетности топологического пространства R, а потому при $n = 2$ и $n = 3$ удовлетворяет условиям теорем 1.3 и 1.2, соответственно.

Поскольку R хаусдорфово и связно, оно бесконечно. Для $n > 3$ не существует (теорема 1.1) точно n-транзитивных групп преобразований бесконечного множества R, поэтому далее нам надо достаточно рассмотреть случаи $n = 2$, $n = 3$.

5.1 $n = 2$

Фиксируем для дальнейших выкладок произвольный $\alpha \in \mathcal{N}$. $\langle Z, \alpha \rangle = (\xi_1, \xi_2)$. Обозначим $u = U[\alpha]$. Тогда $N[u] = (\xi_1, \xi_2)$. Как мы отмечали, ранее, из $z_1 \neq z_2$ следует $\xi_1 \neq \xi_2$.

Согласно теореме 1.3, найдется такой гомеоморфизм φ, действующий из R на пространство вещественных чисел, комплексных чисел или кватернионов, что группа преобразований $\varphi U \varphi^{-1}$ является одной из указанных в этой теореме. Заметим, что мы можем без ограничения общности полагать $\varphi(e_1) = 1$, $\varphi(e_2) = 0$. Действительно, если это не так, мы можем взять вместо φ композицию φ с преобразованием из 2-транзитивной группы $\varphi U \varphi^{-1}$, переводящим $\varphi(e_1)$ в 1, а $\varphi(e_2)$ в 0, и требуемое нами условие, а также и все условия теоремы 1.3 будут выполнены.

Рассмотрим сперва случай, когда $\varphi U \varphi^{-1}$ — обычная группа линейных преобразований. Дальнейшие рассуждения никак не зависят от того, будут это линейные преобразования вещественных чисел, комплексных чисел или кватернионов. Положим для определенности, что речь идет о кватернионах $\mathbb{H}$. Тогда φ — гомеоморфизм $R \to \mathbb{H}$. Фиксированной нами функции u сопоставляется преобразование $\varphi u \varphi^{-1}$ вида $y(x) = a \cdot x + b$ из $\varphi U \varphi^{-1}$, где a, b — некоторые фиксированные элементы $\mathbb{H}$, $a \neq 0$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\langle i, \omega \rangle = r$. Тогда $u(r) = \varphi^{-1}(a \cdot \varphi(r) + b)$, что можно, пользуясь определением r и u, переписать как

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}(a \cdot \varphi(\langle i, \omega \rangle) + b). \tag{5.1}$$

Подставляя сюда поочередно $i = z_1$, $i = z_2$ и пользуясь тем фактом, что $\varphi(e_1) = 1$, $\varphi(e_2) = 0$, получаем, соответственно, $\xi_1 = \varphi^{-1}(a + b)$ и $\xi_2 = \varphi^{-1}(b)$. Отсюда сразу следует, что $b = \varphi(\xi_2)$, $a = \varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)$. Фиксируем i и обозначим $\langle i, \omega \rangle = x_1$. Подставляя найденные выражения для a и b в равенство (5.1), получаем требуемое

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}((\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)) \cdot \varphi(x_1) + \varphi(\xi_2)).$$

Рассмотрим случай, когда $\varphi U \varphi^{-1} = G_\Gamma$. Тогда функции u сопоставляется преобразование вида $y(x) = a \cdot x \cdot b + c$, где a, b, c — фиксированные элементы $\mathbb{H}$, $|a| = 1$, $b \in \Gamma$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\langle i, \omega \rangle = r$. Тогда $u(r) = \varphi^{-1}(a \cdot r \cdot b + c)$, откуда

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1}(a \cdot \varphi(\langle i, \omega \rangle) \cdot b + c). \tag{5.2}$$

Подставляя сюда поочередно $i = z_1$, $i = z_2$, получаем, соответственно, $\xi_1 = \varphi^{-1}(a \cdot b + c)$, $\xi_2 = \varphi^{-1}(c)$. Отсюда $c = \varphi(\xi_2)$, $b = \gamma(|\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)|)$

(мы пользуемся тем, что $|a| = 1$ и что существует только один элемент Γ с фиксированной нормой), $a = (\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)) \cdot b^{-1}$. Фиксируя $i \in \mathcal{M}$, обозначая $\langle i, \omega \rangle = x_1$ и подставляя выражения для a, b, c в равенство (5.2), получаем требуемое.

5.2 $n = 3$

Фиксируем для дальнейших выкладок произвольный $\alpha \in \mathcal{N}$. $\langle Z, \alpha \rangle = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Обозначим $u = U[\alpha]$. Тогда $N[u] = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Как и ранее, ξ_1, ξ_2 и ξ_3 должны быть попарно различны.

Найдется такой гомеоморфизм φ, действующий из R на вещественную или комплексную проективную прямую, что группа преобразований $\varphi U \varphi^{-1}$ является группой дробно-линейных преобразований . Дальнейшие рассуждения никак не различаются для вещественного и комплексного случая. Для определенности будем считать, что мы имеем дело с последним. Комплексную проективную прямую далее будем обозначать как $CP_1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Повторяя рассуждения случая $n = 2$, мы можем без ограничения общности полагать $\varphi(e_1) = 0$, $\varphi(e_2) = 1$, $\varphi(e_3) = \infty$.

