Обобщённое матричное умножение как эквивалентное представление Теории физических структур

А.А. Симонов

§ 1. Введение

В данной работе автор изложил подход и основные результаты направления, предложенного в работах [1], [2] В.К. Иониным по поиску решений *физических структур* (далее ФС) на множествах без дополнительной структуры. В действительности, в таком подходе коренным образом менялась и сама постановка задачи. Так, если в подходе Г.Г. Михайличенко фактически искались именно решения ФС на конкретных множествах, то в данном случае задача разбивалась на два этапа. **Первый этап**, это поиск алгебраической структуры, на которой возможно существование решений ФС. **Второй этап**, это уже непосредственно поиск самого решения на найденной алгебраической структуре. Разумеется, наложение некоторых, вполне естественных, ограничений на решения ФС, при помощи которых хочется избавиться от тривиальных решений, может отсекать и вполне нетривиальные решения, но эти ограничения требуются хотя бы для того, чтобы не утонуть в борьбе с большим количеством мелких проблем. При этом искомые алгебраические структуры, с упомянутой оговоркой, остаются достаточно богатыми. После того как уже найдена сама структура, её можно усиливать, налагая какие–либо дополнительные требования. Например, требуя, чтобы данная структура была согласована с дифференциальной структурой или с топологической структурой. Но такое усиление, возможно, лучше проводить именно на последнем этапе, т.к. изначальная работа с такой усиленной структурой заставляет отслеживать множество возникающих в обеих структурах проблем. Не исключено, что взаимопроникновение этих двух, именно различных структур, может приводить к каким-либо специфическим проблемам. По-видимому, именно по этой причине не удалось пробиться в поиске решений ФС в поле комплексных чисел, ограничившись решениями ФС ранга (2, 2) [6] и (3, 2) [7].

Используя же результаты решений на абстрактных множествах, можно строить представления данных решений на конкретных, интересующих множествах. Такое представление сводится к решению некоторых, уже значительно более простых, функциональных уравнений. Это можно посмотреть на примере ФС ранга (3, 2). Не зная алгебраической структуры, требуется решать функциональное уравнение

$$f(i_1,\alpha_1) = g\begin{pmatrix} & f(i_1,\alpha_2) \\ f(i_2,\alpha_1) & f(i_2,\alpha_2) \\ f(i_3,\alpha_1) & f(i_r,\alpha_2) \end{pmatrix}$$

с двумя неизвестными отображениями

$$f\colon B\times B^2 \to B \text{ и } g\colon B^5 \to B.$$

Зная же алгебраическую структуру, требуется в группе $(\cdot, B_0)$ на множестве без нейтрального элемента $B_0 \setminus \{e\}$ решить функциональное уравнение вида:

$$\varphi\Big(\varphi(x)\varphi(y)\Big) = \varphi\Big(x\varphi(y^{-1})\Big)y.$$

Если такое решение имеется, то легко можно записать как репрезентатор, так и верификатор. Выпишем репрезентатор:

$$f(x, \xi, \eta) = \varphi\Big(x(\xi\eta^{-1})\Big)\eta.$$

Выясняется, что решения ФС на двух множествах как однометрические, полученные Г.Г. Михайличенко в его диссертации [10], так и полиметрические геометрии [8], [9], связаны с новыми объектами — обобщенными матрицами. В отличие от обычного матричного умножения, построенного на билинейной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_r) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ry_r$, обобщенное матричное умножение строится на произвольной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, \ y_2, \ldots, y_s)$, в которой не обязательно выполнение равенства $r = s$. При этом с обычным матричным произведением их связывает то, что на некотором подмножестве их произведение — групповое. Иными словами, среди всех матриц одной размерности можно выделить подмножество матриц, на котором такое произведение будет групповым.

Обобщенное матричное умножение может возникать при рассмотрении специальных групп преобразований. Например, когда имеется некоторая абстрактная группа G и подмножества $\Omega_{B^r} \subseteq B^r$ и $\Omega_{B^s} \subseteq B^s$, такие, что они образуют две группы преобразований — (G, Ω_{B^r}), (G, Ω_{B^s}) с двумя действиями: $x'_r = g \circ_1 x_r$ и $x'_s = g \circ_2 x_s$, где $x_r \in \Omega_{B^r}, x_s \in \Omega_{B^s}$. В группе $(\quad , G)$, где $G \subseteq B^{rs}$, действие $x_r \mapsto g \circ_1 x_r$ можно представить в виде r – уравнений:

$$\begin{cases} f(g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{1s}, x_1, x_2, \ldots, x_r) = x'_1 \\ f(g_{21}, g_{22}, \ldots, g_{2s}, x_1, x_2, \ldots, x_r) = x'_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ f(g_{r1}, g_{r2}, \ldots, g_{rs}, x_1, x_2, \ldots, x_r) = x'_r \end{cases}.$$

Данную систему можно формально переписать в виде умножения матрицы на столбец:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1s} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{r1} & g_{r2} & \cdots & g_{rs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{pmatrix}.$$

Действие $x_s \mapsto g \circ_2 x_s$ можно записать при помощи системы из s уравнений:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_s, g_{11}, g_{21}, \ldots, g_{r1},) = x'_1 \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_s, g_{12}, g_{22}, \ldots, g_{r2},) = x'_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_s, g_{1s}, g_{2s}, \ldots, g_{rs},) = x'_s \end{cases},$$

которые так же, формально, можно представить в виде умножения строки на матрицу:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1s} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{r1} & g_{r2} & \cdots & g_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_s \end{pmatrix}.$$

Естественно, что такие группы преобразований являются только частью всех групп преобразований и, возможно, будет легче получить их классификацию.

Далее сформулируем аксиомы ФС для абстрактных множеств и покажем как возникает обобщенное матричное умножение. После чего отдельно сформулируем аксиомы для такого матричного умножения и рассмотрим общие следствия.

§ 2. Физические структуры на абстрактных множествах

1^0. Будем говорить, что на множествах M, N, B действует *физическая структура* (далее ФС) ранга $(r+1, s+1)$, если определены две согласованные функции:
репрезентатор — $f : M \times N \to B$,
и *верификатор* — $g : \Omega_{B^r} \times \Omega_{B^{rs}} \times \Omega_{B^s} \to B$, где $\Omega_{B^r} \times \Omega_{B^{rs}} \times \Omega_{B^s}$ – область определения функции g,
а на подмножествах $\Omega_{M^r} \subseteq M^r, \Omega_{N^s} \subseteq N^s, \Omega_{B^{rs}} \subseteq B^{rs}, \Omega_{B^r} \subseteq B^r, \Omega_{B^s} \subseteq B^s$ выполняются следующие аксиомы:

A1 Для произвольных $(r+1)(s+1)$ репрезентаторов $f_{mn} = f(i_m, \alpha_n)$, построенных по любым кортежам $\langle i_0, i_1, \dots, i_r \rangle \in M \times \Omega_{M^r}$ и $\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s \rangle \in N \times \Omega_{N^s}$, существует связь, которую можно записать в виде:

$$f_{00} = g\left(\begin{pmatrix} f_{01} & f_{02} & \dots & f_{0r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1s} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{r1} & f_{r2} & \cdots & f_{rs} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ \vdots \\ f_{r0} \end{pmatrix} \right).$$

A2 $(\forall \langle i_1, i_2, \dots, i_r \rangle \in \Omega_{M^r})$, $(\forall \langle b_1, b_2, \dots, b_r \rangle \in \Omega_{B^r})$, $(\exists!\ \alpha \in N)$:
$f(i_k, \alpha) = b_k$, $k \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Аналогично, для второго множества:

A3 $(\forall \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rangle \in \Omega_{N^s})$, $(\forall \langle b_1, b_2, \dots, b_s \rangle \in \Omega_{B^s})$, $(\exists!\ i \in M)$:
$f(i, \alpha_k) = b_k$, $k \in \{1, 2, \dots, s\}$.

По произвольному кортежу $\langle j_1, j_2, \dots, j_r \rangle \in \Omega_{M^r}$ построим отображение $F_{j_1 j_2 \dots j_r} : N \to \Omega_{B^r}$ в виде: $F_{j_1 j_2 \dots j_r}(\alpha) = \Big(f(j_1, \alpha), f(j_2, \alpha), \dots, f(j_r, \alpha) \Big)$. Тогда, с учетом аксиомы A2, данное отображение будет биекцией. Аналогично для второго множества по кортежу $\langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s \rangle \in \Omega_{N^s}$ построим биективное отображение $F_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_s} : M \to \Omega_{B^s}$.

Для удобства записи будем использовать сокращение:
$\alpha^n = f(j_n, \alpha)$, $1 \leq n \leq r$ и $i^n = f(i, \gamma_n)$, $1 \leq n \leq s$.

Запишем теперь эквивалентный вид репрезентатора:

$$f(i,\alpha) = f\Big(F^{-1}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s}(i^1, i^2, \ldots, i^s), F^{-1}_{j_1 j_2 \ldots j_r}(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^r)\Big) =$$

$$= f_{j_1 j_2 \ldots j_r \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_s}(i^1, i^2, \ldots, i^s, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^r) \equiv \begin{pmatrix} i^1 & i^2 & \ldots & i^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^r \end{pmatrix}.$$

Итак, при таком эквивалентном переходе элемент $i \in M$ переходит в строку из s – элементов $(i^1, \ldots, i^s) \in \Omega_{B^s}$, а элемент $\alpha \in N$ переходит в столбец из r – элементов $(\alpha^1, \ldots, \alpha^r) \in \Omega_{B^r}$. Аналогично, при таком эквивалентном переходе кортежи $\langle i_1, i_2, \ldots, i_r \rangle \in \Omega_{M^r}$ и $\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \rangle \in \Omega_{N^s}$ переходят в матрицы из соответствующих множеств:

$$\begin{pmatrix} i_1^1 & i_1^2 & \cdots & i_1^s \\ i_2^1 & i_2^2 & \cdots & i_2^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_r^1 & i_r^2 & \cdots & i_r^s \end{pmatrix} \in \Omega_{\Omega^r_{B^s}}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_s^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \cdots & \alpha_s^r \end{pmatrix} \in \Omega_{\Omega^s_{B^r}}.$$

Далее будем считать, что справедливо равенство: $\Omega_{\Omega^r_{B^s}} = \Omega_{\Omega^s_{B^r}} = \Omega_{B^{rs}}$. Данное ограничение хотя и носит чисто технический характер, но достаточно сильное и его можно было бы даже сформулировать в виде отдельной аксиомы.

2^0. Введем новые обозначения: $f(j_m, \gamma_n) = \gamma_n^m = j_m^n \equiv e_{mn}$. Матрицу значений $|e_{mn}|$ будем обозначать как E, а репрезентатор записывать в виде:

$$f_E(i^1, i^2, \ldots, i^s, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^r) = \begin{pmatrix} i^1 & i^2 & \ldots & i^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^r \end{pmatrix}.$$

Запишем теперь тождества, получающиеся из построения, с учетом новых обозначений:

$$\begin{pmatrix} e_{m1} & e_{m2} & \ldots & e_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^r \end{pmatrix} = \alpha^m, \text{ и } \begin{pmatrix} i^1 & i^2 & \ldots & i^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1m} \\ e_{2m} \\ \vdots \\ e_{sm} \end{pmatrix} = i^m. \qquad (1)$$

Будем рассматривать формально *матрицу* как двумерный набор из $m \times n$ коэффициентов $|f_{mn}|$. Перемножаться могут матрицы при условии, что число столбцов первой матрицы — s, а число строк второй матрицы — r. Итоговая матрица будет размерности $m \times n$, если перемножались матрицы размерности $m \times s$ и $r \times n$. В качестве произведения двух матриц u_{ms} и v_{rn} будем рассматривать матрицу репрезентаторов, построенных на коэффициентах строки первой матрицы и столбца второй матрицы, т.е.

$$f_{mn} = f_E(u_{m1}, u_{m2}, \dots, u_{ms}, v_{1n}, v_{2n}, \dots, v_{sn}):$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1s} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{r1} & v_{r2} & \cdots & v_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}.$$

В частном случае, при перемножении двух матриц размерности $r \times s$ итоговая матрица будет той же размерности так, что такое *матричное умножение* на множестве $\Omega_{B^{rs}}$ образует группоид.

