Все ранние усилия, направленные на создание союза между тензорным исчислением и динамикой, не были встречены с особым энтузиазмом. Тензорное исчисление можно было сравнить с маленьким ребёнком, неизвестным вне узкого круга математиков-специалистов, тогда как динамика была зрелой трехсотлетней дамой, которая, по справедливости, могла оспаривать у любимца Гаусса титул "Королевы наук". Но когда в 1916 году мир был потрясён общей теорией относительности, тензорное исчисление сразу становится "героем дня", в то время как репутация классической динамики и физики несколько тускнеет. Ничто не мешало теперь этому, не равному союзу. Но вряд ли надо специально оговаривать, что такой математический союз не предполагает "верности" от его членов, и, действительно, тензорное исчисление никогда не рассматривало связи с динамикой иначе, как приятный эпизод в своей деловой жизни.

— *Дж. Л. Синг.*

Глава 1

Специальные символы и внешние формы Картана.

Но на следующий день один из его учеников сказал ему: "О, совершенный, зачем ты делаешь это? Хотя нам и доставляет радость, нам не ведомы ни высокие причины, ни значение этого." И ответил он: "Сначала я скажу вам, что я делаю, а потом объясню зачем".

— Лоуренс Хоусмен.

1.1 Индексные обозначения.

Как известно, современные успехи теории дифференциальных инвариантов и плодотворное применение этой теории в физических исследованиях были достигнуты в большой степени из-за широкого применения определённого типа обозначений. Характерной особенностью тензорного исчисления является широкое использование верхних и нижних индексов, впервые предложенных итальянским математиком Риччи[1].

Так система n независимых переменных $x, y, \dots, z$ записывается в виде $x^i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$. Что же касается функций от этих n переменных, применяемых в тензорном анализе, то они объединяются в семейства, обозначаемые с помощью верхних и нижних индексов. Например, при $m = 3$ возможны, строго говоря, восемь типов семейств:

$$A^{ik\ell}, \quad A^{ik}_{\cdot\cdot\ell}, \quad A^{i\cdot\ell}_{\cdot k\cdot}, \quad A^{\cdot k\ell}_{i\cdot\cdot}, \quad A^{i}_{\cdot k\ell}, \quad A^{\cdot k\cdot}_{i\cdot\ell}, \quad A^{\cdot\cdot\ell}_{ik\cdot}, \quad A_{ik\ell}.$$

Вообще говоря, индексы должны располагаться так, что для каждого верхнего индекса всегда существовало бы свободное место внизу. И только в отдельных

[1]Грегорио Риччи-Курбастро (1853–1925) — итальянский геометр. Профессор Падуанского университета. Риччи является одним из основателей тензорного исчисления. В мемуаре "Методы абсолютного дифференциального исчисления" (1901), написанном им совместно с Леви-Чивита, дано не только первое систематическое изложение тензорного исчисления, но и его приложение к классической механике, теоретической физике и римановой геометрии.

случаях, когда это не может привести к недоразумению, верхний индекс может быть располагаться над нижним, как, например, в символе Кристофеля δ_k^i .

Согласно сложившейся традиции нижние индексы называются ковариантными, а верхние — контравариантными. Система функций или чисел, снабжённых m индексами, называется объектом m -го ранга. Отдельные функции или числа системы называются компонентами объекта.

Объект называется симметрическим[2] по отношению к какой-либо группе индексов, если его значение остаётся неизменным при любой перестановке этих индексов.

Например, если

$$A_{mnk\cdot\cdot}^{\quad\ \ i\ell} = A_{mnk\cdot\cdot}^{\quad\ \ \ell i}$$

то объект $A_{mnk\cdot\cdot}^{\quad\ \ i\ell}$ симметричен относительно верхних индексов.

Объект называется антисимметрическим по отношению к данной системе индексов, если его значение остаётся неизменным при любой чётной перестановке этих индексов и меняет свой на обратный — при любой нечётной. Например, если

$$A_{mnk\cdot\cdot}^{\quad\ \ i\ell} = A_{kmn\cdot\cdot}^{\quad\ \ i\ell} = A_{nkm\cdot\cdot}^{\quad\ \ i\ell} = -A_{mkn\cdot\cdot}^{\quad\ \ i\ell} = -A_{nmk\cdot\cdot}^{\quad\ \ i\ell} = -A_{knm\cdot\cdot}^{\quad\ \ i\ell}$$

то объект $A_{mnk\cdot\cdot}^{\quad\ \ i\ell}$ антисимметричен относительно нижних индексов.

Число n , показывающее, сколько различных значений может пробегать каждый индекс, называется размерностью или числом измерений. Очевидно, что объект m -го ранга имеет n^m компонент.

1.2 Правило суммирования.

Поскольку в дальнейшем нам часто придётся иметь дело с суммами вида

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{ik\cdot}^{\ \ \ell} A_\ell B^{km},$$

в которых один и тот же индекс, по которому производится суммирование, встречается дважды, введём следующее правило, позволяющее записывать все формулы в более простом и компактном виде:

Правило суммирования[3] Эйнштейна[4] .

[2]Термин "симметрия" происходит от греческого слова symmetria — "соразмерность" (sym — "с" и metreo — "измерение").

[3]Правило Эйнштейна предложено им в работе "Основы общей теории относительности" (1916).

[4]Альберт Эйнштейн — величайший физик мира со времён Ньютона. Родился 14 марта 1879 года в немецком городе Ульме (Вюртенберг); умер в Пристоне (США) 18 апреля 1955 года.

Альберт Эйнштейн занимает в истории естествознания совершенно особое место. На рубеже старой и новой физики он возвышается одновременно и как Завершитель и как Первооткрыватель.

Созданием теории относительности Эйнштейн завершил классическую физику и одновременно заложил основы нового учения о пространстве, времени и тяготении. Своими работами по молекулярной физике он завершил и продолжил исследования Больцмана о тепловом дви-

Если один и тот же индекс входит в какой-либо одночлен дважды: один раз как ко – , а другой раз как контравариантный, то написанное выражение означает сумму n одночленов, в которой этот индекс пробегает значения от 1 до n .

Например:

$$a^{ik}_{\cdot\cdot m} b_{\ell k \cdot p}^{\ \ \ell} \equiv \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a^{ik}_{\cdot\cdot m} b_{\ell k \cdot p}^{\ \ \ell} \tag{1.1}$$

Неудобство возникает только в том случае, когда мы хотим обозначить общий член $a^{ik}_{\cdot\cdot m} b_{\ell k \cdot p}^{\ \ \ell}$ выражения (1.1), не выполняя при этом суммирования. В этом случае приходится специально оговаривать, что в выражение $a^{ik}_{\cdot\cdot m} b_{\ell k \cdot p}^{\ \ \ell}$ суммирование не выполняется. Однако в тензорном анализе такое положение встречается настолько редко, что мы можем пренебречь этим неудобством по сравнению со всеми преимуществами новой формы записи.

Индексы, по которым производится суммирование (в нашем примере индексы k и ℓ) называются "немыми". Обозначение немых индексов можно изменить произвольным образом, не изменяя смысла и вида написанного выражения.

Например:

$$a^{ik}_{\cdot\cdot m} b_{\ell k \cdot p}^{\ \ \ell} = a^{is}_{\cdot\cdot m} b_{rs \cdot p}^{\ \ r}$$

Важно только чтобы буквы, предназначенные для обозначения немых индексов, не повторялись в одном одночлене более чем два раза (один раз сверху, один — снизу).

Индексы, встречающиеся в одночлене только один раз (в нашем примере индексы i, m, p), называются свободными. Число, положение и обозначение свободных индексов должно быть одинаковым в левой и правой частях равенства.

Например:

$$a^{ik}_{\cdot\cdot m} b_{\ell k \cdot p}^{\ \ \ell} = c^{i}_{\cdot mp}$$

1.3 Основные алгебраические операции.

В тензорном анализе имеются три основные алгебраические операции:

1. Сложение.

   Эта операция применяется к объектам с одинаковым числом ко – и контравариантных индексов.

   Чтобы сложить два объекта, достаточно сложить их одноимённые компоненты.

   Например:

$$A^{i}_{\cdot k} + B^{i} C_{k} = u^{i}_{\cdot k}.$$

жении. Фундаментальные исследования Эйнштейна по квантовой теории света, являющиеся развитием гениальной идеи Планка о дискретной природе теплового излучения, положили начало эре — эре атомной физики.

2. Умножение.

   Эта операция применяется к объектам любого ранга и строения.

   Произведением двух объектов называется объект, компоненты которого равны произведению соответствующих компонент перемножаемых объектов.

   Например:
$$A^{m}_{\cdot p} B_{rs} = C^{m}_{prs}.$$

3. Свёртывание.

   Эта операция применима к объектам, обладающим одновременно ко – контравариантными индексами.

   Свёрткой называется сумма по одной или нескольким парам немых индексов.

   Например:
$$A^{mp}_{\cdot\cdot m} = B^{p}.$$

Покажем, что свёртка симметрического объекта с антисимметрическим тождественно равна нулю.

Пусть S^{ik} — симметрический, а A_{ik} — антисимметрический объекты. Обозначим их свёртку по индексам i и k через a :

$$a = S^{ik} A_{ik}.$$

Переставляя в S^{ik} и A_{ik} индексы i и k и производя переобозначения $i \to k$, $k \to i$, получим

$$a = S^{ik} A_{ik} = -S^{ki} A_{ki} = -S^{ik} A_{ik} = -a$$

откуда

$$a = S^{ik} A_{ik} \equiv 0. \tag{1.2}$$

1.4 Символ Леви–Чивита и обощённые символы Кронекера.

Символом[5] Леви–Чивита[6] называется объект $e^{ik\ldots\ell} = e_{ik\ldots\ell}$ ранга n, составляющие которого имеют следующее значение:[7]

$$e^{ik\ldots\ell} = \begin{cases} 1 & \text{когда индексы } ik\ldots\ell \text{ образуют чётную перестановку чисел } 1,2,\ldots,n \\ -1 & \text{когда индексы } ik\ldots\ell \text{ образуют нечётную перестановку чисел } 1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{когда среди индексов } ik\ldots\ell \text{ имеются хотя два одинаковые} \end{cases}$$

Свёртка двух символов Леви–Чивита по $n-k$ индексам, делённая на $(n-k)!$, называется обобщённым символом Кронекера[8] $\delta^{q\ldots p}_{i\ldots m}$ порядка k:

$$\delta^{q\ldots p}_{\underbrace{i\ldots m}_{k}} = \frac{1}{(n-k)!} e_{\underbrace{i\ldots m}_{k}\underbrace{u\ldots v}_{n-k}} e^{\overbrace{q\ldots p}^{k}\overbrace{u\ldots v}^{n-k}} \tag{1.3}$$

Как следует из определения (1.3) компоненты обобщённых символов Кроне-

[5]Вообще говоря, символы $e^{ik\ldots\ell}$ и $e_{ik\ldots\ell}$ были впервые введены в применяемой нами форме английским математиком и астрономом Арктуром Эдингтоном (18882–1944) в книге "Пространство, время, тяготение" однако отдавая дань традиции, мы сохраним за ним, ставшее уже привычным, название символа Леви–Чивита.

[6]Туллио Леви–Чивита (1873-1942) — итальянский математик и механик, профессор в Падуе и Риме. Автор исследований по теории дифференциальных уравнений, небесной механике, гидродинамике; им разработан тензорный анализ, особый метод решения знаменитой задачи трёх тел, обоснование теории адиабатических инвариантов; ему принадлежат работы по механике и геометрии неголономных систем и релятивистской механике.

[7]Необходимость обозначать одну и ту же величину двумя различными символами $e^{ik\ldots\ell}$ и $e_{ik\ldots\ell}$ связана с возможностью применять правило суммирования Эйнштейна без каких-либо оговорок. Что же касается законов преобразования $e^{ik\ldots\ell}$ и $e_{ik\ldots\ell}$ при переходе от одной системы координат к другой, то воспользовавшись результатами главы III посвященной тензорной алгебре, нетрудно показать, что $e^{ik\ldots\ell}$ и $e_{ik\ldots\ell}$, не являясь тензорами, преобразуются одинаковым образом.

[8]Леопольд Кронекер (1823–1891) — немецкий математик. С 1861 г. — член Берлинской Академии наук и профессор Берлинского университета. Основные работы Кронекера относятся к алгебре и теории чисел, к теории квадратичных форм и теории групп. Кронекер был сторонником "арифметизации" математики, которая по его мнению должна быть сведена к арифметике целых чисел, так как только последняя, как он утверждал, обладает подлинной реальностью. Эти взгляды Кронекера односторонни и неверны; защищая их он вел упорную борьбу с принципами теоретико-функциональной школы Вейерштрасса и теоретико-множественной школы Кантора.

кера имеют следующие значения:

$$\delta^{q\ldots p}_{i\ldots m} = \begin{cases} 1 & \text{когда индексы } q,\ldots,p \text{ образуют чётную} \\ & \text{перестановку индексов } i,\ldots,m \\ -1 & \text{когда индексы } q,\ldots,p \text{ образуют нечётную} \\ & \text{перестановку индексов } i,\ldots,m \\ 0 & \text{1) когда среди индексов } q,\ldots,p \text{ есть ин-} \\ & \text{дексы, отсутствующие среди } i,\ldots,m \text{ или} \\ & \text{2) когда среди индексов } q,\ldots,p \\ & \text{или } i,\ldots,m \text{ имеются хотя два одинаковые} \end{cases}$$

Обощённые символы Кронекера порядка m могут быть выражены через символы Кронекера первого прядка δ^k_i, компоненты которых, как это следует из их определения (1.3) имеют следующие значения[9]:

$$\delta^k_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k \\ 1 & \text{при } i = k \end{cases} \tag{1.4}$$

Эти выражения могут быть получены с помощью следующих реку рентных соотношений для $\delta^{q\ldots p}_{i\ldots k}$ приводимых здесь без доказательства

$$\begin{aligned} \delta^k_i &= \delta^k_i \\ \delta^{km}_{ip} &= \delta^k_i\delta^m_p - \delta^m_i\delta^k_p; \\ \delta^{kmu}_{ipv} &= \delta^{km}_{ip}\delta^u_x - \delta^{ku}_{ip}\delta^m_v + \delta^{mu}_{ip}\delta^k_v; \\ \delta^{kmuq}_{ipvr} &= \delta^{kmu}_{ipv}\delta^q_r - \delta^{kmq}_{ipv}\delta^u_r + \delta^{kuq}_{ipv}\delta^m_r - \delta^{muq}_{ipv}\delta^k_r; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1.5}$$

Таким образом, для двух наиболее употребительных символов Кронекер имеем следующие разложения:

$$\delta^{km}_{ip} = \delta^k_i\delta^m_p - \delta^m_i\delta^k_p; \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} \delta^{kmr}_{ipq} &= \delta^k_i\delta^m_p\delta^r_q + \delta^r_i\delta^k_p\delta^m_q + \delta^m_i\delta^r_p\delta^k_q - \\ &- \delta^k_i\delta^r_p\delta^m_q - \delta^r_i\delta^m_p\delta^k_q - \delta^m_i\delta^k_p\delta^r_q. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Используя соотношение (1.5) можно получить ряд тождеств, связывающих между собой символы Леви–Чивита $e^{ik\ldots\ell}$ и символы Кронекера первого порядка δ^p_q.

Замечая, что, например, при $n = 2$

$$\delta^{kmu}_{ipv} = 0$$

Получаем:

$$\delta^{km}_{ip}\delta^u_v - \delta^{ku}_{ip}\delta^m_v + \delta^{mu}_{ip}\delta^k_v = 0$$

[9] Символ δ^k_i введён Кронекером в работе “О линейных формах” (1886).

Но так как при $n = 2$

$$\delta^{km}_{ip} = e^{km} e_{ip},$$

то

$$e_{ip}(e^{km}\delta^u_v - e^{ku}\delta^m_v + e^{mu}\delta^k_v) = 0$$

или

$$e^{km}\delta^u_v - e^{ku}\delta^m_v + e^{mu}\delta^k_v = 0 \tag{1.8}$$

Подобным же образом доказываются аналогичные соотношения для $n = 3, 4, \ldots$

$$e^{kmu}\delta^p_v - e^{kmp}\delta^u_v + e^{kup}\delta^m_v - e^{mup}\delta^k_v = 0 \tag{1.9}$$

$$e^{kmup}\delta^q_v - e^{kmuq}\delta^p_v + e^{kmpq}\delta^u_v - e^{kupq}\delta^m_v + e^{mupq}\delta^k_v = 0 \tag{1.10}$$

. . . .

