Мальцевские чтения
Новосибирск (2000)
Тезисы докладов

Алгебраические системы, близкие к ассоциативным телам

А. А. Симонов

Данные системы возникают в некоторых задачах общей физики и геометрии [**1**] при попытке установить алгебраическую структуру с минимальными ограничениями, когда еще возможно нетривиальное решение рассматриваемых задач. Получающаяся алгебраическая система $(0, e, E, \varphi, \cdot, B)$ имеет два выделенных элемента 0, e, две унарные операции $E : B_0 \to B_0$, $\varphi : B \to B$ (где $B_0 = B \setminus \{0\}$) и одну бинарную мультипликативную операцию. Ограничение бинарной операции на B_0 является групповой операцией, так что унарная операция E будет операцией взятия обратного элемента в группе $(B_0, \cdot)$. В общем случае определено только одностороннее умножение на аннулятор: $0 \cdot x = 0$, где $x \in B_0$. Для унарной операции φ справедливы равенства $\varphi(e) = 0$, $\varphi(0) = e$ и тождество

$$\varphi(\varphi(x) \cdot \varphi(y)) = \varphi(x \cdot \varphi(E(y))) \cdot y, \quad x \in B,\ y \in B_0.$$

В данной работе показано, что при помощи произвольной биекции $L : B \to B_L$ при условии $B_L \subseteq B$ и $L(0) = 0$ можно ввести бинарные операции

$$x + y = \varphi(x \cdot E(L(y))) \cdot y, \quad y \neq 0,\ x + 0 = x,$$
$$x - y = \varphi(x \cdot E(y)) \cdot L(y), \quad y \neq 0,\ x - 0 = x$$

и перейти к эквивалентной алгебраической системе $(0, e, E, -, +, \cdot, B)$.

Обе операции связаны соотношениями $(x+y)-y = x$ и $(x-y)+y = x$. Для “аддитивной” операции аннулятор является нейтральным элементом и справедливо соотношение, обобщающее дистрибутивность:

$$(x + y) \cdot z = x \cdot E(L(y)) \cdot L(y \cdot z) + y \cdot z,$$

которое в частном случае $L(x) = a \cdot x$ при $a \in B_0$ превращается в одностороннюю дистрибутивность. При этом если $a \cdot x \cdot a = x$ для всех $x \in B_0$ и $\varphi(E(x)) \cdot x = a \cdot \varphi(x)$, то построенная алгебраическая система будет ассоциативным телом. В этом случае можно доказать следующие утверждения:

Теорема 1. *Для произвольного ассоциативного тела* $(B, +, \cdot)$, *по произвольному изоморфизму* $\psi : (B_0, \cdot) \to (B'_{0'}, \cdot')$ *можно построить изоморфное тело* $(B', +', \cdot')$. *Аддитивная группа данного тела определяется следующим образом*:

$$x +' y = \varphi'(x \cdot' E'(L'(y))) \cdot' y, \quad y \neq 0',\ x +' 0' = x,$$

где $\varphi' = \psi\varphi\psi^{-1}$, $\varphi(x) = L(x) + e = (-e) \cdot x + e$, $E' = \psi E \psi^{-1}$, $L' = \psi L \psi^{-1}$.

Теорема 2. *Для произвольной группы* $(B_0, \cdot)$ *следующие два утверждения эквивалентны*:

(1) *группа* $(B_0, \cdot)$ *является мультипликативным группоидом некоторого ассоциативного тела* $(B, +, \cdot)$,

(2) *существует* $a \in B_0$ *такой, что* $a \cdot x \cdot a = x$ *для всех* $x \in B_0$, *и существует функция* $\varphi : (B_0 \setminus \{e\}) \to (B_0 \setminus \{e\})$ *такая, что*

$$\varphi(\varphi(x) \cdot \varphi(y)) = \varphi(x \cdot \varphi(E(y))) \cdot y, \quad \varphi(E(y)) \cdot y = a \cdot \varphi(y).$$

Литература

[1] Г. Г. Михайличенко, *Двуметрические физические структуры и комплексные числа*, Докл. Акад. наук **321** (1991), no. 4, 677–680.

Горно-алтайский государственный университет
E-mail: sim@online.nsk.su