Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Построение групп Матье M_{11} и M_{12}

А. А. Симонов

Понятие почтиобласти было введено в 1960-х годах Г. Карзелом [**1**] как алгебраической системы с двумя бинарными операциями $(B,\cdot,+,1,0)$, в которой справедливы аксиомы:

1. $(B,+)$ — лупа с нейтральным элементом 0;
2. $a+b=0 \Rightarrow b+a=0$;
3. $(B_0,\cdot)$ — группа с нейтральным элементом 1, где $B_0 = B \setminus \{0\}$;
4. $(\forall x \in B) \quad x \cdot 0 = 0$;
5. $(\forall x,y,z \in B) \quad (x+y)\cdot z = x\cdot z + y \cdot z$;
6. $(\forall a,b \in B)(\exists\, r_{a,b} \in B_0) \quad (x+a)+b = x\cdot r_{a,b} + (a+b)$ для любого $x \in B$.

Конечные почтиобласти являются почтиполями. Если на мультипликативной группе $B \setminus \{0\}$ почтиобласти B действует автоморфизм σ, удовлетворяющий тождеству $1-\sigma(1-x) = \sigma(1-\sigma(x))$, тогда на множестве $B' = B \cup \{\infty\}$ при помощи σ можно построить КТ-поле $(B',\cdot,\sigma,+,1,0,\infty)$ [**2**]. При этом действие автоморфизма необходимо расширить на все множество B': $\sigma(0)=\infty, \sigma(\infty)=0$. Над почтиобластью можно построить точно дважды транзитивную группу G_2 преобразования множества B, а над КТ-полем точно трижды транзитивную группу G_3 преобразования множества B'.

Автором рассматривалась алгебраическая система $(B^{\#},\cdot,^{-1},\varphi,e_1,e_2)$ с частичной бинарной операцией $(\cdot) : B^{\#} \cup \{e_1,e_2\} \times B_1 \to B^{\#} \cup \{e_1,e_2\}$, где $B_1 = B^{\#} \cup \{e_1\}$. Элемент e_2 для данной частичной бинарной операции является левым нулем. Алгебраическая система $(B_1,\cdot,^{-1},e_1)$ является группой. Операция φ удовлетворяет тождеству

$$\varphi\Big(\varphi(x)\varphi(y)\Big) = \varphi\Big(x\varphi(y^{-1})\Big)y,$$

где $x \in B^{\#} \cup \{e_1,e_2\}, y \in B^{\#}$, с условием $\varphi(e_1)=e_2, \varphi(e_2)=e_1$. Показано, что данная алгебраическая системя является обобщением почтиобласти. Группу G_2 можно построить при помощи подгруппы $G_1 < G_2$ такой, что $(\forall r_a \in G_1)$ $x \cdot r_a = xa \in B_1$ и операции $\varphi \in G_2$. Произвольная пара (a,b) из неравных элементов множества B однозначно определяет элемент группы G_2 в виде $(a,b) = r_{\varphi(ab^{-1})}\varphi r_b$, при $b \neq e_2$ и $(a,e_2) = r_a$ в противном случае.

Обогащая рассматриваемую алгебраическую систему некоторой группой автоморфизмов группы $(B_1,\cdot,^{-1},e_1)$, по аналогии с переходом от почтиобласти к КТ-полю, перейдем к рассмотрению алгебраической системы $(B^{\#},\cdot,^{-1},\varphi,$

$\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, e_1, e_2, \dots, e_n)$ с одной бинарной операцией, n унарными операциями и n нульарными операциями. Мультипликативная операция определена не только на множестве B_1, но и частично на множестве $B = B^{\#} \cup \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ в виде $(\cdot) : B \times B_1 \to B$ так, что $e_i x = e_i$ для $i \in \{2, 3, \dots, n\}$.

На группе B_1 действует группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(B_1)$, а операции $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$ порождают в ней подгруппу $\mathrm{Aut}_\sigma(B_1) \leq \mathrm{Aut}(B_1)$. Данная подгруппа изоморфна симметрической группе $\mathrm{Aut}_\sigma(B_1) \simeq S_{n-1}$. Для унарных операций справедливы тождества:

1. $\varphi(e_i) = \begin{cases} e_2, & i = 1 \\ e_1, & i = 2 \\ e_i, & i \neq 1, 2 \end{cases}$,
2. $\sigma_j(e_i) = \begin{cases} e_1, & i = 1 \\ e_2, & i = j+2 \\ e_{j+2} & i = 2 \\ e_i, & i \neq 1, 2, j+2 \end{cases}$,
3. $\sigma_i \varphi \sigma_i = \varphi \sigma_i \varphi$,
4. $\sigma_i \sigma_i = id$, $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$,
5. $\varphi\Big(\varphi(x)\varphi(y)\Big) = \varphi\Big(x\varphi(y^{-1})\Big)y$, $x \in B, y \in B^{\#}$.

n–Транзитивная группа G_n преобразования множества B строится при помощи операций $\varphi_{i+1} = \sigma_i \varphi \sigma_i$. Введем обозначения:

$$a_i^{(1)} = \varphi(a_i a_n^{-1}), \dots, a_i^{(k)} = \varphi_k\Big(a_i^{(k-1)}(a_{n+1-k}^{(k-1)})^{-1}\Big),$$

где $i \leq n-k, 1 < k < n$. Произвольные n–упорядоченных элементов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ из множества B, попарно неравные, однозначно определяют элемент из множества G_n так, что $(a_1, a_2, \dots, a_n) = r_{a_1^{(n-1)}} \varphi_{n-1} r_{a_2^{(n-2)}} \varphi_{n-2} \dots \varphi r_{a_n} \in G_n$, в случае, если $a_i \notin \{e_2, e_3, \dots, e_n\}$, в противном случае $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in G_k$, $k < n$.