Приведём для справок следующие соотношения, которые могут быть легко проверены подсчётом числа членов, появляющихся в соответствующих суммах:

$$\delta^{\,i\ldots\ell\ \ s\ldots t}_{\underbrace{m\ldots n\, u\ldots v}_{r}}\delta^{u\ldots v}_{p\ldots q} = k!\,\delta^{\,i\ldots\ell\ \ s\ldots t}_{\underbrace{m\ldots n\, p\ldots q}_{r}} \tag{1.11}$$

$$\delta^{\overbrace{i\ldots\ell\ \ u\ldots v}^{r}}_{\underbrace{m\ldots n}_{k}\ u\ldots v} = \frac{(n-k)!}{(n-r)!}\delta^{\,i\ldots\ell}_{\underbrace{m\ldots n}_{k}} \tag{1.12}$$

$$e_{\underbrace{m\ldots n\, u\ldots v}_{n}}\delta^{\ u\ldots v}_{\underbrace{p\ldots q}_{k}} = k!\,e_{\underbrace{m\ldots n\, p\ldots q}_{n}} \tag{1.13}$$

$$e^{\overbrace{m\ldots n\, u\ldots v}^{n}}\delta^{\ p\ldots q}_{\underbrace{u\ldots v}_{k}} = k!\,e^{\overbrace{m\ldots n\, p\ldots q}^{n}} \tag{1.14}$$

В частном случае $k = 0$ формула (1.12) принимает вид:

$$\delta^{\ u\ldots v}_{\underbrace{u\ldots v}_{r}} = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{1.15}$$

Если объекты $A_{i\ldots\ell}$ и $A^{i\ldots\ell}$ антисимметричны по всем k индексам $i, \ldots, \ell$, то как легко видеть, имеет место следующие соотношения:

$$\delta^{i\ldots\ell}_{p\ldots q} A_{\underbrace{i\ldots\ell}_{k}} = k!\,A_{p\ldots q} \tag{1.16}$$

$$\delta^{p\ldots q}_{i\ldots\ell} A^{\overbrace{i\ldots\ell}^{k}} = k!\,A^{\overbrace{p\ldots q}^{k}} \tag{1.17}$$

1.5 Внутреннее и внешнее произведение.

Как указывалось в (1.3), одной из алгебраических операций, с помощью которой из двух данных объектов можно построить третий, является операция свёртывания. Применяя эту операцию к произведению двух объектов введём следующие два понятия.

Внутренним произведением двух объектов называется свёртка по контравариантным индексам одного объекта и контравариантным индексам другого.

Например:

$$A^{im}_{\cdot\cdot n} B^{n}_{\cdot m} = C^{i}$$

В частности, внутренним произведением двух ко– и контравариантных векторов A_i и B^i является их скалярное произведение:

$$AB = A_i B^i$$

Внешним произведением двух объектов является свёртка их с обобщённым символом Кронекера соответствующего порядка.

Например:

$$\delta^{pqrs}_{ik\ell m} A^{n}_{\cdot p} B^{uv}_{\cdot\cdot qrs} = C^{nuv}_{\cdot\cdot\cdot ik\ell m}$$

или

$$\delta^{ik\ell}_{nuv} A^{n}_{\cdot p} B^{uv}_{\cdot\cdot qrs} = d^{ik\ell}_{\cdot\cdot\cdot pqrs}$$

В частности, внешним произведением трех контравариантных векторов A^i, b^k и C^ℓ является выражение

$$\delta^{mnp}_{ik\ell} A^i B^k C^\ell.$$

Что касается термина "внутреннее" и "внешнее" произведение, то они как раз и выражают тот факт, что в первом случае объекты свёртываются непосредственно друг с другом (все немые индексы находятся "внутри" произведения объектов), а во втором — через обобщённый символ Кронекера (одна половина немых индексов находится в $\delta^{i\ldots k}_{m\ldots n}$, т. е. "вне" произведения исходных объектов).

1.6 Внешние формы.

Применим, введенные в предыдущем параграфе понятия внутреннего и внешнего произведения к объектам второго рода[10] x^i_α $(i, \alpha = 1, 2, \ldots, n)$ и рассмотрим сначала внутренние произведения объектов m-го ранга $a_{ik\ldots\ell}$ или $a^{\alpha\beta\ldots\gamma}$ и m объектов $x^i_\alpha, x^k_\beta, \ldots, x^\ell_\gamma$:

$$A_{\alpha\beta\ldots\gamma} = a_{ik\ldots\ell} x^i_\alpha x^k_\beta \ldots x^\ell_\gamma \tag{1.18}$$

[10]Применение латинских и греческих индексов при обозначении объекта x^i_α обусловлено необходимостью подчеркнуть различный смысл ко– контравариантных индексов, которые в тензорной алгебре будут означать следующее: первые — номер вектора, вторые — порядковый номер координаты.

$$A^{ik\dots\ell} = a^{\alpha\beta\dots\gamma} x^i_\alpha x^k_\beta \dots x^\ell_\gamma \tag{1.19}$$

Первая свёртка называется алгебраической полилинейной формой и является в линейной алгебре удобной “моделью” для изучения тензоров и действия над ними.

Рассмотрим теперь два возможных варианта внешних произведений m объектов $x^i_\alpha, x^k_\beta, \dots, x^\ell_\gamma$, приняв для них следующие обозначения[11]:

$$[x^i x^k \dots x^\ell]_{\alpha\beta\dots\gamma} = \frac{1}{m!}\delta^{\mu\nu\dots\lambda}_{\alpha\beta\dots\gamma} x^i_\mu x^k_\nu \dots x^\ell_\lambda \tag{1.20}$$

$$[x_\alpha x_b \dots x_\gamma]^{ik\dots\ell} = \frac{1}{m!}\delta^{ik\dots\ell}_{pq\dots r} x^p_\alpha x^q_\beta \dots x^r_\gamma. \tag{1.21}$$

Нетрудно убедиться в том, что написанные выражения равны между собой, т. е.

$$[x_\alpha x_\beta \dots x_\gamma]^{ik\dots\ell} = [x^i x^k \dots x^\ell]_{\alpha\beta\dots\gamma} \tag{1.22}$$

Чтобы понять идею доказательства[12] этого равенства, рассмотрим случай $m = 2$. Имеем:

$$\begin{aligned}
[x^i x^k]_{\alpha\beta} = \frac{1}{2!}\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} x^i_\mu x^k_\nu = \frac{1}{2!}(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\nu_\alpha \delta^\mu_\beta) x^i_\mu x^k_\nu = \\
= \frac{1}{2!}(x^i_\alpha x^k_\beta - x^i_\beta x^k_\alpha) = \frac{1}{2!}(x^i_\alpha x^k_\beta - x^k_\alpha x^i_\beta) = \frac{1}{2!}\delta^{ik}_{pq} x^p_\alpha x^q_\beta = \\
= [x_\alpha x_\beta]^{ik}.
\end{aligned}$$

Образуя свёртку полученных выше внешних произведений (1.20) и (1.21) с объектами $a^{u\dots v}{}_{p\dots q \underbrace{ik\dots\ell}_{m}}$ или $a_{\lambda\dots\sigma}{}^{\mu\dots\nu \overbrace{\alpha\beta\dots\gamma}^{m}}$ по m последним индексам, приходим к выражениям:

$$F^{u\dots v}{}_{p\dots q;\alpha\beta\dots\gamma} = a^{u\dots v}{}_{p\dots q\, ik\dots\ell}[x^i x^k \dots x^\ell]_{\alpha\beta\dots\gamma} \tag{1.23}$$

и

$$F_{\lambda\dots\sigma}{}^{\mu\dots\nu;ik\dots\ell} = a_{\lambda\dots\sigma}{}^{\mu\dots\nu\,\alpha\beta\dots\gamma}[x_\alpha x_\beta \dots x_\gamma]^{ik\dots\ell} \tag{1.24}$$

---

[11] В дальнейшем, там, где это не вызывает недоразумений, мы будем опускать индексы, стоящие снаружи квадратных скобок и вместо $[x^i x^k \dots x^\ell]_{\alpha\beta\dots\gamma}$ и $[x_\alpha x_\beta \dots x_\gamma]^{ik\dots\ell}$ писать просто $[x^i x^k \dots x^\ell]$ и $[x_\alpha x_\beta \dots x_\gamma]$. Заметим кстати, что в трактате Бурбаки (“Алгебра”, гл. III, § 5, п 5.) внешнее произведение $[x_\alpha x_\beta \dots x_\gamma]^{ik\dots\ell}$ обозначается через $x_\alpha \wedge x_\beta \wedge \dots \wedge x_\gamma$.

[12] Если использовать формулу (??) и (??) теории определителей (см. гл. II), то равенство (1.22) может быть доказано в общем виде следующим образом:

$$\begin{aligned}
m![x^i \dots x^\ell]_{\alpha\beta\dots\gamma} &= \delta^{\mu\dots\nu}_{\alpha\dots\beta} x^i_\mu \dots x^\ell_\nu = e_{\alpha\dots\beta} e^{\mu\dots\nu} x^i_\mu \dots x^\ell_\nu = \\
&= e_{\alpha\dots\beta} e^{i\dots\ell} x = e^{i\dots\ell} e_{\alpha\dots\beta} x = e^{i\dots\ell}_{p\dots q} x^p_\alpha \dots x^q_\beta = \\
&= \delta^{i\dots\ell}_{p\dots q} x^p_\alpha \dots x^q_\beta = m![x_\alpha \dots x_\beta]^{i\dots\ell}.
\end{aligned}$$

первое из которых называется внешней тензорной формой степени m.

Там, где это не может вызвать недоразумений, мы будем опускать индексы $u \dots v \quad p \dots q$ и $\alpha\beta \dots \gamma$ и вместо (1.23) и (1.24) писать[13]:

$$F_{(\dots)\alpha\beta\dots\gamma} = a_{(\dots)ik\dots\ell}[x^i x^k \dots x^\ell]_{\alpha\beta\dots\gamma}$$

или ещё проще

$$F_{(\dots)} = a_{(\dots)ik\dots\ell}[x^i x^k \dots x^\ell].$$

Рассмотрим простейшие операции над внешними формами.

Суммой двух внешних форм

$$F_{(\dots)} = a_{(\dots)ik\dots\ell}[x^i x^k \dots x^\ell]$$

и

$$\Phi_{(\dots)} = b_{(\dots)ik\dots\ell}[x^i x^k \dots x^\ell]$$

одной и той же степени m и одного и того же ранга и строения называется форма той же степени, коэффициенты которой равны сумме коэффициентов заданных форм, т. е.

$$F_{(\dots)} + \Phi_{(\dots)} = (a_{(\dots)ik\dots\ell} + b_{(\dots ik\dots\ell)})[x^i x^k \dots x^\ell].$$

Внешним произведением двух внешних форм степени p и q

$$F_{(\dots)\underbrace{\alpha\beta\dots\gamma}_{p}} = a_{(\dots)ik\dots\ell}[x^i x^k \dots x^\ell]_{\alpha\beta\dots\gamma}$$

$$\Phi_{(\dots)\underbrace{\mu\nu\dots\lambda}_{q}} = b_{(\dots)mn\dots r}[x^m x^n \dots x^r]_{\mu\nu\dots\lambda}$$

называется свёртка произведений обоих форм с обобщённым символом Кронекера порядка $p+q$, т. е.

$$\Psi_{(\dots)(\dots)\alpha\beta\dots\gamma\,\mu\nu\dots\lambda} = [F_{(\dots)}\Phi_{(\dots)}]_{\alpha\beta\dots\gamma\,\mu\nu\dots\lambda} =$$
$$= \frac{1}{p!q!}\delta^{\sigma\rho\dots\tau\,\varphi\chi\dots\psi}_{\alpha\beta\dots\gamma\,\mu\nu\dots\lambda} F_{\dots\sigma\rho\dots\tau}\Phi_{(\dots)\varphi\chi\dots\psi}.$$

Раскрывая $[x^i x^k \dots x^\ell]_{\alpha\beta\dots\gamma}$ и $[x^m x^n \dots x^r]_{\mu\nu\dots\lambda}$ по формуле (1.20) и используя два раза равенство

$$\delta^{\,\sigma\dots\tau\;\;\varphi\dots\psi}_{\underbrace{\alpha\dots\gamma}_{p}\underbrace{\mu\dots\lambda}_{q}}\,\delta^{\,\pi\dots\rho}_{\underbrace{\sigma\dots\tau}_{p}} = p!\,\delta^{\,\pi\dots\rho\;\;\varphi\dots\psi}_{\underbrace{\alpha\dots\gamma}_{p}\underbrace{\mu\dots\lambda}_{q}}$$

(см. соотношение (1.11)) получаем

$$\Psi_{(\dots)(\dots)} = [F_{(\dots)}\Phi_{(\dots)}] = a_{(\dots)i\dots\ell}b_{(\dots)m\dots r}[x^i \dots x^\ell\, x^m \dots x^r].$$

[13]Знак (...) используется нами для сокращения обозначения всех ко– и контравариантных индексов, остающихся неизменными на протяжении всего рассмотрения.

1.7 Внешние дифференциальные формы Картана.

Будем называть внешней дифференциальной тензорной формой Картана[14] степени m внешнюю форму, в которой переменными являются дифференциалы $d_\alpha x^i$ $(i, \alpha = 1, 2, \dots, n)$, а коэффициентами — произвольные функции координат, т. е.

$$\omega_{(\dots)} = a_{(\dots)ik\dots\ell}[dx^i dx^k \dots dx^\ell] \tag{1.25}$$

или подробнее

$$\omega^{u\dots v}{}_{p\dots q;\alpha\beta\dots\gamma} = a^{u\dots v}{}_{p\dots q\,ik\dots\ell}[dx^i dx^k \dots dx^\ell]_{\alpha\beta\dots\gamma}$$

и совсем подробнее

$$\omega^{u\dots v}{}_{p\dots q;\alpha\beta\dots\gamma} = a^{u\dots v}{}_{p\dots q\,ik\dots\ell}\frac{1}{m!}\delta^{\mu\nu\dots\lambda}_{\alpha\beta\dots\gamma} d_\mu x^i d_\nu x^k \dots d_\lambda x^\ell.$$

Введем теперь понятие внешнего дифференциала.

Внешним дифференциалом от внешней дифференциальной формы степени m

$$\omega_{(\dots)} = a_{(\dots)ik\dots\ell}[dx^i dx^k \dots dx^\ell]$$

называется внешняя дифференциальная форма степени $m+1$ имеющая вид[15]:

$$d\omega_{(\dots)} = [da_{(\dots)i\dots\ell}dx^i \dots dx^\ell] = \frac{\partial a_{(\dots)i\dots\ell}}{\partial x^m}[dx^m dx^i \dots dx^\ell] \tag{1.26}$$

В более подробной записи определение (1.26) имеет вид:

$$d_\sigma \omega_{(\dots)\alpha\dots\gamma} = \frac{1}{(m+1)!}\delta^{\tau\mu\dots\lambda}_{\sigma\alpha\dots\gamma} d_\mu x^i \dots d_\lambda x^\ell = \\ = \frac{\partial a_{(\dots)i\dots\ell}}{\partial x^m}\frac{1}{(m+1)!}\delta^{\tau\mu\dots\lambda}_{\sigma\alpha\dots\gamma} d_\tau x^m d_\mu x^i \dots d_\lambda x^\ell. \tag{1.27}$$

---

[14] Эли Картан (1861–1951) — французский математик; преподавал в Лионе, Нанси; с 1912 г. — в Парижском университете. С 1931 г. член Парижской Академии наук. Автор многочисленных работ по теории непрерывных групп, по теории открытых им спиноров и теории относительности.

[15] Основанием для такого определения является специальный закон преобразования для $d\omega$ при переходе от одной системы координат к другой, состоящий в следующем: если дифференциальная форма ω при замене координат $x = x(\overline{x})$ преобразуется в форму $\overline{\omega}$, то внешний дифференциал $d\omega$, определённый указанным способом, преобразуется во внешний дифференциал $d\overline{\omega}$ от формы $\overline{\omega}$. Заметим кстати, что это не имело место, если в определении внешнего дифференциала (1.26) вместо частной производной $\dfrac{\partial a}{\partial x^m}(\dots)ik\dots\ell$ взять ковариантную производную $a_{(\dots)i\dots\ell,m}$ (см. § 1, гл. IV). Точно так же не имела бы места обобщённая теорема Стокса (см. § 10, гл. IV), ради которой мы и рассматриваем внешние формы Картана.

Если Θ — дифференциальная форма Картана равная внешнему дифференциалу от внешней дифференциальной формы ω, т. е. $\Theta = d\omega$, то воспользовавшись определением (1.26) легко показать, что её внешний дифференциал равен нулю.

Таким образом имеет место теорема Пуанкаре[16]: Второй внешний дифференциал от дифференциальной формы тождественно равен нулю.

[16]Анри Пуанкаре — крупнейший французский математик. Родился в Нанси в 1854 г., умер в Париже в 1912 г. Обучался в политехнической и Горной школах в Париже. С 1886 г. профессор Парижского университета. Член Парижской Академии наук. Его исследования об устойчивости движения и о фигурах равновесия жидкой вращающейся массы открыли новые горизонты в астрономии и космологии, позволяя применять более совершенные методы современного анализа. Он является также одним из основателей специальной теории относительности. Исследования Пуанкаре охватывают почти все разделы математики и математической физики.

Глава 2

Теория определителей.

Глава 1

Теория определителей.

Возможная, что самым замечательным является то, что при всей своей красоте и очевидной математической ценности преподавание теории определителей представляет настоящую проблему.

— У. Сойер.

1.1 Понятие определителя.

К понятию определителя можно прийти несколькими путями.

Один из таких путей связан с рассмотрением грасмановой алгебры. Понятие определителя, сформулированного в терминах внешнего произведения[1] является важным инструментом линейной алгебры. Однако для приложений удобно исходить из такого определения, в котором определитель рассматривается как особая функция от n^2 переменных a_{ik}, снабженных двумя индексами.

Чтобы сделать исходное определение более естественным, вспомним, как впервые возникло понятие определителя.