Покажем справедливость $(\forall I \in \Omega_{B^{rs}}), (\forall B \in \Omega_{B^{rs}}), (\exists! A \in \Omega_{B^{rs}}) : IA = B$. Если рассмотреть аксиому А1, то кортеж $\langle i_1, i_2, \dots, i_r\rangle \in \Omega_{M^r}$ из этого условия есть не что иное, как матрица $I \in \Omega_{B^{rs}}$; второй кортеж $\langle b_1, b_2, \dots, b_r\rangle \in \Omega_{B^r}$ — это n – тый столбец матрицы B. Тогда элемент $\alpha \in N$ — это n – тый столбец матрицы A. Последовательно пробегая для n от 1 до s, приходим к справедливости доказываемого свойства. Аналогично рассматривается утверждение $(\forall A \in \Omega_{B^{rs}}), (\forall B \in \Omega_{B^{rs}}), (\exists! I \in \Omega_{B^{rs}}) : IA = B$, но уже с учетом аксиомы А3. Таким образом, приходим к тому, что *матричное умножение* на множестве $\Omega_{B^{rs}}$ образует квазигруппу.

Рассматривая тождества (1) для репрезентатора f_E, приходим к тому, что матрица E будет как левым, так и правым нейтральным элементом в матричном умножении, следовательно, данная квазигруппа будет лупой.

3^0. Перепишем теперь верификатор в виде:

$$f_{00} = \begin{pmatrix} i_0^1 & i_0^2 & \dots & i_0^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0^1 \\ \alpha_0^2 \\ \vdots \\ \alpha_0^r \end{pmatrix} = g\left(\begin{pmatrix} i_0^1 & i_0^2 & \dots & i_0^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_s^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \cdots & \alpha_s^r \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} i_1^1 & i_1^2 & \cdots & i_1^s \\ i_2^1 & i_2^2 & \cdots & i_2^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_r^1 & i_r^2 & \cdots & i_r^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_s^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \cdots & \alpha_s^r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1^1 & i_1^2 & \cdots & i_1^s \\ i_2^1 & i_2^2 & \cdots & i_2^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_r^1 & i_r^2 & \cdots & i_r^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^r \end{pmatrix} \right) =$$

$$g\left(\begin{pmatrix} f_{01} & f_{02} & \dots & f_{0r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1s} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{r1} & f_{r2} & \cdots & f_{rs} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ \vdots \\ f_{r0} \end{pmatrix} \right).$$

Рассмотрим теперь $r \times s$ верификаторов, построенных на двух кортежах $\langle i_1, i_2, \dots, i_r\rangle, \langle k_1, k_2, \dots, k_r\rangle$ из множества Ω_{M^r} и двух кортежах $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s\rangle, \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s\rangle$, из множества Ω_{N^s}. С их помощью можно построить верификатор для матриц: $IA = G(IB, KB, KA)$, где I, K и A, B — это записанные в матричном виде соответствующие кортежи $\langle i_1, i_2, \dots, i_r\rangle$, $\langle k_1, k_2, \dots, k_r\rangle$, $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s\rangle$, $\langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s\rangle$. При этом равенство означает, что равны поэлементно две матрицы. Так, элемент из строки m и столбца n с одной стороны — это

$$(IA)_{mn} = f_E(i_m^1, i_m^2, \dots i_m^s, \alpha_n^1, \alpha_n^2, \dots, \alpha_n^r),$$

а с другой стороны:

$$\Big(G(IB, KB, KA)\Big)_{mn} = g\left(\begin{pmatrix} i_m^1 & i_m^2 & \dots & i_m^s \end{pmatrix} B, KB, K \begin{pmatrix} \alpha_n^1 \\ \alpha_n^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^r \end{pmatrix} \right).$$

Таким образом, получаем, что на множествах $\Omega_{B^{rs}}$, состоящих из $r \times s$ матриц определена ФС ранга $(2,2)$ с репрезентатором, определенным как умножение двух матриц из множества $\Omega_{B^{rs}}$, и только что определенным верификатором G.

Покажем теперь, что *матричное умножение* представляет собой групповое умножение.

Воспользуемся полученными данными о том, что определенное выше матричное умножение на множестве $\Omega_{B^{rs}}$ является лупой, следовательно, если $X, Y \in \Omega_{B^{rs}} \Rightarrow XY \in \Omega_{B^{rs}}$, а также $E \in \Omega_{B^{rs}}$, и рассмотрим кортежи уже из матриц $\langle X, E\rangle$ и $\langle YZ, Y\rangle$. Построим верификатор:

$$X(YZ) = G(XY, E(YZ), EY) = G(XY, YZ, Y).$$

Рассмотрим теперь кортежи $\langle XY, Y\rangle$, $\langle Z, E\rangle$, для которых также построим верификатор:

$$(XY)Z = G((XY)E, YZ, YE) = G(XY, YZ, Y).$$

Сравнивая правые части равенств, приходим к тождеству: $X(YZ) = (XY)Z$. Таким образом получили ассоциативность в лупе, следовательно, *матричное умножение* на множестве $\Omega_{B^{rs}}$ образует группу.

§ 3. Обобщенное матричное умножение (частный случай)

Рассмотрим обобщение матричного умножения для матриц, построенных над некоторой универсальной алгеброй B (далее просто *алгеброй*), и определим минимальное требование на алгебру, для того чтобы такое обобщенное матричное умножение оставалось групповым. Рассмотрим сначала частный случай для столбец–матриц, после чего перейдем к общему случаю.

4^0. Для квадратных матриц ранга n, построенных над полем R, можно выделить подмножество $M_n \subset R^{n\times n}$ при помощи условия:

$$M_n = \{m \in R^{n\times n} |\det(m) \neq 0\}.$$

На этом подмножестве естественным образом определена группа с обычным матричным умножением $(M_n, \quad)$, построенным по обычному правилу умножения строки на столбец с использованием билинейной функции:

$$f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj} = (XY)_{ij}. \tag{2}$$

Попытаемся рассмотреть обобщение матричного умножения, отказавшись от вида функции (2) и рассматривая функцию в наиболее общем виде

$$(XY)_{ij} = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{is}, y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{rj}),$$

где не обязательно выполнение равенства $s = r$, т.е. матрицы могут быть и не квадратными. Матрицы будем рассматривать не только над полем R, но и над произвольным множеством B, с пока еще не известной алгебраической структурой. Единственным существенным ограничением на функцию $f : B^s \times B^r \to B$ и алгебраическую структуру множества B будет требование, чтобы на некотором подмножестве $\Omega_{r\times s} \subseteq B^{r\times s}$ такое матричное произведение было групповым $(\Omega_{r\times s}, \quad)$. В данной статье рассмотрим случай $s = 1$, таким образом будем рассматривать только матрицы столбцы. Определим, какая минимальная алгебраическая структура индуцируется на множестве B, и как выражается функция f. В конце статьи рассмотрим конкретные примеры на множестве $B \subseteq R$ и $B \subseteq R^2$.

5^0. Рассмотрим обобщение матричного умножения на примере простейшей матрицы: столбец–матрицы, состоящей из двух строк. Матрицы построены над некоторым множеством B, структура которого изначально не определена. Рассмотрим подмножество матриц

$$\Omega_{B^2} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in B^2 \middle| \, x_1 \neq x_2 \right\}.$$

Структура множества B будет определяться требованием, при котором на множестве Ω_{B^2} обобщенное матричное умножение задавало бы группу: $(\Omega_{B^2}, \quad)$ – группа умножения столбец–матриц. Обозначим эту группу буквой M. Умножение столбцов построено на функции вида $f : B \times \Omega_{B^2} \to B$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1, y_2) \\ f(x_2, y_1, y_2) \end{pmatrix}.$$

Запишем нейтральный элемент группы M через его компоненты $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$.

Из свойств нейтрального элемента группы $(\forall X \in M) : XE = EX = X$ для функции f следуют следующие соотношения

$$f(e_1, y_1, y_2) = y_1, f(e_2, y_1, y_2) = y_2, f(x, e_1, e_2) = x. \tag{3}$$

Из (3) следует равенство

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Введем функцию $\varphi : B \to B$ следующим образом:

$$f(x, e_2, e_1) = \varphi(x)$$

из (4) для нее следует $\varphi^2(x) = x$ и $\varphi(e_1) = e_2$, $\varphi(e_2) = e_1$.

6^0. Из выражения (3) следует, что на подмножестве

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ e_2 \end{array} \right) \in \Omega_{B^2} \middle| x_1 \in B \setminus \{e_2\} \right\} \subset \Omega_{B^2}$$

определена подгруппа $M_1 \subset M$, связанная с группой на множестве $B \setminus \{e_2\}$:

$$\left(\begin{array}{c} x_1 \\ e_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ e_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} x_1 y_1 \\ e_2 \end{array} \right). \tag{5}$$

Умножение в группе $(B \setminus \{e_2\}, \cdot)$ определяется в виде

$$x \cdot y = f(x, y, e_2). \tag{6}$$

Обозначим эту группу через G_1. Легко проверить, что если M — группа, то и G_1 — группа. Записывать умножение в группе G_1 будем, как правило, без точки $xy = x \cdot y$. Для элемента $x \in G_1$ обратный элемент будем обозначать в виде $x^{-1} \in G_1$.

Надо обратить внимание, что выражением (6), в действительности, определена частичная операция

$$(\cdot) : B \times (B \setminus \{e_2\}) \to B, \tag{7}$$

так как элемент x может принимать любое значение из множества B, а не только из множества, на котором действует группа — $B \setminus \{e_2\}$. В этом случае эта частичная операция отличается от групповой еще одним тождеством:

$$(\forall x \in B \setminus \{e_2\}) : e_2 \cdot x = e_2. \tag{8}$$

Аналогичным образом на подмножестве

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} e_1 \\ x_2 \end{array} \right) \in \Omega_{B^2} \middle| x_2 \in B \setminus \{e_1\} \right\} \subset \Omega_{B^2}$$

также определена подгруппа $M_2 \subset M$, которая связана уже с группой на множестве $B \setminus \{e_1\}$. Обозначим эту группу через G_2 с операцией $(\cdot_2)$. Две группы G_1 и G_2 изоморфны и функция φ как раз и задает этот изоморфизм:

$$\left(\begin{array}{c} x \\ e_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y \\ e_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ e_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y \\ e_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \varphi(x) \\ e_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \varphi(y) \\ e_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_1 \\ \varphi(x) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_1 \\ \varphi(y) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_1 \\ \varphi(x) \cdot_2 \varphi(y) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_2 \\ \varphi\left(\varphi(x) \cdot_2 \varphi(y)\right) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \varphi\left(\varphi(x) \cdot_2 \varphi(y)\right) \\ e_2 \end{array} \right).$$