В случае конечных множеств данное построение совпадает с почтиполем и КТ–полем для дважды и трижды транзитивных групп преобразований соответствующих множеств. В данном подходе можно рассмотреть и четырежды транзитивные группы преобразований, которые возникают, когда группа B_1 будет: тривиальной $\{e_1\}$, из двух элементов $\{e_1, a\}$, из трех элементов $\{e_1, a, a^2\}$ или кватернионной группой K. В первых двух случаях получаются симметрические группы S_4 и S_5, в третьем случае знакопеременная группа A_6 и в последнем случае группа Матье M_{11}. На тех же группах можно построить и пяти транзитивные группы: S_5, S_6, A_7, M_{12} преобразования множества $B^{\#} \cup \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Если рассматривать операции $\varphi, ^{-1}, \sigma_i$ на множестве $B^{\#}$, то для первых трех групп они совпадают. Для группы K операцию φ на множестве $B^{\#}$ можно задать перестановкой $(i, -j)(-i, k)(j, -k)$, остальные операции на множестве $B^{\#}$ можно записать в виде: $\sigma_1 = (i, k)(j, -j)(-i, -k)$, $\sigma_2 = (i, j)(-i, -j)(-k, k)$, $\sigma_3 = (i, -i)(j, k)(-j, -k)$.

Данный подход в применении к локальным группам Ли дает эквивалентное описание двуметрических физических структур (далее ФС) ранга $(2, n)$ из работы Г. Г. Михайличенко [**3**]. Алгебраическая классификация ФС ранга $(2, n)$ над $\mathbb{R}$ [**4**] строится на двух, с точностью до локального изоморфизма, группах: $G_1(x_1x_2, y_1y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$, $G_2(x_1x_2, y_1y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2)$.

Для того, чтобы выражение для функции φ было проще, будем использовать запись локально изоморфной группы для группы $G_1 \simeq G_1'(x_1x_2, y_1y_2) = (x_1y_1 + \varepsilon x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$, где параметр ε может принимать два значения 0 или -1, а $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Для ФС ранга $(2,3)$ существует пять неэквивалентных решений:
1.) $G_1, \varphi(x_1,x_2) = (1-x_1, 1-x_2)$,
2.) $G_1', \varphi(x_1,x_2) = (1-x_1, -x_2)$,
3.) $G_2, \varphi(x_1,x_2) = (x_2, x_1)$,
4.) G_2, $n \in Z, n \neq 1$, $\varphi(x_1,x_2) = \left(\left(1 - x_1^{\frac{1}{n-1}}\right)^{1-n}, (-1)^n \frac{x_2 x_1^{-\frac{n}{n-1}}}{\left(1-x_1^{\frac{1}{n-1}}\right)^n}\right)$,
5.) G_2, $\varphi(x_1,x_2) = (\frac{x_1}{x_1-1}, \frac{x_2 - \ln|x_1|}{(x_1-1)^2} + \ln|\frac{x_1-1}{x_1}|)$.

Для ФС ранга $(2,4)$ существует четыре неэквивалентных решения:
1.a.) $G_1, \varphi(x_1,x_2) = (1-x_1, 1-x_2), \sigma_1(x_1,x_2) = (x_1^{-1}, x_2x_1^{-1})$,
1.b.) $G_1, \varphi(x_1,x_2) = (1-x_1, 1-x_2), \sigma_1(x_1,x_2) = (x_1^{-1}, x_2^{-1})$,
2.) $G_1', \varphi(x_1,x_2) = (1-x_1, -x_2)$, $\sigma_1(x_1,x_2) = (\frac{x_1}{x_1^2 - \varepsilon x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2-\varepsilon x_2^2})$,
3.) $G_2, \varphi(x_1,x_2) = (x_2, x_1), \sigma_1(x_1,x_2) = (x_1, 1-x_1-x_2)$.

Для ФС ранга $(2,5)$ остается только одно неэквивалентное решение:
$G_1, \varphi(x_1,x_2) = (1-x_1, 1-x_2), \sigma_1(x_1,x_2) = (x_1^{-1}, x_2x_1^{-1}), \sigma_2(x_1,x_2) = (x_1x_2^{-1}, x_2^{-1})$.

Список литературы

[1] *Karzel H.* Inzidenzgruppen I. Lecture Notes by Pieper, I. and Sorensen, K., University of Hamburg, 1965, 123–135.

[2] *Heinz W.* Theorie der Fastkörper, Thales verlag, 1987, 215–248.

[3] *Г.Г. Михайличенко*. Групповая симметрия физических структур. Барнаул, БГПУ, 2003, 96–123.

[4] *А.А. Симонов*. Приложение 2 в книге *Ю.И. Кулаков*. Теория физических структур. Москва, 2004, 673–707.

E-mail: dozor@rinet.su