Рассматривалась система n линейных уравнений с n неизвестными

$$a_{ik}x^k = b_i \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

Было замечено, что решение этой системы выражается через a_{ik} и b_i с помощью одной функции, специальным образом зависящей от n^2 переменных. Эта

[1]Согласно определению, приведённому в трактате Бурбаки ("Алгебра", гл. III, § 6, п. 1), определителем эндоморфизма u модуля E, имеющего базис, состоящий из n элементов, называется скаляр λ, обозначаемый $\det u$, такой, что внешняя степень $\overset{n}{\wedge} u$ совпадает с гомотетией $z \to \lambda z$ модуля $\det u$. Таким образом, каковы бы ни были n элементов $x_i \in E$

$$u(x_1) \wedge u(x_2) \wedge \ldots \wedge u(x_n) = \det u \cdot x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n.$$

функция представляет собой сумму $n!$ слагаемых, каждое из которых является произведением n множителей

$$\pm a_{1i}a_{2k}\ldots a_{n\ell},$$

вторые индексы которых различны и образуют все возможные перестановки чисел $1,2,\ldots,n$; причём такое произведение берётся со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, чётным или нечётным числом перестановок последовательность $i,k,\ldots,\ell$ переводится к $1,2,\ldots,n$.

Функцию определённую таким образом, назвали определителем квадратной матрицы $\|a_{ik}\|$. В дальнейшем выяснилось, что введённая так функция играет чрезвычайно важную роль в чистой, так и в прикладной математике.

Приведённому выше определению можно придать компактный и удобный для вычислений вид, если воспользоваться символами Леви–Чивита.

Определителем называется свёртка по всем $2n$ индексам произведения n объектов и двух символов Леви–Чивита. Если в качестве исходных объектов взять a_{ik}, a^{ik} или $a_{i\cdot}^{\ k}$ то для каждого типа будем иметь соответственно:

$$a_0=\frac{1}{n!}e^{ik\ldots\ell}e^{mn\ldots p}a_{im}a_{kn}\ldots a_{\ell p} \tag{1.1}$$

$$a^0=\frac{1}{n!}e_{ik\ldots\ell}e_{mn\ldots p}a^{im}a^{kn}\ldots a^{\ell p} \tag{1.2}$$

$$a=\frac{1}{n!}e^{ik\ldots\ell}e_{mn\ldots p}a_i^{\ m}a_k^{\ n}\ldots a_\ell^{\ p} \tag{1.3}$$

Следует отметить, что обозначение определителя в виде

$$a_0=\frac{1}{n!}e^{ik\ldots\ell}e^{mn\ldots p}a_{im}a_{kn}\ldots a_{\ell p}$$

имеет преимущество перед традиционным

$$q_0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & A_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & A_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & A_{nn}\end{vmatrix}$$

не только в том, что оно компактнее; оставляя в стороне несущественные стороны вопроса, оно позволяет подчеркнуть те фундаментальные идеи антисимметрии, которые лежат в основе многих разделов чистой математики и теоретической физики.

1.2 Миноры и алгебраические дополнения.

Иногда возникает необходимость в специальных обозначениях для определителей, построенных на элементах произвольных квадратных подматрицах матрицы $\|a_{ik}\|$. Существует два способа построения таких определителей; оба они сводятся к образованию соответствующих свёрток по k или по $n-k$ индексам.

Минoры порядка k называется свёртка по k индексам произведения k объектов и обобщённого символа Кронекера порядка k.

Для объектов a_{ik}, a^{ik} и $a_i{}^k$ имеем, соответственно

$$M_{\underbrace{i\ldots k}_{k};\underbrace{m\ldots n}_{k}} = \delta^{u\ldots v}_{\underbrace{i\ldots k}_{k}} \underbrace{a_{um}\ldots a_{vn}}_{k} \tag{1.4}$$

$$M^{\overbrace{i\ldots k}^{k};\overbrace{m\ldots n}^{k}} = \delta^{i\ldots k}_{\underbrace{u\ldots v}_{k}} \underbrace{a^{um}\ldots a^{vn}}_{k} \tag{1.5}$$

$$M^{m\ldots n}_{\underbrace{i\ldots k}_{k}} = \delta^{u\ldots v}_{\underbrace{i\ldots k}_{k}} \underbrace{a_u{}^m\ldots a_v{}^n}_{k} \tag{1.6}$$

Алгебраическим дополнением порядка k называется свёртка по $n-k$ индексам произведения $n-k$ объектов и двух символов Леви–Чивита.

Для объектов a_{ik}, a^{ik} и $a_i{}^k$ имеем соответственно:

$$A^{\overbrace{i\ldots k}^{k};\overbrace{m\ldots n}^{k}} = \frac{1}{(n-k)!} e^{\overbrace{i\ldots k}^{k}\overbrace{u\ldots v}^{n-k}} e^{\overbrace{m\ldots n}^{k}\overbrace{p\ldots q}^{n-k}} \underbrace{a_{up}\ldots a_{vq}}_{n-k} \tag{1.7}$$

$$A_{\underbrace{i\ldots k}_{k};\underbrace{m\ldots n}_{k}} = \frac{1}{(n-k)!} e_{\underbrace{i\ldots k}_{k}\underbrace{u\ldots v}_{n-k}} e_{\underbrace{m\ldots n}_{k}\underbrace{p\ldots q}_{n-k}} \underbrace{a^{up}\ldots a^{vq}}_{n-k} \tag{1.8}$$

$$A^{i\ldots k}_{\underbrace{m\ldots n}_{k}} = \frac{1}{(n-k)!} e^{\overbrace{i\ldots k}^{k}\overbrace{u\ldots v}^{n-k}} e_{\underbrace{m\ldots n}_{k}\underbrace{p\ldots q}_{n-k}} \underbrace{a_u{}^p\ldots a_v{}^q}_{n-k} \tag{1.9}$$

Миноры и алгебраические дополнения, определённые соотношениями (1.4)–(1.9), допускают следующую интерпретацию.

Пусть $\|a_{ik}\|$ квадратная матрица, состоящая из n строк и столбцов. Согласно определению (1.4) минор $M_{i\ldots k;m\ldots n}$ равен определителю, составленному из элементов матрицы $\|a_{ik}\|$, стоящих на пересечении i-ой, ..., k-ой строки и m-го, ..., n-го столбца, со знаком $(-1)^{p+q}$, где p и q — числа перестановок, переводящих ряды чисел $i\ldots k$ и $m\ldots n$ в монотонно возрастающие последовательности.

Точно так же, согласно определению (1.7) алгебраическое дополнение $A^{i\ldots k;m\ldots n}$ равно определителю, составленному из элементов матрицы $\|a_{ik}\|$, оставшихся после вычёркивания i-ой, ..., k-ой строки и m-го, ..., n-го столбца, со знаком $(-1)^{u+v}$, где u и v — числа перестановок, переводящих ряд $1,2,\ldots,n$ в ряды $i\ldots k\,g\ldots f$ и $m\ldots n\,s\ldots t$ с монотонно возрастающими подпоследовательностями $g\ldots f$ и $s\ldots t$.

Например, для матрицы, состоящей из пяти строк и столбцов

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{matrix}$$

имеем:

$$M_{15;32} = (-1)^{0+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{52} & a_{53} \end{vmatrix}$$

$$A^{15;32} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

Таким образом минор первого порядка $M_{i;k}$ равен элементу a_{ik}, а минор n-го порядка $M_{12\ldots n;12\ldots n}$ и алгебраическое дополнение нулевого порядка A равны определителю матрицы $\|a_{ik}\|$.

Отметим кстати, что внешнее произведение (**??**) и (**??**) m объектов x^i_α, введённые в (**??**) есть ни что иное как соответствующий минор порядка m, делённый на $m!$, т. е.

$$[x^i x^k \ldots x^\ell]_{\alpha\beta\ldots\gamma} = [x_\alpha x_\beta \ldots x_\gamma]^{ik\ldots\ell} = \frac{1}{m!} M^{ik\ldots\ell}_{\alpha\beta\ldots\gamma}.$$

1.3 Некоторые свойства определителей.

Прежде всего докажем следующие, полезные для приложения соотношения для определителей a_0, a^0 и a, построенных соответственно из объектов a_{ik}, A^{ik} и $a_i{}^k$:

$$a^0 e^{ik\ldots\ell} = e_{mn\ldots p} a^{ik} a^{kn} \ldots a^{\ell p} \tag{1.10}$$

$$a_0 e_{ik\ldots\ell} = e^{mn\ldots p} a_{ik} a_{kn} \ldots a_{\ell p} \tag{1.11}$$

$$\begin{cases} a e_{ik\ldots\ell} = e_{mn\ldots p} a_i{}^m a_k{}^n \ldots a_\ell{}^p \\ a e^{ik\ldots\ell} = e^{mn\ldots p} a_m{}^i a_n{}^k \ldots a_p{}^\ell \end{cases} \tag{1.12}$$

Для этого рассмотрим следующий объект ранга n:

$$a_{ik\ldots\ell} = e^{mn\ldots p} a_{im} a_{kn} \ldots a_{\ell p} \tag{1.13}$$

Поскольку этот объект антисимметричен по всем n индексам, то

$$a_{ik\ldots\ell} = C e_{ik\ldots\ell}$$

Чтобы найти C умножим обе части равенства (1.13) на $e^{ik\ldots\ell}$ и образуем свёртку по всем n индексам. Получаем:

$$Cn! = e^{ik\ldots\ell}e^{mn\ldots p}a_{im}a_{kn}\ldots a_{\ell p},$$

откуда, на основании определения (1.1), имеем: $C = a_0$. Подставляя полученное значение C в (1.13), получаем (1.11).

Что касается соотношений (1.10) и (1.12), то они доказываются совершенно аналогичным образом.

Используя соотношения (1.1)–(1.3) и (1.10)–(1.12), можно простейшим способом доказать все элементарные свойства определителей, приводимые в традиционных курсах. Остановимся лишь на тех свойствах, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1. Произведение определителей.

Пусть a и b два определителя, построенные соответственно из объектов ${a_i}^k$ и ${b_i}^k$:

$$a = \frac{1}{n!}e^{ik\ldots\ell}e_{mn\ldots p}{a_i}^m{a_k}^n\ldots{a_\ell}^p$$

$$b = \frac{1}{n!}e^{mn\ldots p}e_{ik\ldots\ell}b_m^i{b_n}^k\ldots{b_p}^\ell$$

Покажем, что

$$ab = \frac{1}{n!e^{ik\ldots\ell}e_{mn\ldots p}}{(ab)_i}^m{(ab)_k}^n\ldots{(ab)_\ell}^p \tag{1.14}$$

где $${(ab)_i}^m = {a_i}^k b_k^m$$

Для доказательства представим a и b в виде

$$ae^{mn\ldots p} = e^{qr\ldots s}{a_q}^m{a_r}^n\ldots{a_s}^p$$

$$be_{mn\ldots p} = e_{ik\ldots\ell}b_m^i{b_n}^k\ldots{b_p}^\ell$$

Перемножая написанные выражения и свёртывая по всем n индексам, получаем (1.14).

Однако, если рассматривать определители a_0 и b_0 или A^0 и b^0 построенные, соответственно, из объектов a_{ik} и b_{ik} или A^{ik} и b^{ik} , то в процессе доказательства мы встретимся с необходимостью проводить суммирование по одним ковариантным индексам в первом случае и по одним контравариантным — во втором, вопреки правилу Эйнштейна, согласно которому суммирование производится по ко– контравариантным индексам одновременно.

В результате, используя равенства

$$\sum_{i,k,\ldots,\ell} e_{ik\ldots\ell}e_{ik\ldots\ell} = \sum_{i,k,\ldots,\ell} e^{ik\ldots\ell}e^{ik\ldots\ell} = n!$$

получаем

$$a_0b_0 = \frac{1}{n!}e^{ik\ldots\ell}e^{mn\ldots p}(ab)_{im}(ab)_{kn}\ldots(ab)_{\ell p}$$

и

$$a^0 b^0 = \frac{1}{n!} e_{ik\ldots\ell} e_{mn\ldots p} (ab)^{im} (ab)^{kn} \ldots (ab)^{\ell p}$$

где

$$(ab)_{im} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq} b_{qm}$$

$$(ab)^{im} = \sum_{q=1}^{n} a^{iq} b^{qm}$$

Нарушение привила Эйнштейна при нахождении $a_0 b_0$ и $a^0 b^0$ не является случайным, а связано с тем, что a_0 и a^0, в отличие от a, в различных системах координат принимают различные значения и, таким образом, не являются скалярами[2].

1.4 Формула Лапласа.

Формула Лапласа[3] позволяет представить определитель a в виде свёртки произведений алгебраических дополнений и миноров порядка k:

$$a_0 \delta^{s\ldots t}_{\underbrace{u\ldots v}_{k}} = \frac{1}{k!} M_{\underbrace{u\ldots v}_{k};\underbrace{m\ldots n}_{k}} A^{\overbrace{s\ldots t}^{k};\overbrace{m\ldots n}^{k}} \tag{1.15}$$

Для доказательства соотношения (1.15) умножим равенство

$$a_0 e_{\underbrace{i\ldots\ell}_{k}\underbrace{p\ldots q}_{n-k}} = e^{\overbrace{m\ldots n}^{k}\overbrace{u\ldots v}^{n-k}} \underbrace{a_{im}\ldots a_{\ell n}}_{k} \underbrace{a_{pu}\ldots a_{\ell n}}_{n-k}$$

на $e^{s\ldots t\, p\ldots q}$ и образуем свёртку по $n-k$ индексам $p\ldots q$. Используя определения (**??**) и (1.7) будем иметь

$$a_0 \delta^{s\ldots t}_{i\ldots\ell} = a_{im}\ldots a_{\ell n} A^{s\ldots t;m\ldots n}.$$

Умножим полученное равенство на $\delta^{\imath\ldots\ell}_{u\ldots v}$ и образуем свёртку по k индексам $i\ldots\ell$:

$$a_0 \delta^{s\ldots t}_{i\ldots\ell} \delta^{i\ldots\ell}_{u\ldots v} = \delta^{i\ldots\ell}_{u\ldots v} a_{im}\ldots a_{\ell n} A^{s\ldots t;m\ldots n}.$$

---

[2]Как будет показано ниже (см. §7, гл. III) a_0 и a^0 являются псевдоскалярами веса 2 и -2 соответственно.

[3]Пьер Симон Лаплас — французский математик и механик. Родился в 1749 г. в маленьком городке Бомоне на северо-западе Франции, умер в Париже в 1827 г. Член Парижской Академии наук, один из основателей Нормальной и Политехнических школ. Руководитель Бюро долгот. Основные работы Лапласа относятся к области небесной механики. Ему принадлежит ряд фундаментальных работ по дифференциальным уравнениям и теории вероятностей. Исследования Лапласа по физике касаются, главным образом, вопросов электромагнетизма, акустики и теории капиллярности.

Воспользовавшись формулой (**??**) и определением минора (1.4) получаем равенство (1.15).

Производя свёртку по всем k индексам и используя соотношение (1.12) перепишем формулу Лапласа (1.15) в виде:

$$a_0 = \frac{(n-k)!}{n!k!} M_{u\ldots v;m\ldots n} A^{u\ldots v;m\ldots n} \tag{1.16}$$

В частном, но очень важном, случае $k=1$ формула (1.15) имеет вид:

$$a_0 \delta_u^s = a_{um} A^{s;m} \tag{1.17}$$

Полагая в (1.17) $s = u = \underline{i}$ (черта под индексом означает, что этот индекс фиксирован и по нему не производится суммирование), получаем формулу разложения определителя по элементам $\underline{i}$-ой строки

$$a_0 = a_{\underline{i}m} A^{\underline{i};m} \tag{1.18}$$

где
$$A^{\underline{i};m} = \frac{1}{(n-1)!} e^{\underline{i}k\ldots\ell} e^{mu\ldots v} a_{ku} \ldots a_{\ell v}.$$

1.5 Производные определителя.

Рассмотрим определитель как функцию своих элементов a_{ik}, нетрудно показать, что

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_{ik}} = A^{i;k} \tag{1.19}$$

Равенство (1.19) доказывается непосредственным дифференцированием. Имеем:

$$a_0 = \frac{1}{n!} e^{uv\ldots w} e^{mn\ldots p} a_{um} a_{vn} \ldots a_{wp}$$

Замечая, что

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_{ik}} = \delta_k^i \delta_s^k$$

получим

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_{ik}} = \frac{1}{n!} (e^{iv\ldots w} e^{kn\ldots p} \underbrace{a_{vn} \ldots a_{wp}}_{n-1} + \ldots + e^{uv\ldots i} e^{mn\ldots k} \underbrace{a_{um} a_{vn} \ldots}_{n-1}).$$

Но

$$\frac{1}{(n_1)!} e^{iv\ldots w} e^{kn\ldots p} a_{vn} \ldots a_{wp} = A^{i;k},$$

следовательно

$$\frac{\pi a_0}{\partial a_{ik}} = \frac{1}{n} (A^{i;k} + A^{i;k} + \ldots + A^{i;k}) = A^{i;k}$$

что и требовалось доказать.

Если элементы определителя являются функциями x^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$, то

$$\frac{\partial a_0}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^\alpha} A^{i;k}. \tag{1.20}$$

В самом деле, дифференцируя a_0 по x^α получаем:

$$\frac{\partial a_0}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{n!} e^{uv\ldots w} e^{mn\ldots p} \frac{\partial a_{um}}{\partial x^\alpha} a_{vn} \ldots a_{wp} + \ldots + \frac{1}{n!} e^{uv\ldots w} e^{mn\ldots p} a_{um} a_{vn} \ldots \frac{\partial a_{wp}}{\partial x^\alpha}$$

или, используя определение алгебраического дополнения (1.7),

$$\frac{\partial a_0}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial a_{um}}{\partial x^\alpha} A^{u;m} + \ldots \frac{\partial a_{wp}}{\partial x^\alpha} A^{w;p} \right) = \frac{\partial a_{um}}{\partial x^\alpha} A^{u;m}.$$

1.6 Связь между минорами и алгебраическими дополнениями.