7^0. С учетом свойств (3), (4), (5) и при условии $y_2 \neq e_2$ можно записать следующие равенства:

$$\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y_1 y_2^{-1} \\ e_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y_2 \\ e_2 \end{array} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 y_2^{-1} \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ e_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(y_1 y_2^{-1}) \\ e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\varphi(y_1 y_2^{-1}) \\ x_2\varphi(y_1 y_2^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ e_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi\left(x_1\varphi(y_1 y_2^{-1})\right) \\ \varphi\left(x_2\varphi(y_1 y_2^{-1})\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi\left(x_1\varphi(y_1 y_2^{-1})\right) y_2 \\ \varphi\left(x_2\varphi(y_1 y_2^{-1})\right) y_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом пришли к выражению функции f через частичную операцию (7) и функцию φ в виде:

$$f(x_1, y_1, y_2) = \varphi\left(x_1\varphi(y_1 y_2^{-1})\right) y_2. \tag{9}$$

Рассмотрим аналогичные рассмотренным выше равенства для случая $y_1 \neq e_2$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ y_2 y_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ y_2 y_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 y_1^{-1} \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 y_1^{-1} \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi(x_1) \\ \varphi(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(y_2 y_1^{-1}) \\ e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x_1)\varphi(y_2 y_1^{-1}) \\ \varphi(x_2)\varphi(y_2 y_1^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi\left(\varphi(x_1)\varphi(y_2 y_1^{-1})\right) \\ \varphi\left(\varphi(x_2)\varphi(y_2 y_1^{-1})\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi\left(\varphi(x_1)\varphi(y_2 y_1^{-1})\right) y_1 \\ \varphi\left(\varphi(x_2)\varphi(y_2 y_1^{-1})\right) y_1 \end{pmatrix}.$$

Откуда следует, что функцию f можно записать еще и в виде:

$$f(x_1, y_1, y_2) = \varphi\left(\varphi(x_1)\varphi(y_2 y_1^{-1})\right) y_1. \tag{10}$$

Сравнивая (9) и (10), приходим к тому, что функция φ для случая $y \neq e_1, e_2$ должна удовлетворять следующему функциональному уравнению:

$$\varphi\left(x\varphi(y^{-1})\right) y = \varphi\left(\varphi(x)\varphi(y)\right). \tag{11}$$

Рассматривая полученное уравнение для случая $x^{-1} = \varphi(y^{-1})$, с учетом свойств функции φ и свойства (8) частичной операции (7), приходим к тому, что для функции $\rho(x) = \varphi(x^{-1})$ должно выполняться тождество:

$$\rho^3 = id. \tag{12}$$

8^0. Если в уравнении (11) произвести замену переменных $x = \varphi(x'), y = \varphi(y'^{-1})$, а затем воспользоваться свойством (12) функции ρ, то получим следующий вид уравнения:

$$\varphi\left(\varphi(x')\left(\varphi(y')\right)^{-1}\right)\varphi(y'^{-1}) = \varphi(x'y'^{-1}),$$

который появляется в работе П. Кона [3], в лемме 5.1. теоремы о вложении колец в тела. Помимо данного функционального уравнения, для того чтобы группа G_1 была мультипликативной группой некоторого тела, согласно этой леммы, должны выполняться еще два требования:

$$\varphi(yxy^{-1}) = y\varphi(x)y^{-1}, \text{ при } x \neq e_1$$

и элемент $a = \varphi(x^{-1})x\Big(\varphi(x)\Big)^{-1}$ не должен зависеть от выбора x. Первое требование приводит к существованию левосторонней дистрибутивности. Из последнего требования следует, что аддитивная операция должна быть ассоциативной и коммутативной. В нашем случае дополнительные ограничения не требуются.

9^0. При помощи произвольной биекции $L : B \to B$, для которой справедливо $L(e_2) = e_2$, можно ввести две операции:

$$x \oplus y = \varphi\left(x(L(y))^{-1}\right)y, \;\; x \ominus y = \varphi\left(xy^{-1}\right)L(y),$$

связанные между собой соотношением

$$(x \oplus y) \ominus y = x, \;\; (x \ominus y) \oplus y = x.$$

В случае, если биекция L определяется при помощи произвольного элемента $a \in B \setminus \{e_2\}$ в виде $L(x) = ax$, тогда для определенных выше операций справедлива правосторонняя дистрибутивность:

$$(x \oplus y)\,z = xz \oplus yz, \;\; (x \ominus y)\,z = xz \ominus yz.$$

В случае $a = e_1$ обе операции $\oplus$ и $\ominus$ совпадают.

10^0. Простейший пример — это $B = R$, $e_1 = 1$, $e_2 = 0$, $a = -1$, умножение в группе G_1 – обычное умножение, $\varphi(x) = 1 - x$. Операции $\oplus$ и $\ominus$ будут обычными операциями сложения и вычитания.

В качестве менее тривиального примера можно рассмотреть алгебраическую структуру на множестве $B = \{(x, y) \in R^2 | x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$ с выделенными элементами $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 0), a = (-1, 0)$. Умножение определено в виде:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1^n),$$

где n – произвольное целое число. Взятие обратного определено в виде:

$$(x_1, x_2)^{-1} = (x_1^{-1}, -x_2x_1^{-1-n}),$$

функцию φ и операцию сложения можно записать в виде:

$$\varphi(x_1, x_2) = (1 - x_1, (-1)^n x_2), \qquad (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Из получившегося вида операции сложения очевидно, что данная алгебраическая система с двумя бинарными операциями $(B, \oplus, \cdot)$ связана с кольцом, особенно, если в качестве множества B рассматривать R^2. В отличие от кольца, в данной системе присутствует только правосторонняя дистрибутивность, левосторонней дистрибутивности нет:

$$Z\Big(X \oplus Y\Big) \ominus \Big(ZX \oplus ZY\Big) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ z_2\Big((x_1+y_1)^n - x_1^n - y_1^n\Big) \end{array} \right),$$

где $X = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right), Y = \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \right), Z = \left(\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} \right)$.

В качестве второго примера рассмотрим группу с умножением:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2),$$

и унарными операциями:

$$(x_1, x_2)^{-1} = (x_1^{-1}, -x_2 x_1^{-1}), \qquad \varphi(x_1, x_2) = (x_2, x_1),$$

выделенными элементами:

$$e_1 = (1, 0),\ e_2 = (0, 1) \text{ и } a = (-1, 0),$$

бинарную операцию сложения можно записать в виде

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_2 y_1 - x_1 y_2, \frac{y_2(x_2 y_1 - x_1 y_2) - x_1}{y_1}).$$

В последнем примере операция сложения некоммутативна и неассоциативна, но при этом по прежнему имеется правосторонняя дистрибутивность.

11^0. Перейдем теперь к рассмотрению более общего случая, когда рассматриваются столбец–матрицы с большим числом строк. В действительности, когда мы рассматривали вывод функции (9), на которой построено такое матричное умножение, мы свели задачу выражения функции для столбец–матриц из двух строк через функцию умножения столбец–матриц из одной строки. Производя аналогичный вывод для столбец–матриц из трех строк, придем к следующему виду:

$$f(x, y_1, y_2, y_3) = \varphi_2\Bigg(f\Big(x, \varphi_2(y_1 y_3^{-1}), \varphi_2(y_2 y_3^{-1}), e_3\Big)\Bigg) y_3,$$

где функция $\varphi_2(x) = f(x, e_3, e_2, e_1)$. При этом частичная операция $x \cdot y = f(x, y, e_2, e_3)$ действует уже на множестве $(\cdot) : B \times \Big(B \setminus \{e_2, e_3\}\Big) \to B$, так что появляется еще одно тождество $(\forall x \in B \setminus \{e_2, e_3\}) : e_3 \cdot x = e_3$.

Дальнейшее обобщение на случай столбец–матриц с произвольным числом строк становится очевидным. При помощи вновь появляющейся функции

$$\varphi_{n-1}(x) = f(x, e_n, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_1)$$

и расширяемой частичной операции $x \cdot y = f(x, y, e_2, \ldots, e_n)$, производим запись функции порядка n через функцию меньшего порядка — $n-1$.

Если ввести переобозначение $\varphi_1 = \varphi$, тогда можно записать, что из определения функций φ_k следует:

$$\begin{cases} \varphi_k(e_i) = e_i, & \text{при условии } i \neq 1, k+1 \\ \varphi_k(e_1) = e_{k+1}, \varphi_k(e_{k+1}) = e_1. \end{cases} \tag{13}$$

Таким образом, функции $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}$ являются образующими симетической группы подстановок φ множества $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. При этом функции $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}$ удовлетворяют соотношению (11). Группа φ задает группу преобразований множества B. При $n > 2$ существует подгруппа $\varphi' = \varphi \cap Aut(G_1)$ автоморфизмов группы G_1. В качестве образующих группы φ' можно выбрать множество $\{\sigma_i = \varphi_i \varphi_{i+1} \varphi_i | i \in \{1, \ldots, n-2\}\}$. По образующим группы φ' можно восстановить образующие группы φ: $\varphi_{i+1} = \sigma_i \varphi_1 \sigma_i$, так что алгебраическая структура множества B характеризуется частичной операцией G_1, унарной операцией φ и образующими группы φ'.

12^0. В качестве примера столбец–матрицы из трех строк по прежнему можно рассмотреть множество вещественных чисел, но с добавлением в качестве элемента "бесконечного числа": $B = R \cup \{\omega\}$. Рассматривая в качестве элементов $e_1 = 1, e_2 = 0, e_3 = \omega$, приходим к тому, что частичная мультипликативная операция совпадает с обычным умножением, функции $\varphi_1(x) = 1 - x, \sigma_1(x) = \frac{1}{x}$ $\left(\varphi_2(x) = \frac{x}{x-1}\right)$. Операция сложения будет совпадать с обычным сложением. Если в качестве нейтрального элемента в матричной группе — E рассмотреть другие значения, например $e_1 = 0, e_2 = 1, e_3 = -1$, то придем к эквивалентному представлению:

$$x \cdot y = \frac{x+y}{1+xy}, \varphi_1(x) = \frac{1-x}{3x+1}\ , \sigma_1(x) = -x\ , \left(\varphi_2(x) = \frac{1+x}{3x-1}\right).$$

В случае $a = \omega$ аддитивная операция получается в виде:

$$x \oplus y = \frac{3xy + x + y - 1}{x + y - xy + 3}.$$

В качестве примера на множестве $B \subseteq R^2$ приведем алгебраическую классификацию обобщенного матричного умножения для столбец–матриц на основе результатов, полученных Г.Г. Михайличенко[1] [11]. Для этого сначала определим эквивалентное матричное умножение столбцов.

Будем говорить, что две функции $f_1 : B_1 \times \Omega_{B_1^n} \to B_1$ и $f_2 : B_2 \times \Omega_{B_2^n} \to B_2$ задают одно и тоже матричное умножение, если найдутся такие три биекции: $\lambda : B_1 \to B_2, \theta : B_1 \to B_2, \chi : \Omega_{B_1^n} \to \Omega_{B_2^n}$, при которых справедливо

$$f_2\Big(\lambda(x), \chi(y_1, y_2, \ldots, y_n)\Big) = \theta\Big(f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\Big).$$

В работах Г.Г. Михайличенко [11] классификация рассматривается с точностью до локальной эквивалентности.

[1] Хотя в указанной работе автор классифицировал введенные им полиметрические геометрии, но можно показать, что эта задача эквивалентна задаче классификации обобщенного матричного умножения для столбец–матриц.

Алгебраическая классификация строится на двух, с точностью до локального изоморфизма, группах[2]:

$$G_1(x_1x_2, y_1y_2) = (x_1y_1, x_2y_2),\ G_2(x_1x_2, y_1y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2).$$

Для того, чтобы выражение для функции φ было проще, будем использовать запись локально изоморфной группы для группы G_1:

$$G_1'(x_1x_2, y_1y_2) = (x_1y_1 + \varepsilon x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$$

где параметр ε может принимать два значения: 0 или -1.

