О двумерной группе матриц с нестандартным произведением

В. Г. Бардаков, А. А. Симонов

Для двух квадратных матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ степени n над полем P определены операции сложения и умножения: $A\cdot B=C$, $A+B=D$, где элементы матриц $C=(c_{ij})$ и $D=(d_{ij})$ определяются следующим образом:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\quad d_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

Множество $M_n(P)$ всех квадратных матриц степени n над полем P образует кольцо относительно этих операций. Множество обратимых элементов этого кольца образует общую линейную группу $GL_n(P)$. Г. Г. Михайличенко [3] определил другую операцию умножения матриц: $A\odot B=C$, где

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n-1}(a_{ik}-a_{in})(b_{kj}-b_{nj})+a_{in}+b_{nj}.$$

Нетрудно убедиться, что так определенная операция умножения ассоциативна. Возникающая при этом алгебраическая система $\langle M_n(P);\odot,+\rangle$ находит применения в теории физических структур [1, 2]. Легко заметить, что эта алгебраическая система уже не будет кольцом (не выполняется дистрибутивность). Возникает естественный вопрос об описании группы $G_n(P)$ обратимых элементов алгебраической системы $\langle M_n(P);\odot,+\rangle$.

В предлагаемой работе группа $G_n(P)$ изучается в случае $n=2$.

Определим множество аффинных преобразований векторного пространства $V=P^2$ по правилу:

$$(x_1,x_2)\mapsto((\alpha_{11}-\alpha_{21})x_1-(\alpha_{11}-\alpha_{21}-1)x_2,(\alpha_{21}-\alpha_{22})x_1-(\alpha_{12}-\alpha_{22}-1)x_2)+(\alpha_{21},\alpha_{22}),$$

где $\alpha_{ij}\in P$. Легко заметить, что преобразование обратимо тогда и только тогда, когда $\alpha_{11}-\alpha_{21}\neq\alpha_{12}-\alpha_{22}$. Относительно операции композиции множество таких обратимых преобразований образует группу $Af_2(P)$. Преобразованию можно сопоставить пару

$$\left(\begin{pmatrix}\alpha_{11}-\alpha_{21} & \alpha_{12}-\alpha_{22}\\ 1+\alpha_{21}-\alpha_{11} & 1+\alpha_{22}-\alpha_{12}\end{pmatrix},\ (\alpha_{21},\alpha_{22})\right)\in M_2(P)\times V.$$

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Группа $G_2(P)$ изоморфна группе $Af_2(P)$ и изоморфизм определяется правилом*

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\longmapsto\left(\begin{pmatrix}a_{11}-a_{21} & a_{12}-a_{22}\\ 1+a_{21}-a_{11} & 1+a_{22}-a_{12}\end{pmatrix},\ (a_{21},a_{22})\right).$$

Таким образом, мы можем изучать группу $Af_2(P)$, являющуюся подгруппой группы аффинных преобразований векторного пространства V. Справедлива

Теорема 2. (1) *Группа $Af_2(P)$ распадается в полупрямое произведение $P^2\leftthreetimes H$, где*

$$H=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 1-a & 1-b\end{pmatrix}\ \mid a,b\in P,\ a-b\neq 0\right\}\leq GL_2(P).$$

(2) *Группа $Af_2(P)$ разрешима ступени 3.*

Из этой теоремы легко получается

Следствие. *Группа $Af_2(P)$ вкладывается в группу $GL_3(P)$.*

Список литературы

[1] Кулаков Ю. И. Об одном принципе, лежащем в основании классической физики. Докл. АН СССР, 193 (1970), N. 1, 72–75.
[2] Кулаков Ю. И. Теория физических структур. Москва, 2004.
[3] Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. ДАН СССР, 206 (1972), N. 5, 1056–1058.

Новосибирск
E-mail: bardakov@math.nsc.ru, Andrey.Simonoff@gmail.com