Используя определения (1.4)–(1.6) и (1.7)–(1.9) нетрудно получить формулы, позволяющие выразить алгебраические дополнения через миноры:

$$A^{\overbrace{i\ldots\ell}^{n-k};\overbrace{m\ldots r}^{n-k}} = \frac{1}{(k!)^2} e^{i\ldots\ell\, u\ldots v} e^{m\ldots r\, p\ldots q} M_{\underbrace{u\ldots v}_{k};\underbrace{p\ldots q}_{k}} \tag{1.21}$$

$$A_{\underbrace{i\ldots\ell}_{n-k};\underbrace{m\ldots r}_{n-k}} = \frac{1}{(k!)^2} e_{i\ldots\ell\, u\ldots v} e_{m\ldots r\, p\ldots q} M^{\overbrace{u\ldots v}^{k};\overbrace{p\ldots q}^{k}} \tag{1.22}$$

$$A^{\;i\ldots\ell}_{\underbrace{m\ldots r}_{n-k}} = \frac{1}{(k!)^2} \delta^{\,i\ldots\ell\; u\ldots v}_{m\ldots r\; p\ldots q} M^{\;p\ldots q}_{\underbrace{u\ldots v}_{k}} \tag{1.23}$$

и обратно

$$M^{\overbrace{i\ldots\ell}^{n-k};\overbrace{m\ldots r}^{k}} = \frac{1}{(k!)^2} e^{i\ldots\ell\, u\ldots v} e^{m\ldots r\, p\ldots q} A_{\underbrace{u\ldots v}_{k};\underbrace{p\ldots q}_{k}} \tag{1.24}$$

$$M_{\underbrace{i\ldots\ell}_{n-k};\underbrace{m\ldots r}_{k-k}} = \frac{1}{(k!)^2} e^{i\ldots\ell\, u\ldots v} e^{m\ldots r\, p\ldots q} A^{\overbrace{u\ldots v}^{k};\overbrace{p\ldots q}^{k}} \tag{1.25}$$

$$M^{\;i\ldots\ell}_{\underbrace{m\ldots r}_{n-k}} = A^{\;i\ldots\ell}_{\underbrace{m\ldots r}_{n-k}} = \frac{1}{(k!)^2} \delta^{\,i\ldots\ell\; u\ldots v}_{m\ldots r\; p\ldots q} A^{\;p\ldots q}_{\underbrace{u\ldots v}_{k}} \tag{1.26}$$

Действительно, используя соотношение (**??**) перепишем выражение (1.7) в виде:

$$A^{i\dots\ell;m\dots r} = \frac{1}{(k!)^2} e^{i\dots\ell\, s\dots t} \delta^{u\dots v}_{s\dots t} e^{m\dots r\, p\dots q} a_{up} \dots a_{vq},$$

откуда, на основании определения (1.4) получаем соотношение (1.21).

Формулы (1.22) и (1.23) получаются совершенно аналогичным образом.

Умножая (1.22) на $e^{i\dots\ell\, f\dots h} e^{m\dots r\, s\dots t}$ и свёртывая полученное по $i\dots\ell$ и $m\dots r$ будем иметь:

$$e^{i\dots\ell\, f\dots h} e^{m\dots r\, s\dots t} A_{\underbrace{i\dots\ell}_{n-k};\underbrace{m\dots r}_{n-k}} = \left(\frac{(n-k)!}{k!}\right)^2 \delta^{\ f\dots h}_{\underbrace{u\dots v}_{k}} \delta^{\ s\dots t}_{\underbrace{p\dots q}_{k}} M^{u\dots v;p\dots q}$$

Дважды используя формулу (**??**) получаем соотношение

$$e^{i\dots\ell\, f\dots h} e^{m\dots r\, s\dots t} A_{i\dots\ell;m\dots r} = \big((n-k)!\big)^2 M^{f\dots h;s\dots t}$$

эквивалентное (1.24).
Точно также доказывается и формулы (1.25) и (1.26).

1.7 Взаимные миноры и алгебраические дополнения.

Пусть даны объекты a_{ik}, a^{ik} и $a_i{}^k$. Объектами взаимными к a_{ik}, a^{ik} и $a_i{}^k$, называются такие объекты $\overset{*}{a}_{ik}$, $\overset{*}{a}{}^{ik}$ и $\overset{*}{a}_i{}^k$, что

$$a_{ik}\, \overset{*}{a}{}^{\ell k} = \delta^\ell_i \tag{1.27}$$

$$a^{ik}\, \overset{*}{a}_{\ell k} = \delta^i_\ell \tag{1.28}$$

$$a_i{}^k\, \overset{*}{a}_k{}^\ell = \delta^\ell_i \tag{1.29}$$

Назовём определители $\overset{*}{a}{}^0$, миноры $\overset{*}{M}{}^{s\dots t;k\dots\ell}$ и алгебраические дополнения $\overset{*}{A}{}_{s\dots t;k\dots\ell}$ взаимными к a_0, $M_{s\dots t;k\dots\ell}$ и $A^{s\dots t;k\dots\ell}$, если они построены из объектов $\overset{*}{a}{}^{ik}$ взаимных к a_{ik}.

Покажем, что для взаимных определителей, миноров и алгебраических дополнений имеют место следующие соотношения:

$$a_0\, \overset{*}{a}{}^0 = 1 \tag{1.30}$$

$$\overset{*}{M}{}^{s\dots t;k\delta\ell} = \frac{1}{a_0} A^{s\dots t;k\dots\ell} \tag{1.31}$$

$$\overset{*}{A}_{s\ldots t;k\delta\ell} = \frac{1}{a_0} M_{s\ldots t;k\ldots\ell} \tag{1.32}$$

$$M_{s\ldots t;k\delta\ell}\ \overset{*}{M}{}^{p\ldots q;k\ldots\ell} = m!\delta^{p\ldots q}_{s\ldots t} \tag{1.33}$$

$$A^{p\ldots q;k\ldots\ell}\ \overset{*}{A}_{s\ldots t;k\ldots\ell} = m!\delta^{p\ldots q}_{s\ldots t} \tag{1.34}$$

Отметим, что равенство (1.30) получается как частный случай равенства (1.34), если принять $m = 0$.

Для доказательства соотношения (**??**) умножим равенство

$$a_0 e_{i\ldots k} = e^{p\ldots q} a_{ip} \ldots a_{kq}$$

на $\overset{*}{a}{}^{ik}, \ldots, \overset{*}{a}{}^{kv}$. Воспользовавшись определением (1.27) получим

$$a_0 e_{i\ldots k}\ \overset{*}{a}{}^{ik} \ldots \overset{*}{a}{}^{kv} = e^{u\ldots v}.$$

Умножая обе части полученного равенства на $e_{u\ldots v}$ и свёртывая по всем n индексам, будем иметь

$$a_0 e_{u\ldots v} e_{i\ldots k}\ \overset{*}{a}{}^{ik} \ldots \overset{*}{a}{}^{kv} = n!$$

или по определению (1.4)

$$a_0\ \overset{*}{a}{}^{0} = 1.$$

Для доказательства соотношения (1.31) умножим равенство

$$a_0 e_{\underbrace{i\ldots r}_{k}\underbrace{p\ldots q}_{n-k}} = e^{\overbrace{m\ldots n}^{k}\underbrace{\overbrace{u\ldots v}}_{n-k}} \underbrace{a_{im}\ldots a_{rn}}_{k}\underbrace{a_{pu}\ldots a_{qv}}_{n-k}$$

на $e^{s\ldots t\, p\ldots q}$ и образуем свёртку по $n-k$ последним индексам $p\ldots q$. Используя определения (**??**) и (1.7) будем иметь

$$a_0 \delta^{s\ldots t}_{i\ldots r} = a_{im} \ldots a_{rn} A^{s\ldots t;m\ldots n} \tag{1.35}$$

Умножая обе части полученного равенства на $\overset{*}{a}{}^{ik} \ldots \overset{*}{a}{}^{r\ell}$ и учитывая (1.27), получаем

$$a_0 \delta^{s\delta t}_{i\ldots r}\ \overset{*}{a}{}^{ik} \ldots \overset{*}{a}{}^{r\ell} = A^{s\ldots t;k\ldots\ell}$$

или

$$a_0\ \overset{*}{M}{}^{s\ldots t;k\ldots\ell} = A^{s\ldots t;k\ldots\ell}$$

Для доказательства соотношения (1.32) воспользуемся равенством, аналогичным (1.35):

$$\overset{*}{a}{}^{0} \delta^{i\ldots r}_{s\ldots t} = \overset{*}{a}{}^{im} \ldots \overset{*}{a}{}^{rn}\ \overset{*}{A}_{s\ldots t;m\ldots n},$$

умножая которое на $a_{ik}, \dots a_{r\ell}$, получим

$$\overset{*}{a}{}^0 M_{s\dots t;k\dots\ell} = \overset{*}{A}_{s\dots t;k\dots\ell}$$

или

$$\frac{1}{a_0} M_{s\dots t;k\dots\ell} = \overset{*}{A}_{s\dots t;k\dots\ell}.$$

Соотношение (1.33) доказывается непосредственно:

$$M_{s\dots t;k\dots\ell}\ \overset{*}{M}{}^{p\dots q;k\dots\ell} = \delta^{u\dots v}_{s\dots t} a_{ku}\dots a_{\ell v}\delta^{p\dots q}_{r\dots f}\ \overset{*}{a}{}^{kr}\dots\ \overset{*}{a}{}^{\ell f} = \delta^{u\dots v}_{s\dots t}\delta^{p\dots q}_{u\dots v} = m!\delta^{p\dots q}_{s\dots t}.$$

Что же касается соотношения (1.34), то оно следует из равенства:

$$M_{s\dots t;k\dots\ell}\ \overset{*}{M}{}^{p\dots q;k\dots\ell} = A^{p\dots q;k\dots\ell}\ \overset{*}{A}_{s\dots t;k\dots\ell}, \tag{1.36}$$

которое легко получить перемножая (1.31) и (1.32) и свёртывая по m индексам $k\dots\ell$.

1.8 Специальные определители.

Приведём для справок выражения для некоторых определителей играющих важную роль в различных областях математики и теоретической физики.

1. **Определитель Грама.**

Для существования линейной зависимости между m векторами n -мерного пространства $\vec{a}_\alpha = (a^1_\alpha, a^2_\alpha, \dots, a^n_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, \dots, m)$ необходимо и достаточно, чтобы определитель Грама[4]

$$\Delta_m = \frac{1}{m!} e^{\alpha\beta\dots\gamma} e^{\mu\nu\dots\lambda} (\vec{a}_\alpha\vec{a}_\mu)(\vec{a}_\beta\vec{a}_\nu)\dots(\vec{a}_\gamma\vec{a}_\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}_1{}^2 & (\vec{a}_1\vec{a}_2) & \dots & (\vec{a}_1\vec{a}_m) \\ (\vec{a}_2\vec{a}_1) & \vec{a}_2{}^2 & \dots & (\vec{a}_2\vec{a}_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\vec{a}_m\vec{a}_1) & (\vec{a}_m\vec{a}_2) & \dots & \vec{a}_m{}^2 \end{vmatrix} \tag{1.37}$$

где $\vec{a}_\alpha\vec{a}_\mu = \vec{a}_\mu\vec{a}_\alpha = g_{ik}a^i_\alpha a^k_\mu$, $(i, k = 1, 2, \dots, n)$, $g_{ik} = g_{ki}$ — метрический тензор (см. §4 гл. III), был тождественно равен нулю.

В пространстве функций определитель Грама имеет вид:

$$\Delta_m = \frac{1}{m!} e^{\alpha\beta\dots\gamma} e^{\mu\nu\dots\lambda} a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu}\dots a_{\gamma\lambda},$$

[4] Определитель Грама был введён датским математиком Йорганом Грамом (1850–1916) в работе “О разложении вещественных функций в ряды с помощью метода наименьших квадратов” (1883).

где $a_{\alpha\mu} = \int\limits_a^b x_\alpha(t) x\mu(t) dt$, а приведённое выше утверждение означает:

Для линейной зависимости m функций $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$ необходимо и достаточно, чтобы их определитель Грама был равен нулю.

2. Определитель Вронского[5]**.**

Если функции $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ являются решениями линейного дифференциального уравнения n -го порядка

$$x^{(n)} + c_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + c_{n-1}(t)x^1 + c_n(t)x = 0,$$

то для их линейной зависимости необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского (вронскиан)

$$W[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!} e^{ik\ldots\ell} e_{pq\ldots r} x_i^{(p-1)} x_k^{(q-1)} \ldots x_\ell^{(r-1)} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1' & x_2' & \ldots & x_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n_1)} & x_2^{(n_1)} & \ldots & x_n^{(n_1)} \end{vmatrix} \tag{1.38}$$

был тождественно равен нулю[6].

Если в качестве исходного взять дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами, а в качестве частных решений — систему функций $x_1(t) = e^{a_1 t}, x_2(t) = e^{a_2 t}, \ldots, x_n(t) = e^{a_n t}$, то определитель Вронского сведётся к определителю Вандремонда

$$\mathcal{D}_n = \frac{1}{n!} e^{ik\ldots\ell} e_{pq\ldots r} (a_i)^{p-1} (a_k)^{q-1} \ldots (a_\ell)^{r-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\ldots & 1 & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (a_k - a_i) \tag{1.39}$$

---

[5] Юзеф Вронский (1778–1853) — польский математик и философ. Был артиллерийским офицером в армии Костющки. Его работы по математике характеризуются чрезвычайной широтой и общностью постановки задач. Вронский искал общие методы решения алгебраических уравнений любой степени, формулы, охватывающие все до него известные разложения в ряды, способы решения дифференциальных уравнений любых порядков и т. д. Однако сложность обозначений которыми он пользовался, тёмный, склоняющийся к мистицизму стиль, затрудняли изучение его произведений.

[6] Заметим, что для произвольной системы n линейно зависимых функций определитель Грама (1.37) всегда равен нулю, в то время как определитель Вронского (1.38), вообще говоря, отличен от нуля, так как для обращения $W[x_1, x_2 \ldots, x_n]$ в нуль необходимо чтобы $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ были линейно зависимыми решениями одного и того же дифференциального уравнения

одному из немногих определителей, которые могут быть вычислены в общем виде.

3. Функциональный определитель Якоби.[7]

Пусть дана система n функций от n переменных

$$\begin{gathered} y^1 = y^1(x^1, x^2, \ldots, x^n) \\ y^2 = y^2(x^1, x^2, \ldots, x^n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n = y^n(x^1, x^2, \ldots, x^n) \end{gathered} \tag{1.40}$$

Определитель, составленный из частных производных $\frac{\partial y^i}{\partial x^k}$

$$\frac{\partial(y^1, y^2, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)} = \frac{1}{n!} e^{ik\ldots\ell} e_{pq\ldots r} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^k} \cdots \frac{\partial y^r}{\partial x^\ell} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial y^n}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \ldots & \frac{\partial y^n}{\partial x^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n} & \frac{\partial y^2}{\partial x^n} & \ldots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \tag{1.41}$$

называется функциональным определителем Якоби или якобианом.

Если наряду с системой (1.40) рассмотреть новую систему функций

$$\begin{gathered} z^1 = z^1(y^1, \ldots, y^n) = \overline{z}^1(x^1, \ldots, x^n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z^n = z^n(y^1, \ldots, y^n) = \overline{z}^n(x^1, \ldots, x^n) \end{gathered} \tag{1.42}$$

где $\overline{z}^i(x^1, \ldots, x^n) = z^i\big(y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^n(x^1, \ldots, x^n)\big)$, то используя правило умножения определителей (1.14), нетрудно доказать следующее свойство якобианов:

$$\frac{\partial(z^1, z^2, \ldots, z^n)}{\partial(y^1, y^2, \ldots, y^n)} \cdot \frac{\partial(y^1, y^2, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)} = \frac{\partial(\overline{z}^1, \overline{z}^2, \ldots, \overline{z}^n)}{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)} \tag{1.43}$$

Легко видеть, что соотношение (1.43) является обобщением формулы для производной сложной функции.

---

[7]Карл Густав Якоби — немецкий математик, родился в Потсдаме в 1804 г., умер в Берлине в 1851 г. Профессор Берлинского университета. С 1826 г. — член Берлинской Академии наук. Им получены фундаментальные результаты в области уравнений с частными производными. В своих лекциях по динамике и в ряде исследований по теории эллиптических функций Якоби решил ряд важнейших вопросов чистой и прикладной математики. Он усовершенствовал предложенный Гамильтоном метод интегрирования дифференциальных уравнений динамики, известный как метод Гамильтона–Якоби.

Если положить $z^i = x^i$ так что система (1.42) будет являться результатом обращения системы (1.40), то равенство (1.43) сводится к соотношению

$$\frac{\partial(y^1, y^2, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial(y^1, y^2, \ldots, y^n)}} \tag{1.44}$$

напоминающему формулу для производной обратной функции.

Воспользуемся очевидным равенством:

$$\delta^{ik\ldots\ell}_{pq\ldots r}\frac{\partial(y^1, y^2, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)} = \frac{\partial(y^i, y^k, \ldots, y^\ell)}{\partial(x^p, x^q, \ldots, x^r)} \tag{1.45}$$

получим выражение для обощённого символа Кронерера через якобиан

$$\delta^{ik\ldots\ell}_{pq\ldots r} = \frac{\partial(x^i, x^k, \ldots, x^\ell)}{\partial(x^p, x^q, \ldots, x^r)}$$

Используя понятие якобиана, сформулируем несколько теорем относящихся к теории неявных функций и имеющих непосредственное отношение к криволинейным координатам, рассматриваемым в тензорном анализе.