Для столбец–матриц с двумя строками существует пять[3] неэквивалентных решений:

1.) $G_1, \varphi(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2)$,
2.) $G_1', \varphi(x_1, x_2) = (1 - x_1, -x_2)$,
3.) $G_2, \varphi(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$,
4.) G_2, $n \in Z, n \neq 1$, $\varphi(x_1, x_2) = \left(\left(1 - x_1^{\frac{1}{n-1}}\right)^{1-n}, (-1)^n \frac{x_2 x_1^{-\frac{n}{n-1}}}{\left(1 - x_1^{\frac{1}{n-1}}\right)^n}\right)$,
5.) G_2, $\varphi(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{x_1-1}, \frac{x_2 - \ln|x_1|}{(x_1-1)^2} + \ln|\frac{x_1-1}{x_1}|)$.

Для столбец–матриц с тремя строками существует четыре неэквивалентных решения:

1.a.) $G_1, \varphi(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2), \sigma_1(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2x_1^{-1})$,
1.b.) $G_1, \varphi(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2), \sigma_1(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2^{-1})$,
2.) $G_1', \varphi(x_1, x_2) = (1 - x_1, -x_2)$,

$$\sigma_1(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{x_1^2 - \varepsilon x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2 - \varepsilon x_2^2}),$$

3.) $G_2, \varphi(x_1, x_2) = (x_2, x_1), \sigma_1(x_1, x_2) = (x_1, 1 - x_1 - x_2)$.

Для столбец–матриц с четырьмя строками остается только одно неэквивалентное решение:

1.) $G_1, \varphi(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2)$,

$$\sigma_1(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2x_1^{-1}), \sigma_2(x_1, x_2) = (x_1x_2^{-1}, x_2^{-1}).$$

§ 4. Обобщенное матричное умножение (общий случай)

13^0. Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, будем рассматривать произвольные матрицы. В качестве произведения двух матриц $A = ||a_{ij}||$ и $B = ||b_{jk}||$ будем рассматривать матрицу $C = ||c_{ik}||$, построенную при помощи функции $f : \Omega_{B^s} \times \Omega_{B^r} \to$

[2]Которые в дальнейшем переходят в частичные операции.

[3]Если решение 2) с параметром ε и 5) с произвольным $n \in Z$ принимать как только два неэквивалентных решения.

B, где $\Omega_{B^s} \subseteq B^s$ и $\Omega_{B^r} \subseteq B^r$. При этом перемножаться могут матрицы размера $(r \times s)$. Под рангом матрицы будем понимать ее размер, например, ранг матрицы@ — $(r \times s)$". Если мы рассматриваем матрицу–столбец или матрицу–строку, то, если это не будет приводить к недоразумениям, вместо $(r\times 1)$ или $(1\times s)$ будем писать (r) или (s), говоря о ранге таких матриц. Элемент c_{ij}, стоящий в i – той строке и j – том столбце, есть функция f от s элементов i – той строки матрицы A и r элементов j – того столбца матрицы B:

$$c_{ij} = f(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{is}, b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{rj}).$$

В матрице $A \in \Omega_{B^{rs}}$ для обозначения i – той строки будем писать A_{i*}, а для обозначения j – того столбца будем писать A_{*j}. В этих обозначениях можно элемент c_{ij} записать в виде произведения строки на столбец: $c_{ij} = A_{i*}B_{*j}$.

Потребуем, чтобы в множестве всех матриц размера $(r\times s)$ — B^{rs} существовало подмножество матриц $\Omega_{B^{rs}}$, для которых данное умножение было групповым. Усиливая данное требование, будем считать, что множество *всех строк* $\Big\{A_{i*}\Big| i \in \{1, 2, \ldots, r\}, A \in \Omega_{B^{rs}}\Big\}$ совпадает с множеством Ω_{B^s}, а множество *всех столбцов* $\Big\{A_{*j}\Big| j \in \{1, 2, \ldots, s\}, A \in \Omega_{B^{rs}}\Big\}$ совпадает с множеством Ω_{B^r}.

Для множеств B и $\Omega_{B^{rs}}$ будем считать, что всегда выполняется условие: $(\forall x \in B), (\exists A \in \Omega_{B^{rs}}) : a_{ij} = x$. Это означает, что для любого элемента x из B всегда найдется такая матрица A из множества $\Omega_{B^{rs}}$, что её элемент $a_{ij} = x$. Если это не так, тогда всегда можно перейти к подмножеству $B_x = B \setminus \{x\}$, для которого справедливо $\Omega_{B^{rs}} \subseteq B_x^{rs} \subset B^{rs}$, на котором и будем работать.

Для произвольной матрицы A можно рассмотреть матрицы $A_{i\updownarrow j}$ и $A_{m\leftrightarrow n}$, отличающиеся от исходной только перестановкой двух строк i и j или перестановкой двух столбцов m и n соответственно.

Будем говорить, что четверка $\Big(B, (r, s), f, \Omega_{B^{rs}}\Big)$ задает обобщенное матричное умножение, если выполняются следующие аксиомы[4]:

A1 $(\forall A \in \Omega_{B^{rs}}), (\forall C_{*j} \in \Omega_{B^r}), (\exists! B_{*j} \in \Omega_{B^r}) : AB_{*j} = C_{*j}$;

A2 $(\forall B \in \Omega_{B^{rs}}), (\forall C_{i*} \in \Omega_{B^s}), (\exists! A_{i*} \in \Omega_{B^s}) : A_{i*}B = C_{i*}$;

A3 $(\forall A, B, C \in \Omega_{B^{rs}}) : (AB)C = A(BC)$;

A4 $(\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}) : A \in \Omega_{B^{rs}} \Leftrightarrow A_{i\updownarrow j} \in \Omega_{B^{rs}}$;

A5 $(\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, s\}) : A \in \Omega_{B^{rs}} \Leftrightarrow A_{i\leftrightarrow j} \in \Omega_{B^{rs}}$.

Два обобщенных матричных умножения $\Big(B, (r, s), f, \Omega_{B^{rs}}\Big)$ и $\Big(C, (r, s), g, \Omega_{C^{rs}}\Big)$ естественно считать эквивалентными, если существуют такие биекции $\theta : B \to C$, $\chi : \Omega_{B^s} \to \Omega_{C^s}$ и $\lambda : \Omega_{B^r} \to \Omega_{C^r}$, для которых выполняется тождество:

$$\theta\Big(f(x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_r)\Big) = g\Big(\chi(x_1, x_2, \ldots, x_s), \lambda(y_1, y_2, \ldots, y_r)\Big),$$

[4]Очевидно, что с учетом определения множеств $\Omega_{B^{rs}}, \Omega_{B^r}, \Omega_{B^s}$ из аксиом A1, A2 следуют аксиомы групп $(\forall A, B \in \Omega_{B^{rs}}), (\exists! X, Y \in \Omega_{B^{rs}}) : AX = B, YA = B$.

при этом отображение $\theta^{rs} : \Omega_{B^{rs}} \to \Omega_{C^{rs}}$ будет биективным.

14^0. На матричное умножение $\Big(B, (r,s), f, \Omega_{B^{rs}}\Big)$ можно посмотреть, как на умножение двух столбцов $\Big(B^s, (r,1), F, \Omega_{\Omega^r_{B^s}}\Big)$, где *элемент* $A_{i*} \in B^s$ представлен *строкой*, а умножение

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1*} \\ A_{2*} \\ \vdots \\ A_{r*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1*} \\ B_{2*} \\ \vdots \\ B_{r*} \end{pmatrix}$$

построено на функции: $F_s : \Omega_{B^s} \times \Omega^r_{B^s} \to \Omega_{B^s}$, которая связана с функцией $f : B^s \times B^r \to B$ следующим образом: $F_s(A_{i*}, B_{1*}, B_{2*}, \ldots, B_{r*}) = A_{i*}B$.

Аналогично можно рассмотреть и умножение двух строк $\Big(B^r, (1,s), F_r, \Omega_{\Omega^s_{B^r}}\Big)$, где *элемент* $A_{*i} \in B^r$ представлен *столбцом*, с умножением

$$AB = \begin{pmatrix} A_{*1} & A_{*2} & \cdots & A_{*s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{*1} & B_{*2} & \cdots & B_{*s} \end{pmatrix},$$

построенным на функции $F_r : \Omega^s_{B^r} \times \Omega_{B^r} \to \Omega_{B^r}$, такой, что справедливо:

$$F(A_{*1}, A_{*2}, \cdots, A_{*s}, B_{*i}) = AB_{*i}.$$

Для множеств $\Omega_{\Omega^r_{B^s}}$, $\Omega_{\Omega^s_{B^r}}$ справедливо равенство $\Omega_{\Omega^r_{B^s}} = \Omega_{\Omega^s_{B^r}} = \Omega_{B^{rs}}$.

На примере матрицы–столбца, состоящего из двух строк, можно увидеть, что совершенно естественно вводится понятие транспонированной матрицы. Действительно, умножение двух столбцов записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1, y_2) \\ f(x_2, y_1, y_2) \end{pmatrix}.$$

Введем функцию $f^t(y_1, y_2, x_1) = f(x_1, y_1, y_2)$, которая будет определять умножение матриц–строк:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^t(y_1, y_2, x_1) & f^t(y_1, y_2, x_2) \end{pmatrix}.$$

Умножение, очевидно, будет также групповым, и удовлетворять всем, определенным ранее, аксиомам. Для обозначения транспонированной матрицы будем писать:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T.$$

При этом умножения связаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\right)^T.$$

Данный параграф показывает, что без ограничения общности многие утверждения можно формулировать для матриц – строк или матриц – столбцов.

15^0. Рассмотрим несколько свойств обобщенного матричного умножения, которые имеют место и в обычном матричном умножении.

В силу того, что матричное умножение — групповое, то в нем присутствует нейтральный элемент $E \in \Omega_{B^{rs}}$ со свойствами $(\forall A \in \Omega_{B^{rs}}) : AE = EA = A$. Запишем матрицу E через ее элементы $E = ||e_{ij}||$, тогда это равенство можно переписать в виде:

$$\begin{array}{l} f(e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{is}, a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{rj}) = E_{i*}A_{*j} = a_{ij}, \\ f(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{is}, e_{1j}, e_{2j}, \ldots, e_{rj}) = A_{i*}E_{*j} = a_{ij}. \end{array} \tag{14}$$

Из первого соотношения видно, что для того чтобы из матрицы A получить матрицу с переставленными между собой строками i и j, необходимо слева ее умножить на единичную матрицу с переставленными строками i и j — $E_{i\updownarrow j}$. Для перестановки двух столбцов матрицу необходимо умножить справа на матрицу $E_{i\leftrightarrow j}$ с переставленными столбцами:

$$A_{i\updownarrow j} = E_{i\updownarrow j}A \text{ и } B_{i\leftrightarrow j} = BE_{i\leftrightarrow j}. \tag{15}$$

Далее будем рассматривать только матрицы — столбцы, т.к. полученные утверждения легко, с учетом параграфа 14^0, интерпретировать для матриц — строк и для произвольных матриц. Простейшим следствием из (15) является тождество:

$$E_{i\updownarrow j}E_{i\updownarrow j} = E, \tag{16}$$

которое говорит только о том, что если дважды переставить две строки, то все встанет на свои места. Утверждение достаточно очевидное, так же, как и то, что элементы множества $\{E_{1\updownarrow 2}, E_{1\updownarrow 3}, \ldots, E_{1\updownarrow r}\}$ являются образующими группы перестановок строк. В этом случае перестановку любых двух строк можно записать через образующие:

$$E_{i\updownarrow j} = E_{1\updownarrow i}E_{1\updownarrow j}E_{1\updownarrow i}. \tag{17}$$

В силу того, что $E_{i\updownarrow j} = E_{j\updownarrow i}$, тогда с учетом (16) и (17) получаем тождество:

$$E_{1\updownarrow i}E_{1\updownarrow j}E_{1\updownarrow i}E_{1\updownarrow j}E_{1\updownarrow i}E_{1\updownarrow j} = E. \tag{18}$$

Рассматриваемые образующие $\{E_{1\updownarrow i}\}$ естественным образом порождают $r-1$ преобразований $\{\varphi_i\}$ множества Ω_{B^s} следующим образом:

$$(\forall A_{j*} \in \Omega_{B^s}) : \varphi_i(A_{j*}) = A_{j*}E_{1\updownarrow i}, \tag{19}$$

которые являются образующими симметрической группы преобразований множества Ω_{B^s}. Для (19) можно записать тождество:

$$\varphi_i(E_{1*}) = E_{i*}, \varphi_i(E_{i*}) = E_{1*} \text{ и } \varphi_i(E_{j*}) = E_{j*} \text{ для всех } j \neq 1, i. \tag{20}$$

Перепишем тождества (16) и (18) для отображений $\{\varphi_i\}$:

$$\varphi_i\varphi_i = id, (\varphi_i\varphi_j)^3 = id. \tag{21}$$

16^0. Рассмотрим теперь несколько лемм, связанных с эквивалентностью матричного умножения.