Фиксированной нами функции u сопоставляется преобразование вида $y(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ из $\varphi U \varphi^{-1}$, где a, b, c, d — некоторые фиксированные элементы $\mathbb{C}$, $ac - bd \neq 0$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\langle i, \omega \rangle = r$. Тогда $u(r) = \varphi^{-1}(\frac{ar+b}{cr+d})$, откуда

$$\langle i, \alpha \rangle = \varphi^{-1} \left(\frac{a\varphi(\langle i, \omega \rangle) + b}{c\varphi(\langle i, \omega \rangle) + d} \right). \tag{5.3}$$

Подставляя сюда поочередно $i = z_1$, $i = z_2$, $i = z_3$, получаем, соответственно, $\varphi(\xi_1) = \frac{b}{d}$, $\varphi(\xi_2) = \frac{a+c}{b+d}$, $\varphi(\xi_3) = \frac{a}{c}$. Это означает, что преобразование $y(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ переводит упорядоченную тройку элементов 0, 1, ∞ в тройку $\varphi(\xi_1)$, $\varphi(\xi_2)$, $\varphi(\xi_3)$. Фиксируя $i \in \mathcal{M}$, обозначая $\langle i, \omega \rangle = x_1$ и подставляя выражения для a, b, c, d в равенство (5.3), получаем требуемое.

Список литературы

[1] Ионин В. К. *Абстрактные группы как физические структуры.* // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Новосибирск, 1990. Вып. 135: Вычислительные системы, с. 40–43.

[2] Ионин В. К. *К определению физических структур.* // Труды института математики. Новосибирск, 1992. Том 21, с. 42–51.

[3] Кулаков Ю. И. *Элементы теории физических структур (дополнение Михайличенко Г. Г.).* Новосибирск: НГУ, 1968.

[4] Кулаков Ю. И. *Об одном принципе, лежащем в основании классической физики.* // Докл. АН СССР, 1970, т. 193, №1. с. 72–75.

[5] Кулаков Ю. И. *Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур.* // Докл. АН СССР, 1970, т. 193, №5, с. 985–987.

[6] Кулаков Ю. И. *О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа.* // Докл. АН СССР, 1971, т. 201, №3. с. 570–572.

[7] Лев В. Х. *Трехмерные геометрии в теории физических структур.* // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Новосибирск: Ин-т математики СОАН СССР, 1988. с. 90–103. (Вычислительные системы. Вып. 125).

[8] Михайличенко Г. Г. *Решение функциональных уравнений в теории физических структур.* // Докл. АН СССР, 1972, т. 206, №5, с. 1056–1058.

[9] Михайличенко Г. Г. *Двумерные геометрии.* // Докл. АН СССР, 1981, т. 260, № 4, с. 803–805.

[10] Михайличенко Г. Г. *О групповой и феноменологической симметриях в геометрии.* // Докл. АН СССР, 1983, т. 269, №2, с. 284–288.

[11] Михайличенко Г. Г. *Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур).* // Докл. АН СССР, 1985, т. 24, №1, с. 39–41.

[12] Михайличенко Г. Г. *Двуметрические физические струкутуры ранга (n+1,2).* // Сиб. мат. журн., 1993, т. 34, №3, с. 132–143.

[13] Михайличенко Г. Г. *К вопросу о симметрии расстояния в геометрии.* // Изв. вузов. Математика. 1994. №4. с. 21–23.

[14] Понтрягин Л. С. *Непрерывные группы.*— 4-е изд.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.— 520 с.

[15] Симонов А. А. *Физическая структура ранга (3,2) на абстрактных множествах.* // Материалы XXXV Междунар. науч. студ. конф.

"Студент и научно-технический прогресс"(Новосибирск, 22–24 апр. 1997 г.) Математика. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1997. с. 100–101.

[16] Симонов А. А. *Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур.* // *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур. М., 2004.— 847 с., ил. Приложение: с. 675–707.

[17] Симонов А. А. Доклад, Международная конференция "Мальцевские чтения – 2005".

[18] Симонов А. А. *О соответствии между почтиобластями и группами.* // Алгебра и логика. 2006. 45, № 2, с. 239–251.

[19] Фирдман И. А. *Алгебраическая классификация физических структур с нулем. I.* // Сиб. журн. индустр. математики. 2005. т. 8, №4(24), с. 131–148

[20] Фирдман И. А. *Алгебраическая классификация физических структур с нулем. II. Топологические аспекты.* // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. т. 9, №1(25), с. 135–146

[21] Фирдман И. А. *Алгебраическая теория биформ. Случай больших рангов.* // Препринт, Омск: ОмГТУ, 2007.

[22] J. Tits. *Sur les groupes doublement transitifs continus.* // Comment. Math. Helv., 26, pp. 203-224 (1952).

[23] J. Tits. *Sur les groupes doublement transitifs continus: Correction et compléments* // Comment. Math. Helv., 30, pp. 234-240 (1956).