Система n уравнений

$$\begin{gathered} y^1 = y^1(x^1, \ldots, x^n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n = y^n(x^1, \ldots, x^n) \end{gathered}$$

разрешима относительно $x^1, \ldots, x^n$, если якобиан её $\dfrac{\partial(y^1, y^2, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)}$ отличен от нуля.

Система m уравнений с $m+n$ переменными

$$\begin{gathered} F_1(x^1, \ldots, x^n; y^1, \ldots, y^m) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x^1, \ldots, x^n; y^1, \ldots, y^m) = 0 \end{gathered}$$

определяет $y^1, \ldots, y^m$ как однозначную функцию $x^1, \ldots, x^n$, если якобиан $\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y^1, \ldots, y^m)}$ отличен от нуля.

Среди m функций n переменных $x^1, \ldots, x^n$

$$\begin{gathered} y^1 = y^1(x^1, \ldots, x^n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n = y^n(x^1, \ldots, x^n) \end{gathered}$$

имеется p функционально зависимых[8], если ранг[9] матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^m}{\partial x^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n} & \dots & \frac{\partial y^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

равен p.

4. Определитель Гессе[10].

Рассмотрим функцию n переменных $\varphi(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Определитель, составленный из частных производных втрого порядка

$$\mathcal{G}_n = \frac{1}{n!} e^{ik\dots\ell} e^{pq\dots r} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1 \partial x^1} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^k \partial x^q} \cdot \dots \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\ell \partial x^r} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^1 \partial x^1} & \dots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1 \partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^n \partial x^1} & \dots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^n \partial x^n} \end{vmatrix} \tag{1.46}$$

называется определителем Гессе или гессианом.

Функция $\varphi(x^1.x^2, \dots, x^n)$ имеет в точке $A(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ максимум (минимум), если все производные первого порядка в этой точке равны нулю, а все определители Гессе $G_1, G_2, \dots, G_n$ порядка от 1 до n меньше (больше) нуля.

Преобразование

$$y_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}(x^1, x^2, \dots, x^n) \tag{1.47}$$

осуществляемое с помощью функции n переменных $\varphi(x^1, x^2, \dots, x^n)$ обратимо, если гессиан этой функции G_n отличен от нуля.

Заметим при этом, что преобразование (1.47) имеет взаимный характер, т. е.

$$x^i = \frac{\partial\Psi}{\partial y_i}(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

где $\Psi = y_i \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} - \varphi$.

[8] p функций $y^1, \dots, y^p$ называются функционально зависимыми, если существует такая функция $\Phi(y^1, \dots, y^p)$, не равная тождественно нулю, что равенство

$$\Phi\big(y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^p(x^1, \dots, x^n)\big) = 0$$

является тождеством.

[9] Ранг матрицы называется наименьший из порядков миноров отличных от нуля и образованных из элементов этой матрицы.

[10] Отто Людвиг Гессе (1811–1874) — немецкий математик. Ученик Якоби; профессор в Кенигсберге, Галле и Мюнхене. Основные работы Гессе посвящены теории проективных свойств кривых и поверхностей, определению точек перегиба плоской кривой ?-го порядка. В этих работах Гессе приходит к инвариантному определителю-гессиану.

Глава 1

Тензорная алгебра.

Бóльшая общность придаёт тензорному исчислению истинность, которой порой лишены частные случаи.

— *Марсель Грасман.*

1.1 Криволинейные координаты.

Исторически тензорное[1] исчисление возникло в работах Кристофеля, Риччи и Леви-Чивита на базе дифференциальной геометрии. Однако для целей теоретической физики наиболее интересна её аналитическая сторона, очищенная от излишних ассоциаций с понятиями эвклидовой геометрии. В связи с этим мы намерено отказываемся от каких-либо геометрических иллюстраций, так как по нашему мнению, они мало что дают для понимания тензорного анализа.

Пусть x^i $(i = 1, 2, \dots, n)$ совокупность n связанная с другой совокупностью $\overline{x}^i$ системой n произвольных, достаточное число раз дифференцируемых функций, якобиан которой отличен от нуля:

$$\begin{array}{c} x^1 = x^1(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \dots, \overline{x}^n) \\ x^2 = x^2(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \dots, \overline{x}^n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^n = x^n(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \dots, \overline{x}^n) \end{array}$$

или короче

$$x^i = x^i(\overline{x}^k). \tag{1.1}$$

[1]Общее понятие тензора было введено итальянским математиком Риччи (см. [1] на стр.) в работе “О ковариантном и контравариантном дифференцировании” (1888). Риччи назвал тензор “системами” (sistemi). Термин “тензор” (от латинского слова tensor, означающего “растягиватель”) был введён Гамильтоном в значении модуля кватерниона и вектора. В современном значении термин “тензор” и “тензорный анализ” были введены одновременно с созданием общей теории относительности и были предложены Эйнштейном и Грасманом в работе “Проект общей теории относительности и теории тяготения” (1913).

Поскольку якобиан системы (1.1) отличен от нуля, система (1.1) может быть разрешена относительно $\overline{x}^i$:

$$\overline{x}^i = \overline{x}^i(x^k). \tag{1.2}$$

Нозовём переменные x^i — старыми, а $\overline{x}^i$ — новыми криволинейными координатами[2].

Рассмотрим закон преобразования дифференциалов dx^i при переходе от старой системы координат к новой. Дифференцируя (1.1) и (1.2), имеем

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k} d\overline{x}^k \tag{1.3}$$

$$d\overline{x}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} dx^k \tag{1.4}$$

Частные производные

$$\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k} = \underline{c}^i_k \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} = \overline{c}^i_k \tag{1.6}$$

можно рассматривать как элементы двух матриц $\underline{C}$ и $\overline{C}$.

Перепишем соотношения (1.3) и (1.4) в новых обозначениях

$$dx^i = \underline{c}^i_k d^k \tag{1.7}$$

и

$$d\overline{x}^i = \overline{c}^i_k dx^k. \tag{1.8}$$

Итак, мы видим, что при произвольных преобразованиях координат (1.1) дифференциалы dx^i преобразуются линейным образом.

Подставим в (1.7) выражение для $d\overline{x}^k$ из (1.8), получаем:

$$dx^i = \underline{c}^i_k \overline{x}^k_m dx^m$$

или

$$\underline{c}^i_k \overline{c}^k_m = \delta^i_m. \tag{1.9}$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\overline{c}^i_k \underline{c}^\ell_i = \delta^\ell_k. \tag{1.10}$$

На языке матриц уравнения (1.9) и (1.10) эквиваленты равенству

$$\underline{C}\,\overline{C} = \overline{C}\,\underline{C} = E \tag{1.11}$$

Очевидно, что определители $\underline{C}$ и $\overline{C}$ соответствующих матриц преобразования связаны между собой тем же уравнением (1.11).

[2]Криволинейные координаты произвольного вида на поверхности трёхмерного пространства введены Гауссом в “Общих исследованиях о кривых поверхностях” (1827). Криволинейные координаты на поверхности n -пространства, являющееся частным случаем координат в римановом пространстве, были введены Риманом в лекции “О гипотезах, лежащих в основании геометрии” (1854).

1.2 Скаляры и векторы.

Функция A от переменных x^i называется скаляром[3], если при переходе от одной системы координат к другой она преобразуется по закону

$$A(x') = \overline{A}(\overline{x}^k) \tag{1.12}$$

Совокупность функций A_i от переменных x^k называется ковариантным вектором, если при переходе от одной системы координат к другой, она преобразуется по закону

$$A_i = \overline{c}_i^k \overline{A}_k. \tag{1.13}$$

Совокупность функций A^i от переменных x^k называется контравариантным вектором, если при переходе от одной системы координат к другой она преобразуется по закону

$$A^i = \underline{c}_k^i \overline{A}^k. \tag{1.14}$$

Частная производная скалярной функции A является ковариантным вектором.

В самом деле, дифференцируя (1.12) по x^i получаем:

$$\frac{\partial A}{\partial x^i} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial \overline{x}^k} \cdot \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} = \overline{c}_i^k \frac{\partial \overline{A}}{\partial \overline{x}^k}$$

что совпадает с (1.13), если положить

$$A_i = \frac{\partial A}{\partial x^i}.$$

Следует обратить внимание на тот факт, что совокупность n переменных x^i **не является** контравариантным вектором, так как закон преобразования (1.1) не имеет ничего общего с законом преобразования (1.14).

С другой стороны, совокупность $\overline{n}$ дифференциалов dx^i **является** контравариантным вектором, так как закон преобразования (1.7) совпадает с (1.14).

Заметим, наконец, что совокупность дифференциалов ко– или контравариантного вектора A_i (или A^i) **не являются** вектором так как преобразование

$$dA_i = \overline{c}_i^k d\,\overline{A}_k + \frac{\partial^2 \overline{x}^{\,k}}{\partial x^i \partial x^\ell} \overline{A}_k d\,\overline{x}^{\,m} \underline{c}_m^\ell$$

отличается от (1.13) слагаемыми, пропорциональными $d\,\overline{x}^{\,m}$.

Свёртка ко– и контравариантных векторов является скаляром.

В самом деле

$$A_i B^i = \overline{c}_i^m \underline{c}_m^i \overline{A}_m \overline{B}^n = \delta_n^m \overline{A}_m \overline{B}^n = \overline{A}_n \overline{B}^n.$$

[3]Термин "скаляр" (от латинского слова scala — "лестница") для обозначения вещественных чисел (расположенных "как ступеньки лестницы") и "вектор" (от латинского слова vector — "переноситель" были введены ирландским математиком Гамильтоном (1805–1865) в его "Лекциях о кватернионах" (1853)

1.3 Общее определение тензора.

К понятию тензора можно придти, вообще говоря, различными путями. Один из таких путей связан с рассмотрением тензора как вектора в специальном линейном пространстве, полученном из обычных пространств путём образования их, так называемого, тензорного произведения[4]. Такая точка зрения на тензор оказывается очень удобной, когда дело касается рассмотрения его общих свойств и ряда приложений, связанных с нахождением неприводимых представлений тех или иных групп.

Однако существует большой круг проблем, в которых удобно характеризовать тензор совокупностью n^p функций n переменных, называемых его компонентами, преобразующихся при переходе от одной системы координат к другой по вполне определённому закону. Именно такой подход мы и примем за основу.

Прежде всего введём понятие дифференциально-геометрического объекта.

Мы будем говорить, что задано поле дифференциально-геометрического класса p (или короче геометрических объектов), если задана система N функций $\varphi_\alpha(x)$ от n переменных x^i, которая при переходе к новой системе координат $\overline{x}^i$ преобразуется по закону

$$\varphi_\alpha(x^i) = \Phi_\alpha\left(\varphi_\mu(\overline{x}^k), \frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^\ell}, \frac{\partial^2\overline{x}^k}{\partial x^\ell\partial x^m}, \dots, \frac{\partial^p\overline{x}^k}{\partial x^\ell\dots\partial x^q}\right) \tag{1.15}$$

где Φ_α — вполне определённая для данного объекта функция.

На первый взгляд может показаться, что закон (1.15) в значительной степени произволен. На самом деле, определение (1.15) накладывает на закон преобразования Φ_α очень жесткое требование — он не должен зависеть от вида преобразования координат, а следовательно должен обладать групповыми свойствами.

Среди различных возможных объектов особенно важными являются тензорные поля.

Мы будем говорить, что задано поле тензора (или просто тензор) ковариантного ранга m и контравариантного ранга r если задана система n^{m+r} функций $A_{\underbrace{i\dots k}_{m}}{}^{\overbrace{p\dots q}^{r}}$ от n переменных x^s, если при переходе от одной системы координат к другой она преобразуется как как произведение m ковариантных и r контравариантных векторов, т. е.

$$A_{i\dots k}{}^{p\dots q} = \overline{c}_i^u \dots \overline{c}_k^v \underline{c}_s^p \dots \underline{c}_t^q \overline{A}_{u\dots v}{}^{s\dots t} \tag{1.16}$$

[4]Согласно определению приведённому в трактате Бурбаки (“Алгебра” гл. III, § 4, п. 1), тензорным ковариантным ранга m и контравариантным ранга r называется всякий элемент тензорного произведения $\bigotimes\limits_{i=1}^{m+r} E_i$, где m модулей совпадает с E — унитарным модулем над коммутативным кольцом A, а остальные r — с сопряжённым модулем E^*; тензорным произведением $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} E_i$ n модулей E_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ называется фактор модуль $\mathfrak{G}/H$ модуля $\mathfrak{G}$ линейных комбинаций элементов произведения $\prod\limits_{i=1}^{n} E_i$ по модулю H, на котором аннулируются все полилинейные функции.

Так например, закон преобразования тензора $A^{ik}_{\cdot\cdot mnp}$ имеет вид

$$A^{ik}_{\cdot\cdot mnp} = \underline{c}^i_n \underline{c}^k_v \overline{c}^s_m \overline{c}^r_n \overline{c}^t_p \overline{A}^{uv}_{\cdot\cdot srt}.$$

Используя очевидное равенство

$$\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k} \cdot \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \overline{\overline{x}}^m} = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{\overline{x}}^m}$$

нетрудно убедиться в том, что тензорный закон преобразования (1.16) обладает групповыми свойствами.

Если компоненты ко- и контравариантного тензора не меняются от перестановки двух или нескольких индексов, тензор называется симметрическим относительно этих индексов. Тензор называется антисимметрическим по отношению к данной системе индексов, если его компоненты остаются неизменными при любой чётной перестановке этих индексов и меняет свой знак на обратный при любой нечётной.

Из линейности и однородности закона преобразования (1.16) вытекает важное следствие: Если все компоненты тензора равны нулю в одной системе координат, то они остаются равными нулю в любой другой произвольно выбранной системе.

Таким образом, если физические уравнения приведены к виду, выражающему обращение в нуль всех компонент некоторого тензора, то эти уравнения имеют определённый смысл, не зависящий от выбора системы координат.

Из определения (1.16) следует также, что операция сложения, умножения и свёртки сохраняют тензорный характер тех объектов, которые получаются из данных тензоров в результате трёх перечисленных операций. Можно также показать, что тензор, симметрический (антисимметрический) в одной системе координат, будет симметрическим (антисимметрическим) в любой другой. Однако заметим ещё раз, что операция дифференцирования не сохраняет тензорного характера полученных объектов, т. е. дифференциал тензора не есть тензор.

1.4 Метрический тензор.

Как мы уже упоминали, эффективность тензорного исчисления при описании физических явлений связана с возможностью записывать уравнения в ковариантном виде, сводя их правую часть к нуль-тензору. Но кроме нуль-тензора существуют скаляры, которые остаются неизменными в различных системах координат, также могли бы служить для инвариантной записи тех или иных уравнений.

Скаляр легко получить свёртывая произведение ко- и контравариантного векторов. Но невозможно получить скаляр из одного вектора, оставаясь в рамках тех определений и понятий, которые были даны выше.

Чтобы сделать теорию более содержательной и эффективной, необходимо дополнить её правилом, по которому каждому вектору сопоставляется скаляр или, в более общей постановке, правило, по которому каждому тензору сопоставляется тензор меньшего ранга.

В принципе существует много способов построения скаляров, в одном случае можно было бы задать фиксированную для каждой теории совокупность n функций g_i , преобразующихся как ковариантный вектор, и объявить скаляром A , соответствующий вектору A^i следующую свёртку

$$A = g_i A^i \tag{1.17}$$

В другом случае можно было бы задать $\frac{1}{2}n(n+1)$ произвольных, но для данной теории фиксированных функций g_{ik} , симметричных относительно перестановки индексов i и k и преобразующихся как дважды ковариантный тензор и назвать скаляром A соответствующим вектору A^i , следующее выражение:

$$A = g_{ik} A^i A^k \tag{1.18}$$

Наконец, можно было бы рассмотреть $\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$ функций $g_{ik\ell}$, симметричных относительно перестановки индексов i, k, ℓ и преобразующихся как ковариантный тензор третьего ранга и назвать скаляром A , связанный с вектором A^i , величину:

$$A = g_{ik\ell} A^i A^k A^\ell. \tag{1.19}$$

Если в качестве A^i взять наиболее естественный вектор dx^i , то соотношения (1.17)–(1.19), соответствующие различным вариантам теории, можно было бы записать в виде:

$$ds = g_i dx^i, \tag{1.20}$$

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \tag{1.21}$$

$$ds^3 = g_{ik\ell} dx^i dx^k dx^\ell, \tag{1.22}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Очевидно, что форма и содержание теории существенно зависит от того, какой из перечисленных вариантов взять за основу.

По причинам, выяснение которых в данном месте могло бы увести нас слишком далеко, из всех возможных способов образования скаляра из вектора наиболее содержательным с точки зрения математики и единственно приемлемым с точки зрения физики является способ, основанный на введении в теорию ковариантного тензора второго ранга g_{ik} .

Итак, будем рассматривать такой вариант теории, в котором задана система функций g_{ik} , симметричных относительно перестановки индексов i и k

$$g_{ik} = g_{ki}$$

и преобразующихся по тензорному закону

$$g_{ik} = \overline{c}_i^m \overline{c}_k^n \overline{g}_{mn}. \tag{1.23}$$

Эта совокупность функций g_{ik} называется метрическим тензором и состоит из $\frac{1}{2}n(n+1)$ произвольных функций, единственное ограничение на которые сводится к требованию, чтобы определитель $g_0 = |g_{ik}|$ был бы отличен от нуля.