Лемма 1 *Если обобщенные матричные умножения* $\Big(B, (r,s), f, \Omega_{B^{rs}}\Big)$ *и* $\Big(C, (r,s), g, \Omega_{C^{rs}}\Big)$ *эквивалентны, тогда соответствующие им группы* $(\Omega_{B^{rs}}, \cdot)$ *и* $(\Omega_{C^{rs}}, \odot)$ *изоморфны.*

Справедливость этого утверждения вытекает из того, что биекции $\theta : B \to C$, $\chi : \Omega_{B^s} \to \Omega_{C^s}$ и $\lambda : \Omega_{B^r} \to \Omega_{C^r}$ порождают биекции θ^{rs}, χ^r, λ^s из множества $\Omega_{B^{rs}}$ в множество $\Omega_{C^{rs}}$ следующим образом:

$$\theta^{rs}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(x_{11}) & \theta(x_{12}) & \dots & \theta(x_{1s}) \\ \theta(x_{21}) & \theta(x_{22}) & \dots & \theta(x_{2s}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta(x_{r1}) & \theta(x_{r2}) & \dots & \theta(x_{rs}) \end{pmatrix},$$

$$\chi^{r}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1s}) \\ \chi(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2s}) \\ \vdots \\ \chi(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rs}) \end{pmatrix},$$

$$\lambda^{s}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rs} \end{pmatrix} = \left(\lambda\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{r1} \end{pmatrix} \; \lambda\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{r2} \end{pmatrix} \; \dots \; \lambda\begin{pmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \\ \vdots \\ x_{rs} \end{pmatrix} \right).$$

Приходим к тому, что две группы $(\Omega_{B^{rs}}, \cdot)$ и $(\Omega_{C^{rs}}, \odot)$ изотопны, следовательно, с учетом второй теоремы Алберта [5], они изоморфны.

Верно или нет обратное утверждение, пока неизвестно, но если изоморфизм можно записать через матричное произведение $\Psi(X) = A \cdot X \cdot B$, так, что: $\Psi(X) \cdot \Psi(Y) = \Psi(X \odot Y)$, тогда соответствующие функции f и g, определяющие матричное умножение, будут эквивалентны. Действительно, можно записать:

$$X_{i*} \odot Y_{*j} = \Psi^{-1}(\Psi(X_{i*}) \cdot \Psi(Y_{*j})) = (X_{i*} \cdot B) \cdot (A \cdot Y_{*j}) = X'_{i*} \cdot Y'_{*j}.$$

Таким образом, преобразование $\chi_B : \Omega_{B^s} \to \Omega_{B^s}$ задается умножением строки на матрицу B, а преобразование $\lambda_A : \Omega_{B^r} \to \Omega_{B^r}$ задается умножением матрицы A на столбец.

В случае, когда $B = A^{-1}$, мы приходим к автоморфизму и, как следствие — к тому, что преобразования $\chi_{A^{-1}}, \lambda_A$ задают группу движения для функции f:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_r) = f\Big(\chi_{A^{-1}}(x_1, x_2, \dots, x_s), \lambda_A(y_1, y_2, \dots, y_r)\Big).$$

Рассмотрим еще одну лемму:

Лемма 2 *Матрица–столбец ранга (r) из множества Ω_{B^r} не может содержать совпадающих элементов.*

Из свойства (14) следует, что в единичной матрице E не может быть двух совпадающих элементов, так как это приводит к неоднозначности и противоречию. Действительно, пусть, например, $e_m = e_n$, тогда

$$x_m = f(e_m, x_1, x_2, \dots, x_r) = f(e_n, x_1, x_2, \dots, x_r) = x_n.$$

Из этого следует, что в подгруппе $(\ ,\Omega^{(i)}_{B^r})$ среди всех строк в столбце больше не встречается элемента e_i, кроме как в i – той строке, следовательно, $(\forall k \in \{1,2,\dots i-1, i+1,\dots,r\}) : e_k \notin B_i$.

Если данное утверждение справедливо для произвольного элемента e_i из единичной матрицы E, тогда это будет справедливо и для произвольной матрицы A, так как мы всегда можем перейти к изоморфной группе $(\cdot,\Omega_{B^r}) \to (\odot,\Omega_{B^r})$, в которой матрица A будет нейтральным элементом.

17^0. Рассмотрим теперь некоторые свойства матриц — столбцов, рассматривая матричные умножения $\Big(B,(r,1),f,\Omega_{B^r}\Big)$.

В множестве Ω_{B^r} выделим подмножество матриц, для которых i – тая строка совпадает с i – той строкой единичной матрицы E. Для такого подмножества введем специальное обозначение: $\Omega^{(i)}_{B^r} = \{A \in \Omega_{B^r} | a_i = e_i\}$. Если данное свойство выполнено для нескольких строк $i_1,i_2,\dots,i_k$, тогда $\Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}_{B^r} = \Omega^{(i_1)}_{B^r}\bigcap\Omega^{(i_2)}_{B^r}\bigcap\dots\bigcap\Omega^{(i_k)}_{B^r}$.

Теорема 1 *На подмножестве $\Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}_{B^r}$ естественным образом определена подгруппа $(\Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}_{B^r},\cdot)$ группы $(\Omega_{B^r},\cdot)$.*

Из свойства (14), которое в нашем случае можно записать в виде

$$f(e_i,x_1,x_2,\dots,x_r) = x_i$$

следует, что $(\forall X,Y \in \Omega^{(i)}_{B^r})$, их произведение, так же будет из этого множества $XY \in \Omega^{(i)}_{B^r}$, так как $x_i = y_i = e_i$, откуда, в силу определения множества $\Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}_{B^r}$, следует, что если $X,Y \in \Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}_{B^r}$, то и их произведение $XY \in \Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}_{B^r}$.

Из определения множества $\Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}_{B^r}$ следует, что нейтральный элемент $E \in \Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}_{B^r}$.

Обратный элемент X^{-1} для произвольного $X \in \Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}_{B^r}$ также должен быть из множества $\Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}_{B^r}$. В противном случае, если $X^{-1} \notin \Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}_{B^r}$, тогда из условия (14) также следует, что $XX^{-1} \notin \Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}_{B^r}$. Это означает $XX^{-1} \neq E$, что противоречит тому, что $(\Omega_{B^r},\cdot)$ — группа.

Ассоциативность в подгруппе $(\Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}_{B^r},\cdot)$ также следует из ассоциативности в группе $(\Omega_{B^r},\cdot)$.

Перейдем теперь к рассмотрению произвольных матриц и по аналогии введем обозначение для подмножества $\Omega^{(|i)}_{B^{rs}}$ множества матриц $\Omega_{B^{rs}}$, если в i – том столбце будет i – тый столбец матрицы E: $\Omega^{(|i)}_{B^{rs}} = \{X \in \Omega_{B^{rs}} | X_{*i} = E_{*i}\}$. Аналогичным же образом введем и подмножество:

$$\Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k|j_1,j_2,\dots,j_m)}_{B^{rs}} = \Omega^{(i_1)}_{B^{rs}}\bigcap\Omega^{(i_2)}_{B^{rs}}\bigcap\dots\bigcap\Omega^{(i_k)}_{B^{rs}}\bigcap\Omega^{(|j_1)}_{B^{rs}}\bigcap\Omega^{(|j_2)}_{B^{rs}}\bigcap\dots\bigcap\Omega^{(|j_m)}_{B^{rs}}.$$

С учетом параграфа 14^0 и Теоремы 1 следует:

Теорема 2 *На подмножестве $\Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k|j_1,j_2,\dots,j_m)}_{B^{rs}}$ естественным образом определена подгруппа $(\Omega^{(i_1,i_2,\dots,i_k|j_1,j_2,\dots,j_m)}_{B^{rs}},\cdot)$ группы $(\Omega_{B^r},\cdot)$.*

Действительно, если на подмножествах $\Omega_{B^{rs}}^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}$ и $\Omega_{B^{rs}}^{(|j_1,j_2,\dots,j_m)}$ определены подгруппы, то и их пересечение также будет подгруппой.

18^0. Для простоты записи множества $\Omega_{B^{rs}}^{(1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,r|1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,s)}$ будем его обозначать в виде $\Omega_{B^{rs}}^{\overline{(i|j)}}$, где черта над скобкой означает, что в левой части скобки имеются все значения от 1 до r, за исключением i – того значения, так же, как и в правой части скобки имеются все значения от 1 до s за исключением j – того значения.

Вернемся вновь к рассмотрению матрицы–столбца. Для группы, порождаемой подгруппой $(\ ,\Omega_{B^r}^{\overline{(i)}})$, состоящей только из одной нееединичной i – той строки, введем специальное обозначение на групповую операцию $(\cdot_{_i})$ и обозначение на множество в виде B_i так, что справедливо:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ e_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ e_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ x_i \cdot_{_i} y_i \\ \vdots \\ e_r \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Omega_{B^r}^{\overline{(i)}} = \left\{ \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ e_r \end{pmatrix} \in \Omega_{B^r} \middle| x_i \in B_i \right\}.$$

Для элемента x в группе $(\cdot_{_i}, B_i)$ обратный элемент, когда это будет удобно, будем обозначать $(x)_i^{-1}$ или $E_i(x)$ так, что $x\cdot_{_i}(x)_i^{-1} = x\cdot_{_i}E_i(x) = e_i$. Аналогично, при рассмотрении матриц $\Omega_{B^{rs}}$ соответствующие подгруппы $(\ ,\Omega_{B^{rs}}^{\overline{(i|j)}})$ порождают группы $(\cdot_{_{ij}}, B_{ij})$.

Таким образом, приходим к тому, что при помощи определения

$$x\cdot_{_i}y_i = f(x, e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, y_i, e_{i+1} \dots, e_r)$$

задаются две операции: групповая $(\cdot_{_i}) : B_i \times B_i \to B_i$ и частичная $(\cdot_{_i}) : B \times B_i \to B$. Причем для частичной операции $(\cdot_{_i}, B)$, для произвольных $e_k \neq e_i$, справедливо $e_k\cdot_{_i}x = e_k$. Оставим обозначение в этих операциях совпадающим, а отличать их будем по используемому множеству.

19^0. В следующих параграфах, для того чтобы использовать полученный результат как для матриц–столбцов, так и для произвольных матриц, будем иногда рассматривать более общую задачу, когда умножение матриц–столбцов построено не на одной функции f, а на r функциях $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ таких, что $f_i : \Omega_i \times \Omega_{B^r} \to B$, где $\Omega_i \subseteq B$.

Действительно, когда мы рассматриваем подгруппу, построенную на таких $r \times s$ матрицах, которые отличаются от единичной только в первом столбце — $(\ ,\Omega_{B^{rs}}^{(\ |\overline{1})})$, тогда это эквивалентно такой, более общей задаче, когда

$$f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_r) = f(x, e_{i2}, , e_{i3}, \dots, e_{is}, y_1, y_2, \dots, y_r).$$

В этом случае $\Omega_i = B_{i1}$.

Произведением двух матриц X и Y будет матрица $C = XY$, элементы которой запишутся в виде: $c_i = f_i(x_i, y_1, y_2, \dots, y_n)$. На такие матрицы легко расширяется доказательство теорем 1 и 2. В этом случае у нас возникает уже не r частичных операций, а r^2:

$$x\circ_{_{ij}}y_j = f_i(x, e_1, e_2, \dots, e_{j-1}, y_j, e_{j+1} \dots, e_r).$$

При этом $x\circ_{ii}y = x\cdot_i y$, и выполняются соотношения: $e_i\circ_{ij}x = e_i$, $x\circ_{ij}e_j = x$ и $(x\circ_{ij}y)\circ_{ij}z = x\circ_{ij}(y\cdot_j z)$, имеется и правый обратный: $(x\circ_{ij}y)\circ_{ij}(y)_j^{-1} = x\circ_{ij}e_j = x$.

20^0. Ответим на вопрос — когда две группы $(\cdot_{ij}, B_{ij})$ и $(\cdot_{mn}, B_{mn})$, которые возникают в подгруппах, построенных на таких матрицах, которые совпадают с единичной матрицей, за исключением одного элемента, стоящего в $i(m)$ – той строке и $j(n)$ – том столбце — $\Omega_{B^{rs}}^{\overline{(i|j)}}(\Omega_{B^{rs}}^{\overline{(m|n)}})$, будут изоморфны?

Теорема 3 *Если имеется такой автоморфизм $\Psi_{ij,mn} : \Omega_{B^{rs}} \to \Omega_{B^{rs}}$, при котором подмножество $\Omega_{B^{rs}}^{\overline{(i|j)}}$ отображается в подмножество $\Omega_{B^{rs}}^{\overline{(m|n)}}$, тогда соответствующие группы $(\cdot_{ij}, B_{ij})$ и $(\cdot_{mn}, B_{mn})$ будут изоморфны.*

Автоморфизм $\Psi_{ij,mn}$ порождает изоморфизм $\psi_{ij,mn} : B_{ij} \to B_{mn}$ такой, что:

$$\Psi_{ij,mn}\begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1j} & \dots & e_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & e_{is} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{r1} & \dots & e_{rj} & \dots & e_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} & \dots & e_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & \dots & \psi_{ij,mn}(x_{ij}) & \dots & e_{ms} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{r1} & \dots & e_{rn} & \dots & e_{rs} \end{pmatrix}.$$

Из определения автоморфизма

$$(\forall X, Y \in \Omega_{B^{rs}}^{\overline{(i|j)}}) : \Psi_{ij,mn}(XY) = \Psi_{ij,mn}(X)\Psi_{ij,mn}(Y)$$

следует, что $(\forall x, y \in B_{ij}) : \psi_{ij,mn}(x\cdot_{ij}y) = \psi_{ij,mn}(x)\cdot_{mn}\psi_{ij,mn}(y)$.

Как следствие данной теоремы для матриц–столбцов, все её группы $(\cdot_i, B_i)$ будут изоморфны, так как имеется автоморфизм $\Psi_{i,m} : X \mapsto E_{i\updownarrow m}XE_{i\updownarrow m}$, удовлетворяющий условию теоремы. Данный автоморфизм, с учетом определения (19) для отображений φ_i и выражения (17), порождает изоморфизм $\varphi_i \circ \varphi_m \circ \varphi_i : B_i \to B_m$. Это легко увидеть на примере матрицы–столбца из двух строк. Автоморфизм

$$\Psi_{1,2} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

порождает изоморфизм $\varphi_2 : B_1 \to B_2$:

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ e_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}.$$

В качестве второго примера можно привести множество квадратных матриц $\Omega_{B^{rr}}$, таких, что их нейтральная матрица E состоит только из двух элементов e_1 и e_2, причем на диагонали стоит один элемент e_1, а все недиагональные элементы равны e_2 (как для обычных матриц 1 и 0). В этом случае все группы $(\cdot_{ij}, B_{ij})$ сводятся к двум группам $(\cdot_{11}, B_{11})$ и $(\cdot_{12}, B_{12})$, все остальные им изоморфны.

Действительно, из построения нейтрального элемента E в группе матриц $(\ , \Omega_{B^{rs}})$ следует, что перестановка двух строк i и j так же, как и перестановка двух столбцов i и j, задается одной и той же матрицей $E_{i\updownarrow j} = E_{i\leftrightarrow j}$. Тогда автоморфизм, задающий перестановку двух диагональных элементов x_{11} и x_{kk} матрицы X, запишется в виде: $\Psi_{11,kk} : X \mapsto E_{1\updownarrow k} X E_{1\leftrightarrow k}$. Автоморфизм, задающий перестановку недиагональных элементов x_{12} и x_{ij} матрицы X, запишется в виде: $\Psi_{12,ij} : X \mapsto E_{2\updownarrow j} E_{1\updownarrow i} X E_{1\leftrightarrow i} E_{2\leftrightarrow j}$.

21^0. Посмотрим теперь на примере матрицы–столбца с n–строками, какими свойствами обладает изоморфизм φ_i и как с его помощью выражается отображение $f : B \times \Omega_{B^n} \to B$.

Рассмотрим сначала более общую задачу из параграфа 19^0, когда умножение матриц построено на n функциях $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, таких, что $f_i : \Omega_i \times \Omega_{B^n} \to B$. Для этой задачи построим рекуррентную формулу, определяющую вид функций $\{f_i\}$.

Теорема 4 *Если для матриц–столбцов, состоящих из n строк с матричным умножением, построенных на n функциях $\{f_i\}$, выполняются аксиомы 1–4 и существуют*

а) матрицы $B_{1i} \in \Omega_{B^n}^{\overline{(1i)}}$ со всеми единичными элементами за исключением двух: в первой строке — $b_1(1i)$ и i–той — $b_i(1i)$,

б) биекции $\omega_{i1} : \Omega_i \setminus \{e_i\} \to \Omega_1 \setminus \{e_1\}$,

для которых справедливо $(\forall y \in \Omega_i \setminus \{e_i\})$: $b_i(1i) \circ_{_{i1}} \omega_{i1}(y) = y$, тогда функцию f_i, для случая $y_i \neq e_i$ можно записать через частичные операции $(\circ_{_{k1}})$ и функции ω_{k1} и $\varphi_{i(k1)}(x) = f_i(x, b_1(1k), e_2, e_3, \dots, e_{k-1}, b_k(1k), e_{k+1}, \dots, e_n)$ в рекуррентном виде:

$$f_i(x, y_1^{(k-1)}, y_2^{(k-1)}, \dots, y_{n-k}^{(k-1)}, e_{n+1-k}, \dots, e_n) =$$
$$= \varphi_{i((n+1-k)1)}\left(f_i(x, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_{n-k}^{(k)}, e_{n+1-k}, \dots, e_n)\right) \circ_{_{i1}} \omega_{(n+1-k)1}(y_{n+1-k}^{(k-1)}),$$ *где*
$$y_i^{(k)} = \varphi^{-1}_{i((n+1-k)1)}\left(y_i^{(k-1)} \circ_{_{i1}} E_1 \circ \omega_{(n+1-k)1}(y_{n+1-k}^{(k-1)})\right)$$ *и* $y_j^{(0)} = y_j, i \in \{1, 2, \dots, n-k\}$.

Рассмотрим матрицы A_{1k}, обратные к матрицам B_{1k}, и с их помощью построим обратные функции

$$\varphi^{-1}_{i(k1)}(x) = f_i(x, a_1(1k), e_2, e_3, \dots, e_{k-1}, a_k(1k), e_{k+1}, \dots, e_n),$$

при этом $\varphi^{-1}_{k(k1)}(b_k(1k)) = e_k$. То, что эти функции будут действительно обратными, следует из равенства $XE = XB_{1k}A_{1k} = XA_{1k}B_{1k}$. Из принадлежности $A_{1k}, B_{1k} \in \Omega_{B^n}^{\overline{(1k)}}$ следует $\varphi_{k(k1)}(e_i) = \varphi^{-1}_{k(k1)}(e_i) = e_i$ при $i \neq k, 1$.

Введем обозначение для матрицы $C_{m1} \in \Omega_{B^n}^{\overline{(1)}}$, которая отличается от единичной матрицы только первым элементом, равным $\omega_{m1}(y_m)$, соответственно, у обратной матрицы C^{-1}_{m1} первый элемент будет $E_1 \circ \omega_{m1}(y_m)$. Очевидно, что для произвольной матрицы Y справедливо равенство

$$Y = YC^{-1}_{m1}C_{m1} = YC^{-1}_{m1}A_{1m}B_{1m}C_{m1}.$$

Распишем теперь покомпонентно данное равенство для случая $m = n$, с учетом свойств частичных операций $(\circ_{_{ij}}, B)$, рассмотренных в параграфе 19^0:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ b_n(1n) \circ_{_{n1}} \omega_{n1}(y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \cdot_1 E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ y_2 \circ_{21} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \cdot_1 E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ y_2 \circ_{21} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(1n) \\ e_2 \\ \vdots \\ a_n(1n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(1n) \\ e_2 \\ \vdots \\ b_n(1n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi^{-1}_{1(n1)} (y_1 \cdot_1 E_1 \circ \omega_{n1}(y_n)) \\ \varphi^{-1}_{2(n1)} (y_2 \circ_{21} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n)) \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(1n) \\ e_2 \\ \vdots \\ b_n(1n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = Y^{(1)} B_{1n} C_{n1}.$$

Где введено обозначение $Y^{(1)} = Y C^{-1}_{n1} A_{1n}$ или построчно:

$$y^{(1)}_i = \varphi^{-1}_{i(n1)} \Big(y_i \circ_{i1} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \Big).$$

Таким образом, при переходе от матрицы Y к $Y^{(1)}$ мы произвели такое преобразование, при котором последний элемент стал единичным – e_n. Произведя подобное преобразование, далее мы перейдем от $Y^{(1)}$ к $Y^{(2)}$ так, что $Y^{(2)} = Y^{(1)} C^{-1}_{(n-1)1} A_{1(n-1)}$. На k–том шагу придем к $Y^{(k)} = Y^{(k-1)} C^{-1}_{(n+1-k)1} A_{1(n+1-k)}$. Данное равенство при построчной записи будет выглядеть следующим образом:

$$y^{(k)}_i = \varphi^{-1}_{i((n+1-k)1)} \Big(y^{(k-1)}_i \circ_{i1} E_1 \circ \omega_{(n+1-k)1}(y^{(k-1)}_{n+1-k}) \Big) \text{ и } y^{(0)}_j = y_j, i \in \{1, 2, \ldots, n-k\}.$$