Говорят, что величины g_{ik} определяют метрику пространства, арифметические свойства которого устанавливаются введённой системой координат x^i. Такие пространства называются римановыми многообразиями. Теория римановых многообразий называется римановой геометрией, основы которой заложены классическими работами Римана[5].

Если под ds^2 в формуле

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \tag{3.21}$$

понимать квадрат расстояния между двумя реальными физическими телами или квадрат интервала между двумя событиями, то метрический тензор g_{ik} может быть получен экспериментально путём измерения взаимных расстояний между достаточно большим числом близких тел в первом случае или путём измерения интервала между достаточно большим числом близких событий — во втором.

Подчеркнём, что в тензорном анализе метрический тензор g_{ik} предполагается заданным извне, точно так же как электромагнитное поле в механике. И так же как электродинамика позволяет найти электромагнитное поле по заданному распределению зарядов и токов, так тензор g_{ik} может быть найден в рамках общей теории относительности по заданному распределению масс.

1.5 Контравариантный тензор g^{ik}.

Зная метрический тензор g_{ik}, введём такой объект g^{ik}, что

$$g_{ik}g^{ik} = \delta_i^k. \tag{1.24}$$

Легко убедиться в том, что g^{ik} равен алгебраическому дополнению

$$\mathcal{G}^{\ell;k} = \frac{1}{(n-1)!}e^{\ell p\dots q}e^{ku\dots v}g_{pu}\dots g_{qv} \tag{1.25}$$

делённому на определитель

$$g_0 = \frac{1}{n!}e^{mp\dots q}e^{ru\dots v}g_{mr}g_{pn}\dots g_{qv}. \tag{1.26}$$

[5]Георг Фридрих Риман (1826–1866) — выдающийся немецкий математик. Родился в Брезеленце (провинция Ганновер), умер от туберкулёза в Италии. В Геттингенском университете слушал лекции Гаусса, многие идеи которого были развиты им позже. Там же сблизился с физиком Вебером, который пробудил в нём глубокий интерес к вопросам математического естествознания. Бернхард Риман положил начало новому направлению теории аналитических функций и широкому применению идей и методов математической физики, дал основные идеи топологии. Он рассматривал геометрию в весьма широком смысле как учение о непрерывных многообразиях. Введение римановых пространств, частным случаем которых является геометрия Эвклида и Лабочевского, раскрыло новые пути в развитии математики. Большое значение для физики 20-го века имел разработанный Риманом (1861) и его последователями аппарат теории дифференциальных квадратичных форм.

В самом деле образуя свёртку

$$g_{ik}\frac{\mathcal{G}^{\ell;k}}{g_0} = \frac{1}{(n-1)!g_0}e^{\ell p\ldots q}e^{ku\ldots v}g_{ik}g_{pu}\ldots g_{qv}$$

и замечая, что[6]

$$e^{\ell p\ldots q}e^{ku\ldots v}g_{ik}g_{pu}\ldots g_{qv} = (n-1)!g_0\delta^{\ell}_{i}, \tag{1.27}$$

получаем

$$g_{ik}\frac{\mathcal{G}^{\ell;k}}{g_0} = \delta^{\ell}_{i}. \tag{1.28}$$

Таким образом, действительно[7]

$$g^{ik} = \frac{\mathcal{G}^{i;k}}{g_0}. \tag{1.29}$$

Покажем теперь, что при переходе от старых координат x^i к новым $\overline{x}^k$ объект g^{ik} преобразуется как дважды контравариантный тензор.

Мы будем исходить из определения (1.24), справедливого в любой системе координат:

$$g_{ik}g^{\ell k} = \overline{g}_{ik}\overline{g}^{\ell k} = \delta^{\ell}_{i}. \tag{1.30}$$

Подставляя в (1.30)

$$g_{ik} - \overline{c}^{u}_{i}\overline{c}^{v}_{k}\overline{g}_{uv}$$

получим

$$\overline{c}^{u}_{i}\overline{c}^{v}_{k}\overline{g}_{uv}g^{\ell k} = \delta^{\ell}_{i}. \tag{1.31}$$

Умножая обе части равенства (1.31) на $\underline{c}^{i}_{r}$ и замечая, что

$$\underline{c}^{i}_{r}\overline{c}^{u}_{i} = \delta^{u}_{r}$$

будем иметь

$$\overline{c}^{v}_{k}\overline{g}_{rv}g^{\ell k} = \underline{c}^{\ell}_{r}. \tag{1.32}$$

[6]Соотношение (1.27) может быть легко получено, если равенство $e_{ip\ldots q}g_0 = e^{ku\ldots v}g_{ik}g_{pu}\ldots g_{qv}$ свернуть по $n-1$ индексам с $e^{\ell p\ldots q}$ и воспользоваться формулой $\delta^{\ell p\ldots q}_{ip\ldots q} = (n-1)!\delta^{\ell}_{i}$.

[7]Вообще говоря, из формулы (1.28) следует, что

$$g^{ik} = \frac{1}{g_0}\mathcal{G}^{\ell;k} + a^{ik}$$

где a^{ik} — произвольный антисимметрический объект, но накладывая на g^{ik} дополнительное требование симметрии относительно перестановки индексов i и k , получаем (1.29)

Умножим (1.32) на $\overline{g}^{rs}$. На основании (1.24) получим:

$$\overline{c}_k^s g^{\ell k} = \underline{c}_r^\ell \overline{g}^{rs}$$

откуда

$$g^{\ell k} = \underline{c}_r^\ell \underline{c}_s^k \overline{g}^{rs}. \tag{1.33}$$

Используя явное выражение $\mathcal{G}^{i;k}$ через составляющие симметрического тензора g_{ik} легко показать, что тензор g^{ik} симметричен, т. е.

$$g^{ik} = g^{ki}.$$

Обозначая определитель, построенный на g^{ik} , через g^0 на основании равенства (1.24) имеем:

$$g_0 g^0 = 1 \tag{1.34}$$

Используя законы преобразования

$$g_{ik} = \overline{c}_i^u \overline{c}_k^v \overline{g}_{uv}$$
$$g^{ik} = \underline{c}_u^i \underline{c}_v^k \overline{g}^{uv}$$

получаем следующие соотношения для определителей g_0 , g^0 и определителей $\overline{c}$ и $\overline{c}$ постоянных соответственно на $\underline{c}_u^i$ и $\overline{c}_i^u$:

$$g_0 = \overline{c}^2 \overline{g}_0, \tag{1.35}$$
$$g^0 = \underline{c}^2 \overline{g}^0. \tag{1.36}$$

1.6 Ко- и контравариантный тензоры Леви-Чивита.

Рассмотрим определители $\overline{c}$ и $\underline{c}$ построенные соответственно из $\overline{c}_i^u$ и $\underline{c}_u^i$. Имеем:

$$e_{ik\ldots\ell}\overline{c} = e_{mp\ldots q}\overline{c}_i^m \overline{c}_k^p \ldots \overline{c}_\ell^q, \tag{1.37}$$
$$e^{ik\ldots\ell}\underline{c} = e^{mp\ldots q}\underline{c}_m^i \underline{c}_p^k \ldots \underline{c}_q^\ell. \tag{1.38}$$

Воспользовавшись соотношением (1.34), (1.35) и (1.36) перепишем (1.37) и (1.38) в виде:

$$e_{ik\ldots\ell}\sqrt{g_0} = \overline{c}_i^m \overline{c}_k^p \ldots \overline{c}_\ell^q e_{mp\ldots q}\sqrt{\overline{g}_0}, \tag{1.39}$$
$$e^{ik\ldots\ell}\frac{1}{\sqrt{g_0}} = \underline{c}_m^i \underline{c}_p^k \ldots \underline{c}_q^\ell e^{mp\ldots q}\frac{1}{\sqrt{\overline{g}_0}} \tag{1.40}$$

откуда видно, что выражение

$$\varepsilon_{ik\ldots\ell} = e_{ik\ldots\ell}\sqrt{g_0}, \tag{1.41}$$

$$\varepsilon^{ik\ldots\ell} = e^{ik\ldots\ell}\frac{1}{\sqrt{g_0}} \tag{1.42}$$

преобразуются как ко- и контравариантные тензоры.

$\varepsilon_{ik\ldots\ell}$ и $\varepsilon^{ik\ldots\ell}$ называются ко- и контравариантными тензорами Леви-Чивита.

Довольно часто возникает необходимость по одному тензору построить другой. Это можно сделать, например, свёртывая данный тензор с ко- и контравариантными тензорами Леви-Чивита.

Тензор, полученный путём свёртки данного тензора с тензором Леви-Чивита по k выделенным индексам, называется тензором дуальным данному по k индексам[8].

В зависимости от конкретного выбора совокупности k индексов, по которым производится суммирование, из одного тензора можно получить несколько тензоров, дуальных данному.

Пусть, например, при $n=3$ исходный тензор является $a^{ik}_{\cdot\cdot p}$. В этом случае имеем, вообще говоря, три тензора, дуальных данному по одному индексу:

$$u^{mpi\ell} = \varepsilon^{mpk}a^{i\ell}_{\cdot\cdot k},$$
$$v_{mp\cdot k}^{\ \ \ \ell} = \varepsilon_{mpi}a^{i\ell}_{\cdot\cdot k},$$
$$w_{mp\cdot k}^{\ \ \ i} = \varepsilon_{mp\ell}a^{i\ell}_{\cdot\cdot k}$$

и один тензор дуальный данному по двум индексам

$$h_{mk} = \varepsilon_{mi\ell}a^{i\ell}_{\cdot\cdot k}.$$

1.7 Псевдотензор.

В предыдущем параграфе мы видели, что свёртка любого тензора с ко- или контравариантным тензором Леви-Чивита является тензором.

Рассмотрим теперь закон преобразования объектов, полученных в результате свёртки произвольного тензора с символом Леви-Чивита. Для этого умножим обе части равенства (1.38) на произвольный тензор $a_{u\ldots v}$ ранга k

$$a_{u\ldots v} = \overline{c}^{v}_{u}\ldots\overline{c}^{r}_{v}\overline{a}_{s\ldots r}$$

свернём по k индексам. Перенося $\underline{c} = \frac{1}{\overline{c}}$ в правую часть, будем иметь:

$$e^{i\ldots k\,u\ldots v}a_{u\ldots v} = \overline{c}\underline{c}^{i}_{m}\ldots\underline{c}^{k}_{p}\,\underline{c}^{u}_{q}\ldots\underline{c}^{v}_{t}\overline{c}^{s}_{u}\ldots\overline{c}^{r}_{v}e^{m\ldots pq}\overline{a}_{s\ldots r}$$

или после суммирования по $u\ldots v$

$$\tilde{a}^{i\ldots k} = \overline{c}\underline{c}^{i}_{m}\ldots\underline{c}^{k}_{p}\tilde{a}'^{\,m\ldots p} \tag{1.43}$$

[8] Если исходный тензор антисимметричный по всем k индексам, то при определении тензора, дуального данному, свёртка обычно делят на $k!$.

где[9].

$$\tilde{a}^{i\ldots k} = e^{i\ldots k\,u\ldots v} a_{u\ldots v} \tag{1.44}$$

$$\tilde{a}'^{m\ldots p} = e^{m\ldots p\,q\ldots t} \overline{a}_{q\ldots t} \tag{1.45}$$

Таким образом величина $\tilde{a}^{i\ldots k}$, полученная путём свёртки тензора $a_{u\ldots v}$ с символом Леви-Чивита $e^{i\ldots k\,u\ldots v}$, преобразуется по закону (1.43), отличающегося от обычного закона преобразования тензора наличием множителя $\overline{c}$.

Точно так же можно показать, что объект

$$\tilde{a}_{i\ldots k} = e_{i\ldots k\,u\ldots v} a^{u\ldots v}$$

преобразуется по закону

$$\tilde{a}_{i\ldots k} = (\overline{c})^{-1} \overline{c}_i^m \ldots \overline{c}_k^p \tilde{a}'_{m\ldots p}. \tag{1.46}$$

Объекты, преобразующиеся по закону (1.43) или (1.46), называются соответственно псевдотензорами[10] веса 1 или -1.

Вообще псевдотензором веса p называется объекты, преобразующиеся при переходе от одной системы координат к другой, по закону

$$\tilde{A}_{i\ldots k}{}^{\ell\ldots r} = (\overline{c})^p \overline{c}_i^u \ldots \overline{c}_k^v \underline{c}_s^\ell \ldots \underline{c}_t^r \tilde{A}'_{u\ldots v}{}^{s\ldots t}. \tag{1.47}$$

Так символы Леви-Чивита $e^{i\ldots k}$ и $e_{i\ldots k}$ являются, соответственно, псевдотензорами веса 1 и -1, определители g_0 и g^0 псевдоскалярами веса 2 и (-2) (определитель g является скаляром) а $\mathcal{G}^{i;k}$ — псевдотензором веса 2.

Легко видеть, что произведение двух псевдовекторов веса p и q является псевдотензором веса $p+q$.

[9] Чтобы сделать обозначения менее громоздкими мы вместо $\overline{\tilde{a}}$ пишем $\tilde{a}'$.

[10] Иногда псевдотензор веса p называют тензорной плотностью веса p.

Глава 1

Тензорный анализ.

Не следует недооценивать преимуществ, которые можно получить применением хорошо приспособленного для дальнейших исследований формализма, который, если можно так выразиться, опережает нашу мысль.

— Феликс Клейн[1]

1.1 Ковариантное дифференцирование.

Преимущества тензорного анализа прежде всего в возможности записывать уравнения в инвариантной форме, не зависящей от выбора системы координат. Поэтому при изложении тензорного анализа следует с самого начала определить операцию, обладающую с одной стороны всеми основными свойствами частной производной, а с другой — сохраняющей тензорный характер.

Пусть φ — скалярная функция x^i, т. е.

$$\varphi(x^i) = \overline{\varphi}(\overline{x}^i). \tag{1.1}$$

Покажем, что $\varphi_{,i} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ является ковариантным вектором. В самом деле, дифференцируя (1.1) по x^i, имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \overline{x}^k} \cdot \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}$$

или

$$\varphi_{,i} = \overline{c}_i^k \overline{\varphi}_{,k} \tag{1.2}$$

Итак мы видим, что $\varphi_{,i} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ называется ковариантным градиентом скалярной функции φ, действительно преобразуется как ковариантный вектор.

Покажем теперь, что это единственный случай, когда в общей системе криволинейных координат частная производная от тензора является тензором.

Пусть A_i ковариантный вектор, т. е.

$$A_i(x) = \overline{c}_i^m \overline{A}_m(x). \tag{1.3}$$

Легко убедиться в том, что производная $\dfrac{\partial A_i}{\partial x^k}$ **не является** тензором.

В самом деле, дифференцируя (1.3) по x^k и замечая, что

$$\overline{c}_i^m = \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial \overline{x}^i}$$

получаем

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \overline{c}_i^m \overline{c}_k^n \frac{\partial \overline{A}_m}{\partial \overline{x}^n} + \frac{\partial^2 \overline{x}^m}{\partial x^i \partial x^k} \overline{A}_m. \tag{1.4}$$

Наличие второго слагаемого в (1.4) как раз и указывает на не тензорный характер преобразования производной $\dfrac{\partial A_i}{\partial x^k}$.

Покажем, что из $\dfrac{\partial A_i}{\partial x^k}$ можно получить дважды ковариантный тензор, если добавить к нему некоторое слагаемое вида $-\Gamma_{ik}^m A_m$, где

$$\Gamma_{ik}^m = g^{mn} \Gamma_{n,ik}, \tag{1.5}$$

$$\Gamma_{n,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ni}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n}\right). \tag{1.6}$$

Для этого выразим $\dfrac{\partial^2 \overline{x}^m}{\partial x^i \partial x^k}$ в соотношении (1.4) через $\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^\ell}$, g_{ik} и $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell}$.