Перейдем теперь к матричному умножению и распишем его покомпонентно:

$$XY = XY^{(1)} B_{1n} C_{n1} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, y^{(1)}_1, y^{(1)}_2, \ldots, e_n) \\ f_2(x_2, y^{(1)}_1, y^{(1)}_2, \ldots, e_n) \\ \vdots \\ f_n(x_n, y^{(1)}_1, y^{(1)}_2, \ldots, e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(1n) \\ e_2 \\ \vdots \\ b_n(1n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_{1(n1)} \Big(f_1(x_1, y^{(1)}_1, y^{(1)}_2, \ldots, e_n) \Big) \cdot_1 \omega_{n1}(y_n) \\ \varphi_{2(n1)} \Big(f_2(x_2, y^{(1)}_1, y^{(1)}_2, \ldots, e_n) \Big) \circ_{21} \omega_{n1}(y_n) \\ \vdots \\ \varphi_{n(n1)} \Big(f_n(x_n, y^{(1)}_1, y^{(1)}_2, \ldots, e_n) \Big) \circ_{n1} \omega_{n1}(y_n) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, пришли к выражению:

$$f_i(x_i, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \varphi_{i(n1)} \Big(f_i(x_i, y^{(1)}_1, y^{(1)}_2, \ldots, e_n) \Big) \circ_{i1} \omega_{n1}(y_n).$$

Аналогичным образом, если мы рассмотрим данное умножение после k–того преобразования, когда $Y^{(k)} \in \Omega^{(n-k, n+1-k, \ldots, n-1)}_{B^n}$, то получим следующее равенство: $XY^{(k-1)} =$

$XY^{(k)}B_{1(n+1-k)}C_{(n+1-k)1}$, которое при построчной записи будет выглядеть в виде:
$f_i(x, y_1^{(k-1)}, y_2^{(k-1)}, \dots, y_{n-k}^{(k-1)}, e_{n+1-k}, \dots, e_n) =$
$$= \varphi_{i((n+1-k)1)}\left(f_i(x, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_{n-k}^{(k)}, e_{n+1-k}, \dots, e_n)\right) \circ_{i1} \omega_{(n+1-k)1}(y_{n+1-k}^{(k-1)}).$$
Теорема доказана.

Доказанная теорема сформулирована в частном виде. Во первых, при доказательстве, рассматривая последовательность преобразования матрицы $Y \to Y^{(1)} \to Y^{(2)} \to \dots \to Y^{(n-1)}$, мы рассматривали только случай, когда $Y^{(1)} \in \Omega_{B^n}^{(n)}, Y^{(2)} \in \Omega_{B^n}^{(n,n-1)}, \dots, Y^{(n-1)} \in \Omega_{B^n}^{\overline{(1)}}$, хотя мы можем рассмотреть любую последовательность $Y^{(1)} \in \Omega_{B^n}^{(i_n)}, Y^{(2)} \in \Omega_{B^n}^{(i_n, i_{n-1})}, \dots, Y^{(n-1)} \in \Omega_{B^n}^{\overline{(i_1)}}$, где $i_1, i_2, \dots, i_n$ — произвольная перестановка $1, 2, \dots, n$.

Во вторых, первоначально мы наложили условие: $(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}) : y_i \neq e_i$. С другой стороны, если это не так, например, m из n значений совпадает с единичными $y_i = e_i$ где $i \in \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$, тогда, с учетом предыдущего замечания, мы приходим к формуле, полученной в теореме, но с условием, что $Y^{(m)} = Y$, вместо $Y^{(0)} = Y$.

22^0. Покажем теперь, что если на множестве B с частичной операцией $(\cdot_1, B)$ определена функция φ, для которой справедливо тождество (11), тогда на этом множестве функция $f : B \times \Omega_{B^2} \to B$ вида

$$f(x, y_1, y_2) = \begin{cases} \varphi\left(x \cdot_1 \varphi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 y_2 & \text{при } y_2 \neq e_2 \\ x \cdot_1 y_1 & \text{при } y_2 = e_2 \end{cases} \tag{22}$$

определяет обобщенное матричное умножение матриц–столбцов из двух строк.

Выполнение Аксиомы 1 означает, что для произвольных $X, Z \in \Omega_{B^2}$ существует только одна такая матрица Y, для которой справедливо равенство: $XY = Z$. Рассмотрим покомпонентно данное равенство, которое приводит к системе из двух уравнений:

$$\varphi\left(x_1 \cdot_1 \varphi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 y_2 = z_1,$$

$$\varphi\left(x_2 \cdot_1 \varphi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 y_2 = z_2.$$

Из второго уравнения выделим выражение:

$$\varphi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right) = (x_2)_1^{-1} \cdot_1 \varphi\left(z_2 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)$$

которое подставим в первое:

$$\varphi\left(x_1 \cdot_1 (x_2)_1^{-1} \cdot_1 \varphi\left(z_2 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 y_2 =$$

$$= \varphi\left(\varphi\left(x_1 \cdot_1 (x_2)_1^{-1}\right) \cdot_1 E_1 \circ \varphi\left(z_2 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 z_2 = z_1.$$

Полученное равенство сначала преобразуем к виду:

$$E_1 \circ \varphi\left(z_1 \cdot_1 (z_2)_1^{-1}\right) \cdot_1 \varphi\left(x_1 \cdot_1 (x_2)_1^{-1}\right) = \varphi\left(z_2 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right),$$

а затем получим окончательное выражение:

$$y_2 = E_1 \circ \varphi\left(E_1 \circ \varphi\left(z_1 \cdot_1 (z_2)_1^{-1}\right) \cdot_1 \varphi\left(x_1 \cdot_1 (x_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 z_2.$$

Для того чтобы получить выражение для y_1, достаточно произвести замену $z_1 \leftrightarrow z_2$ и $x_1 \leftrightarrow x_2$.

Выполнение Аксиомы 2 достаточно очевидное, так как функцию (22) достаточно легко разрешить относительно первого аргумента:

$$x_i = \varphi\left(z_i \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right) \cdot_1 E_1 \circ \varphi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right).$$

Для того чтобы показать выполнение Аксиомы 3, упростим сначала выражение

$$\varphi\left(\varphi\left(x \cdot_1 y\right) \cdot_1 E_1 \circ \varphi\left(z \cdot_1 y\right)\right),$$

для этого воспользуемся основным свойством функции φ — (11):

$$\varphi\left(\varphi\left(x \cdot_1 y\right) \cdot_1 \varphi \circ \varphi \circ E_1 \circ \varphi\left(z \cdot_1 y\right)\right) =$$

$$= \varphi\left(x \cdot_1 y \cdot_1 \varphi \circ E_1 \circ \varphi \circ E_1 \circ \varphi\left(z \cdot_1 y\right)\right) \cdot_1 \varphi \circ E_1 \circ \varphi\left(z \cdot_1 y\right) =$$

$$= \varphi\left(x \cdot_1 E_1\left(z\right)\right) \cdot_1 \varphi \circ E_1 \circ \varphi\left(z \cdot_1 y\right).$$

Таким образом, пришли к тождеству:

$$\varphi\Big(\varphi\left(x \cdot_1 y\right) \cdot_1 E_1 \circ \varphi\left(z \cdot_1 y\right)\Big) = \varphi\Big(x \cdot_1 E_1\left(z\right)\Big) \cdot_1 \varphi \circ E_1 \circ \varphi\left(z \cdot_1 y\right). \tag{23}$$

Рассмотрим теперь выполнение ассоциативности $(XY)Z = X(YZ)$ на примере первой строки. Левую часть равенства можно записать в виде:

$$\varphi\left(\varphi\left(x_1 \cdot_1 \varphi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 y_2 \cdot_1 \varphi\left(z_1 \cdot_1 (z_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 z_2.$$

Воспользовавшись равенством $\varphi^2 = id$ и тождеством (11), приходим к выражению:

$$\varphi\left(x_1 \cdot_1 \varphi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right) \cdot_1 \varphi \circ E_1\left(y_2 \cdot_1 \varphi\left(z_1 \cdot_1 (z_2)_1^{-1}\right)\right)\right) \cdot_1 \varphi\left(y_2 \cdot_1 \varphi\left(z_1 \cdot_1 (z_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 z_2 \tag{24}$$

Рассмотрим теперь первую строку правой части равенства $(XY)Z = X(YZ)$:

$$\varphi\left(x_1 \cdot_1 \varphi\left(t_1 \cdot_1 (t_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 t_2, \tag{25}$$

где

$$t_1 = \varphi\left(y_1 \cdot_1 \varphi\left(z_1 \cdot_1 (z_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 z_2 \quad \text{и} \quad t_2 = \varphi\left(y_2 \cdot_1 \varphi\left(z_1 \cdot_1 (z_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 z_2.$$

Воспользуемся теперь тождеством (23) и распишем выражение:

$$\varphi\left(t_1 \cdot_1 E_1(t_2)\right) = \varphi\Bigg(\varphi\Big(y_1 \cdot_1 \varphi(z_1 \cdot_1 E_1(z_2))\Big) \cdot_1 E_1\Big(\varphi\Big(y_2 \cdot_1 \varphi(z_1 \cdot_1 E_1(z_2))\Big)\Big)\Bigg) =$$

$$= \varphi\Big(y_1 \cdot_1 E_1(y_2)\Big) \cdot_1 \varphi \circ E_1 \circ \varphi\Big(y_2 \cdot_1 \varphi(z_1 \cdot_1 E_1(z_2))\Big).$$

Подставляя полученное выражение в (25) и замечая, что последнее слагаемое выражения (24) совпадает с t_2, приходим к справедливости ассоциативности для первой строки. Так как первая строка ничем в наших рассуждениях не выделена, приходим к справедливости Аксиомы 3.

Выполнение Аксиомы 4 следует из симметрии построения матричного умножения. Аксиома 5 для матриц–столбцов отсутствует. Таким образом, приходим к тому, что на множестве B с частичной операцией $(\cdot_1, B)$ и функцией φ, удовлетворяющей тождеству (11), функция вида (22) определяет матричное умножение для матриц–столбцов из двух строк.

23^0. При помощи биекции $L\colon B \to B_L$, для которой выполняется $B_L \subseteq B, L(e_2) = e_2$, построим операцию

$$x \oplus y = \begin{cases} \varphi(x\cdot_1 E_1 \circ L(y))\cdot_1 y, & \text{при } y \neq e_2 \\ x, & \text{при } y = e_2 \end{cases}. \tag{26}$$

Очевидно, что данная операция является группоидом с нейтральным элементом — "e_2". Действительно, из определения операции (26) следует, что "e_2"является правым нейтральным, с другой стороны, он является и левым нейтральным:

$$e_2 \oplus x = \varphi(e_2\cdot_1 E_1 \circ L(x))\cdot_1 x = \varphi(e_2)\cdot_1 x = e_1\cdot_1 x = x.$$

В данном группоиде биекция L определяет взятие левого обратного:

$$L(x) \oplus x = \varphi(L(x)\cdot_1 E_1 \circ L(x))\cdot_1 x = \varphi(e_1)\cdot_1 x = e_2\cdot_1 x = e_2.$$

Покажем теперь, что для операции (26) для случая $x \in B, y, z \in B_{e_2}$ выполняется соотношение обобщающее правостороннюю дистрибутивность:

$$(x \oplus y)\cdot_1 z = x\cdot_1 E_1 \circ L(y)\cdot_1 L(y\cdot_1 z) \oplus y\cdot_1 z. \tag{27}$$

Действительно, можно записать:

$$(x \oplus y)\cdot_1 z = \varphi(x\cdot_1 E_1 \circ L(y))\cdot_1 y\cdot_1 z = \varphi(x\cdot_1 E_1 \circ L(y)\cdot_1 L(y\cdot_1 z)\cdot_1 E_1 \circ L(y\cdot_1 z))\cdot_1 y\cdot_1 z,$$

откуда следует равенство (27).