Дифференцируя формулу преобразования метрического тензора

$$g_{ik} = \overline{c}_i^m \overline{c}_k^n \overline{g}_{mn} = \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^k} \overline{g}_{mn}$$

по x^ℓ , получим систему линейных неоднородных уравнений относительно неизвестных $\dfrac{\partial^2 \overline{x}^n}{\partial x^u \partial x^v}$:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell} = \frac{\partial^2 \overline{x}^m}{\partial x^i \partial x^\ell} \overline{c}_k^n \overline{g}_{mn} + \overline{c}_i^m \frac{\partial^2 \overline{x}^n}{\partial x^k \partial x^\ell} \overline{g}_{mn} + \overline{c}_i^r \overline{c}_k^s \overline{c}_\ell^q \frac{\partial \overline{g}_{rs}}{\partial \overline{x}^q}. \tag{1.7}$$

Чтобы выразить вторые производные $\dfrac{\partial^2 \overline{x}^n}{\partial x^u \partial x^v}$ через первые $\dfrac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^k} = \overline{c}_k^n$ в явном виде, воспользуемся системы (1.7) и осуществим циклическую перестановку индексов i, k, ℓ и r, s, q :

$$\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \overline{x}^m}{\partial x^\ell \partial x^k} \overline{c}_i^n \overline{g}_{mn} + \overline{c}_\ell^m \frac{\partial^2 \overline{x}^n}{\partial x^i \partial x^k} \overline{g}_{mn} + \overline{c}_i^r \overline{c}_k^s \overline{c}_\ell^q \frac{\partial \overline{g}_{qr}}{\partial \overline{x}^s}. \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 \overline{x}^m}{\partial x^k \partial x^i} \overline{c}_\ell^n \overline{g}_{mn} + \overline{c}_k^m \frac{\partial^2 \overline{x}^n}{\partial x^\ell \partial x^i} \overline{g}_{mn} + \overline{c}_i^r \overline{c}_k^s \overline{c}_\ell^q \frac{\partial \overline{g}_{sq}}{\partial \overline{x}^r}. \tag{1.9}$$

Если теперь из суммы (1.7) и (1.8) вычесть (1.9), то в результате получим:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell}+\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial^2\overline{x}^n}{\partial x^k\partial x^\ell}\overline{g}_{mn}\overline{c}_i^m+ \\ +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{g}_{rs}}{\partial\overline{x}^q}+\frac{\partial\overline{g}_{rq}}{\partial\overline{x}^s}+\frac{\partial\overline{g}_{sq}}{\partial\overline{x}^r}\right)\overline{c}_i^r\overline{c}_k^s\overline{c}_\ell^q. \quad (1.10)$$

Вводя обозначения (1.5) и (1.6) и умножая обе части равенства (1.10) на

$$g^{in}\overline{c}_n^r=\overline{g}^{rn}\underline{c}_n^i$$

будем иметь

$$\frac{\partial^2\overline{x}^r}{\partial x^k\partial x^\ell}=\Gamma^u_{k\ell}\overline{c}_u^r-\overline{\Gamma}^r_{sq}\overline{c}_k^s\overline{c}_\ell^q. \quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) в (1.4) получаем окончательное выражение

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\Gamma^n_{ik}A_n=\overline{c}_i^p\overline{c}_k^q\left(\frac{\partial\overline{A}_p}{\partial\overline{x}^q}-\Gamma^r_{pq}\overline{A}_t\right). \quad (1.12)$$

Итак мы видим, что комбинация

$$A_{i,k}=\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\Gamma^n_{ik}A_n \quad (1.13)$$

называемая ковариантной производной[2] ковариантного вектора A_i действительно преобразуется как дважды ковариантный тензор. Трёхиндексные символы $\Gamma_{i,k\ell}$ и $\Gamma^i_{k\ell}$ определяемые равенствами (1.5) и (1.6) называются символами Кристоффеля[3] соответственно первого и второго рода[4].

Процесс образования ковариантной производной называется ковариантным дифференцированием и обозначается с помощью запятой, поставленной перед новым индексом, возникающим в результате ковариантного дифференцирования. Общие свойства ковариантных производных мы рассмотрим ниже, а сейчас посмотрим, как выглядит ковариантная производная контравариантного вектора A^i .

---

[2]Ковариантная производная определена Риччи в работе "О ковариантном и контравариантном дифференцировании" (1888), в которой было введено и общее понятие тензора.

[3]Элвин Бруно Кристофель — немецкий геометр, родился в Монтуа (на Рейне) в 1829 г., умер в Страсбурге в 1900 г. Был профессором в политехнической школе в Цюрихе, в Берлинской промышленной академии и в Страсбургском университете. Прямой учение Дирихле, а в широком смысле — и Римана, он дал ряд замечательных исследований в области алгебраических и абелевых функций, уравнений в частных производных и дифференциальной геометрии.

[4]Символы Кристоффеля для поверхностей трёхмерного пространства были введены Кристофелем в работе "О преобразовании однородных дифференциальных выражений второй степени" (1869). Сам Кристофель обозначал величины Γ^ℓ_{ik} символами $\left\{ {ik \atop \ell} \right\}$ а величины $g_{ik}\Gamma^\ell_{mk}$ символами $\left[{mk \atop i} \right]$, которые поэтому назывались символами Кристоффеля, соответственно, первого и второго рода.

Для этого возьмём произвольный ковариантный вектор X_i и построим скаляр

$$\varphi = A^i X_i.$$

Образуем градиент $\varphi_{,k}$, который, как было показано выше, есть ковариантный вектор:

$$\varphi_{,k} = \frac{\partial}{\partial x^k}(A^i X_i) = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} X_i + A^i \frac{\partial X_i}{\partial x^k}. \tag{1.14}$$

Но согласно (1.13)

$$\frac{\partial X_i}{\partial x^k} = X_{i,k} + \Gamma^n_{ik} X_n.$$

Таким образом

$$\varphi_{,k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} X_i + A^i X_{i,k} + \Gamma^n_{ik} A^i X_n$$

или переобозначая соответствующие новые индексы

$$\varphi_{,k} - A^m X_{m,k} = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{nk} A^n \right) X_i.$$

Но так как $\varphi_{,k}$, $A^m X_{m,k}$ и X_i — векторы, то комбинация

$$A^i_{,k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{nk} A^n \tag{1.15}$$

называемая ковариантной производной контравариантного вектора является смешанным тензором, контравариантным по i и ковариантным по k.

Чтобы получить выражение для ковариантной производной произвольного тензора (например $T_{ik\cdot}^{\ \ \ \ell}$) нужно построить скаляр вида

$$\varphi = T_{ik\cdot}^{\ \ \ \ell} X^i Y^k Z_\ell$$

и повторить только что описанную процедуру.

Таким образом для ковариантных производных тензоров второго ранга получаем следующие выражения

$$T_{ik,\ell} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^\ell} - \Gamma^n_{ik} T_{nk} - \Gamma^n_{k\ell} T_{in}, \tag{1.16}$$

$$T^i_{\cdot k,\ell} = \frac{\partial T^i_{\cdot k}}{\partial x^\ell} - \Gamma^i_{n\ell} T^n_{\cdot k} - \Gamma^n_{k\ell} T^i_{\cdot n}, \tag{1.17}$$

$$T^{ik}{}_{,\ell} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^\ell} - \Gamma^i_{n\ell} T^{nk} + \Gamma^k_{n\ell} T^{in}, \tag{1.18}$$

Общая схема, по которой образуется ковариантная производная произвольного тензора имеет вид:

$$T^{**}_{**,\ell} = \frac{\partial T^{**}_{**}}{\partial x^\ell} + \Gamma^*_{n\ell} T^{n*}_{**} + \Gamma^*_{n\ell} T^{*n}_{**} - \Gamma^n_{*\ell} T^{**}_{n*} - \Gamma^n_{*\ell} T^{**}_{*n}. \tag{1.19}$$

1.2 Абсолютная производная.

Пусть вектор A_i является функцией параметра t. Покажем, что производная $\dfrac{dA_i}{dt}$ *не является* вектором. В самом деле,

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^k, \tag{1.20}$$

где

$$u^k = \frac{dx^k}{dt}.$$

Но u^k — вектор, так как dx^k — вектор, а $\dfrac{\partial A^i}{\partial x^k}$ не тензор, и следовательно $\dfrac{dA_i}{dt}$ не является вектором.

Чтобы построить производную по t обладающую векторным законом преобразования, выразим $\dfrac{\partial A^i}{\partial x^k}$ с помощью (1.15) через ковариантную производную $A_{i,k}$. Получим

$$\frac{dA_i}{dt} = (A_{i,k} + \Gamma^n_{ik} A_n) u^k$$

или

$$\frac{dA_i}{dt} - \Gamma^n_{ik} A_n u^k = A_{i,k} u^k.$$

Здесь A_{ik} — тензор, u^k — вектор, следовательно комбинация

$$\frac{\hat{d}A_i}{dt} = A_{i,k} u^k = \frac{dA_i}{dt} - \Gamma^n_{ik} A_n u^k \tag{1.21}$$

называется абсолютной производной ковариантного вектора, подчиняется векторному закону преобразования.

Общая схема, по которой образуется абсолютная производная произвольного тензора имеет вид

$$\frac{\hat{d}T_{(\cdots)}}{dt} = T_{(\cdots),k} u^k. \tag{1.22}$$

1.3 Символы Кристоффеля.

Рассмотрим несколько важных свойств символов Кристоффеля, определяемых равенствами

$$\Gamma_{i,k\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^i}\right) \tag{1.6}$$

$$\Gamma^i_{k\ell} = g^{in}\Gamma_{n,k\ell} \tag{1.5}$$

1. Символы Кристоффеля $\Gamma_{i,k\ell}$ и $\Gamma^i_{k\ell}$ не являются тензорами.

Согласно (1.11) законы преобразования $\Gamma_{i,k\ell}$ и $\Gamma^i_{k\ell}$ имеют вид:

$$\Gamma_{i,k\ell} = \overline{c}_i^m \overline{c}_k^n \overline{c}_\ell^q \overline{\Gamma}_{m,nq} + \frac{\partial^2 \overline{x}^p}{\partial x^k \partial x^\ell} \cdot \frac{\partial \overline{x}_p}{\partial x^i}, \tag{1.23}$$

$$\Gamma^i_{k\ell} = \underline{c}^i_m \overline{c}_k^n \overline{c}_\ell^q \overline{\Gamma}^m_{nq} + \frac{\partial^2 \overline{x}^p}{\partial x^k \partial x^\ell} \cdot \frac{\partial \overline{x}_p}{\partial x^i}, \tag{1.24}$$

где

$$\frac{\partial \overline{x}_p}{\partial x^i} = \overline{g}_{pq} \frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^i}$$

2. Символы Кристоффеля $\Gamma_{i,k\ell}$ и $\Gamma^i_{k\ell}$ симметричны относительно индексов k и ℓ

$$\Gamma_{i,k\ell} = \Gamma_{i,\ell k},$$
$$\Gamma^i_{k\ell} = \Gamma^i_{\ell k}.$$

3. Частная производная метрического тензора может быть явно выражена через $\Gamma_{i,k\ell}$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell} = \Gamma_{i,k\ell} + \Gamma_{k,i\ell}. \tag{1.25}$$

4. Свёртки символов Кристоффеля с метрическим тензором могут быть записаны в виде следующих выражений

$$\Gamma^i_{mn} g^{mn} = -\frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial}{\partial x^n} (\sqrt{g_0} g^{in}), \tag{1.26}$$

$$\Gamma_{i,mn} g^{mn} = -\frac{g_{im}}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial}{\partial x^n} (\sqrt{g_0} g^{in}), \tag{1.27}$$

$$\Gamma_{m,ni} g^{mn} = \Phi^n_{ni} = \frac{1}{\sqrt{g_0}} \cdot \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial x^i}. \tag{1.28}$$

Равенство (1.26) доказывается следующим образом:
Имеем

$$\Gamma^i_{mn} g^{mn} = \frac{g^{ik}}{2} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} \right) g^{mn}. \tag{1.29}$$

Но так как

$$g^{ik} g_{km} = \delta^i_m,$$

то

$$g^{ik} \frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} = -g_{km} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^n}$$

и следовательно

$$g^{mn} \cdot \frac{g^{ik}}{2} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^m} \right) = -\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k}.$$

Третье слагаемое в (1.29) преобразуем с помощью соотношения

$$g_0 g^{mn} = \frac{\partial g_0}{\partial g_{mn}} \tag{1.30}$$

которое получается на основании (**??**) и (**??**).
Имеем:

$$g^{mn}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} = \frac{1}{g_0}\frac{\partial g_0}{\partial g_{mn}}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} = \frac{1}{g_0}\cdot\frac{\partial g_0}{\partial x^k} = \frac{2}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial\sqrt{g_0}}{\partial x^k}$$

откуда

$$\Gamma^i_{mn}g^{mn} = -\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k} - \frac{g^{ik}}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial\sqrt{g_0}}{\partial x^k} = -\frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g_0}g^{ik}).$$

Что касается выражения (1.27), то оно получается из (1.26) простым опусканием индекса.

Переходим к доказательству равенства (1.28).
Имеем:

$$\Gamma^n_{ni} = \frac{g^{mn}}{2}\left(\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{ni}}{\partial x^m}\right) = \frac{g_{mn}}{2}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^i}$$

так как

$$g^{mn}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{ni}}{\partial x^m}\right) = 0.$$

Но выше было доказано, что

$$\frac{1}{2}g^{mn}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial\sqrt{g_0}}{\partial x^i}.$$

Таким образом получаем окончательно

$$\Gamma^n_{ni} = \frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial\sqrt{g_0}}{\partial x^i}. \tag{1.28}$$

Итак, мы показали, как зная метрический тензор g_{ik} построить ковариантную производную. При этом оказалось, что для построения ковариантной производных тензоров любого ранга и строения достаточно иметь лишь символы Кристоффеля $\Gamma^i_{k\ell}$. В связи с этим возникает возможность рассмотрения пространств существенно новой природы, в которых нет понятия метрического тензора g_{ik}, а следовательно и расстояния, а вместо g_{ik} задано поле коэффициентов аффинной связности $\gamma^i_{k\ell}$, играющих при определении ковариантной производной ту же самую роль что и символы Кристоффеля $\Gamma^i_{k\ell}$. При этом символы $\gamma^i_{k\ell}$, вообще говоря, не предполагаются симметричными относительно индексов k и ℓ и определяются как числа, преобразующиеся при переходе от одной системы координат к другой по закону (1.24).

Такие пространства, в которых задано поле $\gamma^i_{k\ell}$ называются пространствами аффинной связности[5] (L_n — с кручением, если тензор кручения $S^i_{k\ell} = \gamma^i_{k\ell} - \gamma^i_{\ell k} \neq 0$ и A_n — без кручения, если $S^i_{k\ell} = 0$).

[5] Частный случай пространства аффинной связности, не являющегося римановым пространством, введён в связи в выдвинутой общей теорией относительности задачей построения единой

1.4 Общие свойства ковариантной производной.

Прежде всего заметим, что для ковариантных производных применимы те же правила, что и в обычном дифференциальном исчислении[6]:

1. Если[7]
$$C_{(\dots)} = A_{(\dots)} + B_{(\dots)},$$
то
$$C_{(\dots),i} = A_{(\dots),i} + B_{(\dots),i}.$$
2. Если
$$C_{(\dots)} = A_{(\dots)} \cdot B_{(\dots)},$$
то
$$C_{(\dots),i} = A_{(\dots),i} B_{(\dots)} + A_{(\dots)} B_{(\dots),i}.$$

Однако, в отличии от обычных производных ковариантные производные ко- и контравариантных метрических тензоров g_{ik} и g^{ik} тождественно равны нулю (теорема Риччи).

В самом деле

$$g_{ik,\ell} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell} - \Gamma^n_{i\ell} g_{nk} - \Gamma^n_{k\ell} g_{in} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell} - \Gamma_{k,i\ell} - \Gamma_{i,k\ell}.$$

Но согласно (1.25)

$$\Gamma_{k,i\ell} + \Gamma_{i,k\ell} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell},$$

следовательно

$$g_{ik,\ell} = 0. \tag{1.31}$$

Чтобы доказать подобное равенство для тензора g^{km}, покажем, что ковариантная производная символа Кронекера первого порядка тождественно равна нулю. В самом деле:

$$\delta^k_{i,\ell} = \frac{\partial \delta^k_i}{\partial x^\ell} + \Gamma^k_{n\ell} \delta^n_i - \Gamma^n_{i\ell} \delta^k_n = \frac{\partial \delta^k_i}{\partial x^\ell} + \Gamma^k_{i\ell} - \Gamma^k_{i\ell} = \frac{\partial \delta^k_i}{\partial x^\ell} = 0.$$

Итак, ковариантная производная левой части равенства

$$g_{im} g^{km} = \delta^k_i$$

теории электромагнитного и гравитационного поля немецким математиком Германом Вейлем в книге “Пространство, время, материя” (1918). Пространство аффинной связности общего вида было введено в связи с той же задачей французским математиком Эли Картаном (1869–1951) в работе “Пространство аффинной связности и обобщённая теория относительности” (1923).

[6]Термин “дифференциал” (от латинского слова differentia — “разность” введён немецким математиком и философом Лейбницем (1646–1716), термин “производная” введён французским математиком и механиком Лагранжем (1736–1813).

[7]см. сноску на стр.??

должна быть равной нулю. Следовательно

$$g_{im,\ell}g^{km} + g_{im}g^{km}{}_{,\ell} = g_{im}g^{km}{}_{,\ell} = 0,$$

откуда

$$g^{km}{}_{,\ell} = 0. \tag{1.32}$$

Можно показать также, что ковариантная производная ко- и контравариантного тензоров Леви-Чивита тождественно равна нулю, т. е.

$$\varepsilon^{ik\ldots m}{}_{,\ell} = 0 \tag{1.33}$$

и

$$\varepsilon_{ik\ldots m,\ell} = 0 \tag{1.34}$$

1.5 Тензоры, порождённые производными первого порядка.

Используя операцию ковариантного дифференцирования, рассмотрим следующие тензоры, полученные из ко- контравариантных тензоров $T_{i\ldots k\ell}$ и $T^{i\ldots k\ell}$ ранга m :

$$\mathcal{G}_{\underbrace{i\ldots\ell p}_{m+1}} = T_{\underbrace{i\ldots\ell}_{m},p}\,, \tag{1.35}$$

$$\mathcal{D}^{\overbrace{i\ldots k}^{m-1}} = T^{\overbrace{i\ldots k\ell}^{m}}{}_{,\ell}\,, \tag{1.36}$$

$$\mathcal{P}_{\underbrace{p\ldots qr}_{m+1}} = \frac{1}{m!}\delta^{i\ldots k\ell}_{p\ldots qr}T_{\underbrace{i\ldots k}_{m},\ell}\,, \tag{1.37}$$

$$\mathcal{R}^{\overbrace{u\ldots v}^{n-m-1}} = \frac{1}{m!}\mathcal{E}\varepsilon^{\overbrace{u\ldots v}^{n-m-1}\,\overbrace{i\ldots k\ell}^{m+1}}T_{\underbrace{i\ldots k}_{m},\ell}\,, \tag{1.38}$$

где $\varepsilon^{u\ldots v\,i\ldots k\ell}$ — контравариантный тензор Леви-Чивита (??).

1. Градиент скалярной функции.