Легко проверить, что если биекция определена в виде:

$$L(x) = \begin{cases} a\cdot_1 x, & \text{при } x \neq e_2 \\ x, & \text{при } x = e_2 \end{cases}, \tag{28}$$

где $a \in B \setminus \{e_1, e_2\}$, тогда получается обычная правосторонняя дистрибутивность. Далее будем рассматривать биекцию L только в таком виде.

В группоиде можно определить операцию "вычитания справа":

$$(x \oplus y) \ominus y = x. \tag{29}$$

Рассмотрим сначала случай $y \neq e_2$. Введя обозначение $(x \oplus y) = t$, выразим элемент x через элементы t, y в виде: $x = \varphi(t\cdot_1 E_1(y))\cdot_1 L(y)$. Теперь операцию "вычитания справа"можно записать в виде:

$$x \ominus y = \begin{cases} \varphi(x\cdot_1 E_1(y))\cdot_1 L(y), & \text{при } y \neq e_2 \\ x, & \text{при } y = e_2 \end{cases}. \tag{30}$$

Помимо соотношения (29), можно записать и соотношение

$$(x \ominus y) \oplus y = x. \tag{31}$$

Действительно, для случая $x = e_2$ и/или $y = e_2$ утверждение тривиальное. Рассмотрим случай, когда $x, y \neq e_2$, тогда:

$$(x \ominus y) \oplus y = \varphi\Big(\varphi(x \cdot_1 E_1(y)) \cdot_1 L(y) \cdot_1 E_1 \circ L(y)\Big) \cdot_1 y = x.$$

Операцию "вычитания"можно выразить через аддитивную операцию, действительно, для случая $y \neq e_2$ можно записать:

$$x \ominus y = \varphi(x \cdot_1 E_1(y)) \cdot_1 L(y) = x \cdot_1 E_1(y) \cdot_1 L^2(y) \oplus L(y). \tag{32}$$

Рассмотрим теперь выражение (26) для частного случая $y = e_1$ и $x = t \cdot_1 L(e_1) = t \cdot_1 a$, откуда следует выражение для функции φ:

$$\varphi(t) = t \cdot_1 a \oplus e_1. \tag{33}$$

Воспользуемся соотношениями (33), (27) и запишем функцию (9), для случая (28) в виде:

$$f(x, y_1, y_2) = x \cdot_1 (y_1 \ominus y_2) \oplus y_2. \tag{34}$$

24^0. Рассмотрим теперь, при каких условиях операция $\oplus$ будет групповой.

Лемма 3 *В алгебре $(B, \cdot_1, ^{-1}, \varphi, e_1, e_2)$ для случая $x, y, z \in B \setminus \{e_2\}$ и $x \neq L(y), y \neq L(z)$ следующие три утверждения эквивалентны:*

1) $L(x \oplus y) \oplus x = L(y)$,
2) $L(x) \oplus (x \oplus y) = y$,
3) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.
4)

$$L\Big(\varphi(x \cdot_1 E_1 \circ L(y)) \cdot_1 y\Big) \cdot_1 E_1 \circ L(x) = \varphi\Big(L(y) \cdot_1 E_1(x)\Big). \tag{35}$$

Для доказательства леммы воспользуемся выражением (26) и покажем, что каждое из первых трех утверждений эквивалентно четвертому.

Используя определение операции $\oplus$ — (26), распишем первое равенство, затем умножим справа обе части равенства на $E_1(x)$ и, действуя функцией φ, приходим к соотношению (35).

Рассматривая второе равенство, сначала распишем его, а потом умножим обе части равенства справа на $E_1\Big(\varphi(x \cdot_1 E_1 \circ L(y)) \cdot_1 y\Big)$, далее преобразуем правую часть равенства, воспользовавшись тождеством (12):

$$E_1 \circ \varphi(x \cdot_1 E_1 \circ L(y)) = \varphi \circ E_1 \circ \varphi(L(y) \cdot_1 E_1(x)),$$

действуя теперь на обе части равенства функцией $E_1 \circ \varphi$, получим равенство (35).

Рассмотрим теперь ассоциативность. Распишем обе части равенства, затем умножим их слева на $E_1(x)$ и подействуем функцией φ. Получим новое равенство, правую часть которого преобразуем, воспользовавшись тождеством (11), после чего обе части равенства умножим справа на $E_1(y \cdot_1 E_1 \circ L(z))$ и, действуя функцией $E_1 \circ \varphi$, вновь приходим к соотношению (35) после переобозначения $y \to x$ и $z \to y$.

Производя построения в обратную сторону из соотношения (35), можно прийти к любым первым трем.

Лемма доказана.

Лемма 4 *Если алгебра $(\oplus, B)$ является полугруппой, тогда она является и группой.*

Действительно, если $(\oplus, B)$ — полугруппа, тогда можно рассмотреть ассоциативность для тройки $L^2(x), L(x), x$, так, что $L^2(x) \oplus (L(x) \oplus x) = (L^2(x) \oplus L(x)) \oplus x$, откуда следует тождество $L^2 = id$, которое означает равенство левого и правого обратных. Следовательно, $(\oplus, B)$ — группа.

Лемма 5 *Если в группе $(\oplus, B)$ элемент a, определяющий биекцию (28), такой, что $(\forall x \in B \setminus \{e_2\})$: $axa = x$, тогда группа $(\oplus, B)$ будет абелевой.*

Для группы справедливо соотношение:

$$L(x) \oplus (x \oplus y) = y.$$

Распишем левую часть, с учетом определения операции $\oplus$ для случая $x, y \neq e_2$. После умножения этого равенства справа на элемент $E_1(y)$ перенесем левый сомножитель в правую часть. С учетом равенства $E_1 \circ \varphi \circ E_1 = \varphi \circ E_1 \circ \varphi$ и действия на обе части функцией $E_1 \circ \varphi$, приходим к равенству:

$$\varphi\Big(\varphi(x \cdot_1 E_1(a \cdot_1 y)) \cdot_1 y \cdot_1 E_1(x)\Big) = a \cdot_1 y \cdot_1 E_1(x).$$

Подействуем теперь на обе части функцией φ, и, умножая обе части справа на x, получим соотношение:

$$\varphi(x \cdot_1 E_1(a \cdot_1 y)) \cdot_1 y = \varphi(y \cdot_1 E_1(a \cdot_1 x)) \cdot_1 x,$$

которое, с учетом определения аддитивной операции, можно записать в виде:

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Очевидно, оно будет справедливо и для случая $x = e_2$ и/или $y = e_2$. Таким образом, пришли к коммутативности групповой операции.

25^0. Примеры для столбец–матриц мы рассмотрели в параграфах 10^0 и 12^0, рассмотрим теперь пример для произвольных матриц.

Можно показать, что задача, возникающая в теории физических структур, развиваемая Кулаковым Ю.И. [4] и Михайличенко Г.Г. приводит к обобщенному матричному умножению. Последнему в работе [10] удалось решить проблему, которую можно интерпретировать как доказательство на множестве вещественных чисел наличия только двух матричных произведений для квадратных матриц, с точностью до эквивалентных преобразований (группового изоморфизма матричных групп G_1 и G_2). Первая группа $(\cdot_1, G_1)$ построена на обычной билинейной функции, вторая группа $(\cdot_2, G_2)$ построена на функции вида:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_r) = \sum_{i \leq r}(x_i - x_r)(y_i - y_r) + x_r + y_r.$$

Если рассматривать обычное матричное сложение, то первая группа связана с матричным кольцом, для второй группы это не справедливо, так как не выполняется дистрибутивность:

$$X * (Y + Z) - X * Y - X * Z = \begin{pmatrix} -x_{1r} & -x_{1r} & \dots & -x_{1r} \\ -x_{2r} & -x_{2r} & \dots & -x_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_{rr} & -x_{rr} & \dots & -x_{rr} \end{pmatrix},$$

$$(X + Y) * Z - X * Z - Y * Z = \begin{pmatrix} -z_{r1} & -z_{r2} & \dots & -z_{rr} \\ -z_{r1} & -z_{r2} & \dots & -z_{rr} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -z_{r1} & -z_{r2} & \dots & -z_{rr} \end{pmatrix}.$$

Данное матричное умножение можно построить при помощи обычного матричного умножения. Рассмотрим такое построение на примере квадратных матриц с тремя строками.

Рассмотрим новую матричную группу на примере матрицы 3×3, т.к. в ней уже видны все основные свойства. Построим матричное умножение на базе матрицы B, в которой все элементы, кроме последней строки, будут нулевыми, а последняя строка будет единичной:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что для нее справедливо $BB = B$. Построим еще одну матрицу $A = E - B$, где E – единичная матрица. Произведение матриц A и B будет нулевой матрицей:

$$AB = BA = O.$$

Построим еще одну матрицу[5]:

$$C = AA^T = E - B - B^T + BB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

для которой будет справедливо: $C^T = C, CB^T = O, BC = O$.

Определим теперь произведение матриц в виде:

$$X \cdot Y = XCY + XB + B^T Y.$$

I – нейтральная матрица в таком произведении со свойствами

$$B^T I = O, I + B = BI.$$

В отличие от единичной матрицы, у нее в последней строке стоит ноль вместо единицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[5]Где B^T транспонированная матрица B.

Для X существует обратная матрица ?X. Условием её существования является неравенство нулю определителя

$$\det(CX + B) \neq 0 \Leftrightarrow \det(XC + B^T) \neq 0.$$

Если два определителя $\det(CX+B) \neq 0$ и $\det(CY+B) \neq 0$, тогда и у произведения двух матриц $X \cdot Y$ определитель так же не будет равен нулю. Действительно, с учетом свойств матриц можно записать:

$$CX \cdot Y + B = C(XCY + XB + B^TY) + B =$$

$$= CXCY + CXB + B = (CX + B)\,(CY + B)\,.$$

Следовательно

$$\det\Big(C(X \cdot Y) + B\Big) = \det(CX + B)\det(CY + B)$$

Определитель $\det(CX + B)$ можно записать в виде окаймленного определителя:

$$\det(CX + B) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}.$$

Аналогичное строение будут иметь определители и для больших рангов, все они будут окаймлены единицами и нулем в пересечении.

Список литературы

[1] *В.К. Ионин.* Абстрактные группы как физические структуры. // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Новосибирск, 1990. Вып. 135: Вычислительные системы. С. 40 – 43.

[2] *В.К. Ионин.* К определению физических структур. // Труды института математики. Новосибирск, 1992. Том 21.

[3] *П.М. Кон.* Свободные кольца и их связи. // Москва: Мир, 1975.

[4] *Ю.И. Кулаков.* Элементы теории физических структур (с дополнениями Г.Г. Михайличенко) // Н.: НГУ. 1968.

[5] *А.Г. Курош.* Общая алгебра (лекции 1969/70 учебного года). // М., МГУ., 1970.

[6] *А.А. Литвинцев.* Комплексная физическая структура ранга (2.2). // В кн.: Г.Г. Михайличенко. Математический аппарат теории физических структур. Горно-Алтайск: Универ-Принт ГАГУ, 1997.

[7] *А.А. Литвинцев.* Комплексная физическая структура ранга (3.2). // Материалы XXXV международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 1997, с. 62-63.

[8] *Г.Г. Михайличенко.* Двуметрические физические структуры и комплексные числа. // ДАН 1991, том 321, №4, с. 677 – 680.

[9] *Г.Г. Михайличенко.* Простейшие полиметрические геометрии. // ДАН 1996, том 348, №1, с. 22 – 24.

[10] *Г.Г. Михайличенко.* Математический аппарат теории физических структур. // Горно-Алтайск: Универ-Принт ГАГУ, 1997.

[11] *Г.Г. Михайличенко.* Полиметрические геометрии. // Новосибирск: НГУ, 2001.