Если в (1.35) вместо $T_{i\dots\ell}$ взять скалярную функцию φ, то получим ковариантный вектор

$$\mathcal{G}_i = \varphi_{,i}$$

которая называется градиентом скалярной функции φ.

Согласно (1.2) градиент $\varphi_{,i}$ просто равен частной производной, т. е.

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}. \tag{1.39}$$

2. Дивергенция.

Если в (1.36) вместо $T^{i\dots k\ell}$ взять вектор A^i или антисимметричный тензор $A^{i\dots k\ell}$, то получим, соответственно, скаляр

$$\mathcal{D} = A^{\ell}{}_{,\ell}$$

и антисимметрический тензор

$$\mathcal{D}^{i\dots k} = A^{i\dots k\ell}{}_{,\ell}$$

которые называют дивергенцией вектора и дивергенцией антисимметрического тензора.

Покажем, что $A^{i\dots k\ell}{}_{,\ell}$ простым образом выражается через частные производные

$$A^{i\dots k\ell}{}_{,\ell} = \frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial}{\partial x^\ell}(\sqrt{g_0} A^{i\dots k\ell}). \tag{1.40}$$

Действительно, по общему правилу (1.19) имеем:

$$A^{i\dots k\ell}{}_{,\ell} = \frac{\partial A^{i\dots k\ell}}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{n\ell} A^{n\dots k\ell} + \ldots + \Gamma^k_{n\ell} A^{i\dots n\ell} + \Gamma^\ell_{n\ell} A^{i\dots kn}.$$

Так как символы Кристоффеля $\Gamma^i_{n\ell}$ симметричны по нижним индексам, то все слагаемые, содержащие $\Gamma^i_{n\ell}$, за исключением последнего, обращаются в нуль при свёртывании с антисимметричным тензором $A^{n\dots k\ell}$. Таким образом

$$A^{i\dots k\ell}{}_{,\ell} = \frac{\partial A^{i\dots k\ell}}{\partial x^\ell} + \Gamma^\ell_{n\ell} A^{i\dots kn}.$$

Но согласно (1.28)

$$\Gamma^\ell_{n\ell} = \frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial x^n};$$

следовательно

$$A^{i\dots k\ell}{}_{,\ell} = \frac{\partial A^{i\dots k\ell}}{\partial x^\ell} + \frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial x^n} A^{i\dots kn} = \frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial}{\partial x^\ell}(\sqrt{g_0} A^{i\dots k\ell}).$$

3. Тензор Стокса – Пуанкаре.

Тензор Стокса[8] – Пуанкаре называется тензор, определяемый соотношением (1.37).

Покажем, что

$$\mathcal{P}_{rp\ldots q} = \frac{1}{m!}\delta^{\ell i\ldots k}_{rp\ldots q}\frac{\partial T_{i\ldots k}}{\partial x^\ell}. \tag{1.41}$$

Имеем:

$$\delta^{\ell i\ldots k}_{rp\ldots q}T_{i\ldots k,\ell} = \delta^{\ell i\ldots k}_{rp\ldots q}\left(\frac{\partial T_{i\ldots k}}{\partial x^\ell} - \Gamma^n_{i\ell}T_{n\ldots k} - \ldots - \Gamma^n_{k\ell}T_{i\ldots n}\right).$$

Но так как свёртка антисимметричного символа Кронекера с симметричным символом Кристоффеля равна нулю, то

$$\delta^{\ell i\ldots k}_{rp\ldots q}T_{i\ldots k\ell} = \delta^{\ell i\ldots k}_{rp\ldots q}\frac{\partial T_{i\ldots k}}{\partial x^\ell}$$

и следовательно имеет место (1.41).

Если вместо произвольного $T_{i\ldots K}$ взять антисимметричный тензор $A_{i\ldots k}$, то при $m=2,3$ тензор Стокса–Пуанкаре имеет, соответственно, вид:

$$\mathcal{P}_{\ell ik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial A_{k\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial A_{\ell i}}{\partial x^k},$$

$$\mathcal{P}_{mik\ell} = \frac{\partial A_{ik\ell}}{\partial x^m} - \frac{\partial A_{k\ell m}}{\partial x^i} + \frac{\partial A_{\ell mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial A_{mik}}{\partial x^\ell}.$$

4. Ротор.

Если в (1.38) вместо $T\underbrace{{}_{i\ldots k}}_{m}$ взять антисимметричный тензор $A\underbrace{{}_{i\ldots k}}_{n-2}$ ранга $n-2$, то получим контравариантный вектор:

$$\mathcal{R}^n = \frac{1}{(n-2)!}\varepsilon^{n\ell i\ldots k}A_{i\ldots k,\ell} \tag{1.42}$$

который называется ротором антисимметричного тензора $A_{i\ldots k}$ ранга $n-2$.

Легко показать, что

$$\mathcal{R}^n = \frac{1}{(n-1)!}\frac{e^{u\ell i\ldots k}}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial A_{i\ldots k}}{\partial x^\ell}. \tag{1.43}$$

[8]Джорж Габриель Стокс (1819–1903) — английский физик и математик, член Лондонского королевского общества. Труды Стокса охватывают различные вопросы оптики, гидродинамики и математической физики. Среди гидродинамических работ наибольшее значение имеют труды по движению вязкой жидкости (уравнение Навье–Стокса). Им сформулирован закон Стокса, определяющий силу сопротивления, испытываемую твёрдым шаром при движении в вязкой среде. Стокс был автором ряда крупных математических исследований. Именем Стокса названа единица кинематической вязкости.

Ротор $\mathcal{R}^n$ связан с тензором Стокса–Пуанкаре ранга $n=1$ следующим образом:

$$\mathcal{R}^n = \frac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{u\ell i\ldots k}\mathcal{P}_{\underbrace{\ell i\ldots k}_{n-1}} \tag{1.44}$$

В самом деле, имеем:

$$\mathcal{R}^n = \frac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{u\ell i\ldots k}\mathcal{P}_{\ell i\ldots k} = \frac{1}{(n-1)!}\frac{e^{u\ell i\ldots k}}{\sqrt{g_0}}\cdot\frac{1}{(n-2)!}\delta^{rp\ldots q}_{\ell i\ldots k}A_{\underbrace{p\ldots q}_{n-2},r}$$

Но

$$e^{u\ell i\ldots k}\delta^{\,rp\ldots q}_{\underbrace{\ell i\ldots k}_{n-1}} = (n-1)!e^{urp\ldots q}$$

следовательно

$$\mathcal{R}^n = \frac{1}{(n-2)!}\frac{e^{urp\ldots q}}{\sqrt{g_0}}A_{\underbrace{p\ldots q}_{n-2},r}$$

что и требовалось доказать.

1.6 Ковариантная производная второго порядка.

Рассмотрим вторую ковариантную производную скалярной функции φ и свернём её с метрическим тензором g^{ik}

$$\Delta\varphi = g^{ik}\varphi_{,ik}. \tag{1.45}$$

Полученный дифференциальный оператор второго порядка называется оператором Лапласа.

Покажем, что $\ldots\varphi$ может быть простым образом выражен через обычные производные. Имеем:

$$\Delta\varphi = g^{ik}(\varphi_{,i})_{,k} = g^{ik}\left(\frac{\partial\varphi_{,i}}{\partial x^k} - \Gamma^n_{ik}\varphi_{,n}\right).$$

Но согласно (1.26)

$$g^{ik}\Gamma^n_{ik} = -\frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial}{\partial x^m}(\sqrt{g_0}g^{mn})$$

и следовательно

$$\Delta\varphi = g^{ik}\frac{\partial\varphi_{,i}}{\partial x^k} + \frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g_0}g^{ik})\varphi_{,i}$$

или

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g_0}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right). \tag{1.46}$$

Легко видеть, что вторая ковариантная производная скалярной функции не зависит от порядка дифференцирования, т. е.

$$\varphi_{,ik} = \varphi_{,ki}.$$

Однако для тензора произвольного ранга это утверждение, вообще говоря, не имеет место, т. е.

$$A_{(\dots),ik} \neq A_{(\dots),ki}.$$

В связи с этим имеет смысл говорить о симметрированной и альтернированной производных

$$A_{(\dots),(ik)} = \frac{1}{2}(A_{(\dots),ik} + A_{(\dots),ki})$$

и

$$A_{(\dots),[ik]} = \frac{1}{2}(A_{(\dots).ik} - A_{(\dots),ki}).$$

Применяя дважды операцию ковариантного дифференцирования к произвольному ковариантному вектору A_i , получаем:

$$A_{i,mn} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^m \partial x^n} - (\Gamma^k_{im}\delta^\ell_n + \Gamma^k_{in}\delta^\ell_m + \Gamma^\ell_{mn}\delta^k_i)\frac{\partial A_k}{\partial x^\ell} - \\ - \left(\frac{\partial \Gamma^k_{im}}{\partial x^n} - \Gamma^k_{ip}\Gamma^p_{mn} - \Gamma^k_{mp}\Gamma^p_{in}\right) A_k. \quad (1.47)$$

или

$$A_{i,(mn)} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^m \partial x^n} - (\Gamma^k_{im}\delta^\ell_n + \Gamma^k_{in}\delta^\ell_m + \Gamma^\ell_{mp}\delta^k_i)\frac{\partial A_k}{\partial x^\ell} + \\ + \left[\Gamma^k_{ip}\Gamma^p_{mn} + \frac{1}{2}(\Gamma^k_{mp}\Gamma^p_{in} + \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{im}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^k_{im}}{\partial x^n} + \frac{\partial \Gamma^k_{in}}{\partial x^m}\right)\right] A_k \quad (1.48)$$

и

$$A_{i,mn} - A_{i,nm} = \left(\frac{\partial \Gamma^k_{in}}{\partial X^m} - \frac{\partial \Gamma^k_{im}}{\partial x^n} + \Gamma^k_{mp}\Gamma^k_{in} - \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{im}\right) A_k. \quad (1.49)$$

Итак, мы видим, что симметризованная производная $A_{i,(mn)}$ равна обычной производной второго порядка $\dfrac{\partial^2 A_i}{\partial x^m \partial x^n}$ дополненной членами пропорциональными первой производной $\dfrac{\partial A_k}{\partial x^\ell}$ и самому вектору A_k . При этом коэффициенты пропорциональности оказываются зависящими только от символов Кристоффеля Γ^k_{im} и их производных и обращаются в нуль в декартовой системе координат, где $\Gamma^k_{im} \equiv 0$.

Что же касается альтернированной производной $A_{i,[mn]}$ или разности $A_{i,mn} - A_{i,nm}$, то она оказывается пропорциональной только A_k . Легко сообразить, что коэффициент перед A_k является тензором (так как $A_{i,mn}$, $A_{i,nm}$ и A_k — тензоры) четвёртого ранга. Этот тензор обращается в нуль в декартовой системе координат. Но поскольку он тензор, то он равен нулю в любой системе криволинейных координат, вводимых в евклидовом пространстве. И только в римановом пространстве, где нельзя ввести декартову систему координат, разность $A_{i,mn} - A_{i,nm}$ оказывается отличной от нуля.

Если вместо ковариантного вектора A_i взять тензор произвольного ранга и строения A^{**}_{**} то общая схема нахождения разности производных второго порядка имеет вид:

$$A^{**}_{**,mn} - A^{**}_{**,nm} = \mathcal{R}^p{}_{*mn} A^{**}_{p*} + \mathcal{R}^p{}_{*mn} A^{**}_{*p} + \ldots$$
$$- \mathcal{R}^*{}_{pmn} A^{p*}_{**} - \mathcal{R}^*{}_{pmn} A^{*p}_{**} - \ldots \quad (1.50)$$

где

$$\mathcal{R}^p{}_{imn} = \frac{\partial \Gamma^p_{in}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^p_{im}}{\partial x^n} + \Gamma^p_{mq}\Gamma^q_{in} - \Gamma^p_{nq}\Gamma^q_{im}.$$

Соотношение (1.50) было получено Риччи в 1901 году и называется "тождеством Риччи".

1.7 Тензор кривизны.

Тензор четвёртого ранга

$$\mathcal{R}^i_{\cdot kmn} = \frac{\partial \Gamma^i_{kn}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^n} + \Gamma^i_{mp}\Gamma^p_{kn} - \Gamma^i_{np}\Gamma^p_{km} \quad (1.51)$$

возникающий при рассмотрении разности ковариантных производных второго порядка (1.50) называется тензором кривизны[9] или тензором Римана–Кристоффеля и является важной характеристикой риманова пространства.

Наряду с тензором $\mathcal{R}^i{}_{kmn}$ часто используется полностью ковариантный тензор кривизны

$$\mathcal{R}_{ikmn} = g_{ip}\mathcal{R}^p{}_{kmn}. \quad (1.52)$$

[9]Тензор кривизны по существу был введён в работе Римана "О гипотезах, лежащих в основании геометрии" (1854) и вычислен им в "Ответе на вопрос, предложенный Парижской Академии" (1861) где показал, что необходимым и достаточным условием возможности приведения квадратичной формы $g_{ik}dx^i dx^k$ к сумме квадратов является обращение в нуль всех составляющих тензора $\mathcal{R}_{ik\ell m}$. Составляющие тензор кривизны были также получены Кристофелем в работе "О преобразовании однородных дифференциальных выражений второй степени" (1869), вследствии чего тензор кривизны часто называют тензором Римана–Кристоффеля. Сам Риман обозначал тензор кривизны $\mathcal{R}_{imkn}$ символом (ik, mn) .

Тензорный закон преобразований $\mathcal{R}_{ikmn}$ и его свойства симметрии (1.56), (1.57) и (1.61) можно объединить в следующем едином утверждении: компоненты тензора кривизны являются коэффициентами квадратичной формы

$$\Theta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathcal{R}_{ikmn}[dx^i dx^k]_{\alpha\beta}[dx^m dx^n]_{\gamma\delta} = \frac{1}{4}\mathcal{R}_{ikmn} d_{\alpha\beta}S^{ik} d_{\gamma\delta} dS^{mn}$$

где

$$d_{\alpha\beta}S^{ik} = 2![dx^i dx^k]_{\alpha\beta} = \delta^{ik}_{uv} d_\alpha x^n d_\beta x^v .$$

Найдём выражение для $\mathcal{R}_{ikmn}$ через символы Кристоффеля $\Gamma^p_{k\ell}$ и их производные. Имеем:

$$\mathcal{R}_{ikmn} = g_{ip}\left(\frac{\partial\Gamma^p_{kn}}{\partial x^m} - \frac{\partial\Gamma^p_{km}}{\partial x^n}\right) + \Gamma^p_{mq}\Gamma^q_{kn} - \Gamma^p_{nq}\Gamma^q_{km}. \tag{1.53}$$

Используя очевидное равенство

$$g_{ip}\frac{\partial\Gamma^p_{km}}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^m}(g_{ip}\Gamma^p_{kn}) - \Gamma^p_{kn}\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^m} = \frac{\partial\Gamma_{i,kn}}{\partial x^m} - \Gamma^p_{kn}(\Gamma_{i,pm} + \Gamma_{p,im})$$

перепишем (1.53) в окончательном виде

$$\mathcal{R}_{ikmn} = \frac{\partial\Gamma_{i,kn}}{\partial x^m} - \frac{\partial\Gamma_{i,km}}{\partial x^n} + \Gamma^p_{km}\Gamma_{p,in} - \Gamma^p_{kn}\Gamma_{p,im}. \tag{1.54}$$

Рассмотрим некоторые свойства тензоров $\mathcal{R}^i_{\cdot kmn}$ и $\mathcal{R}_{ikmn}$.

1. Свойства симметрии.

a) Тензоры $\mathcal{R}^i_{\cdot kmn}$ и $\mathcal{R}_{ikmn}$ антисимметричны относительно двух последних индексов, т. е.

$$\mathcal{R}^i_{\cdot kmn} = -\mathcal{R}^i_{\cdot knm}, \tag{1.55}$$

$$\mathcal{R}_{ikmn} = -\mathcal{R}_{iknm}. \tag{1.56}$$

Эти свойства непосредственно видны из (1.51) и (1.54).

b) Тензор $\mathcal{R}_{ikmn}$ антисимметричен относительно индексов первой пары, т. е.

$$\mathcal{R}_{ikmn} = -\mathcal{R}_{kimn}. \tag{1.57}$$

В самом деле, из (1.54) следует:

$$\mathcal{R}_{ikmn} + \mathcal{R}_{kimn} = \frac{\partial}{\partial x^m}(\Gamma_{i,kn} + \Gamma_{k,in}) - \frac{\partial}{\partial x^n}(\Gamma_{i,km} + \Gamma_{k,im}) = \\ = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n}\right) - \frac{\partial}{\partial x^n}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right) = 0$$

c) Тензор $\mathcal{R}_{ikmn}$ симметричен относительно перестановки первой и второй пары индексов, т. е.

$$\mathcal{R}_{ikmn} = \mathcal{R}_{mnik}. \tag{1.58}$$

Для доказательства соотношения (1.58) подставим в первые два слагаемых равенства (1.54) выражения для символов Кристоффеля через компоненты метрического тензора (1.6). Получим:

$$\mathcal{R}_{ikmn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{in}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^n} - \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial x^i \partial x^m}\right) + \\ + g^{pq}(\Gamma_{p,in}\Gamma_{q,km} - \Gamma_{p,im}\Gamma_{q,kn}). \tag{1.59}$$

Используя полученное выражение легко убеждаемся в существовании свойства (1.58).

d) Циклическая симметрия тензоров $\mathcal{R}^i{}_{kmn}$ и $\mathcal{R}_{ikmn}$

$$\mathcal{R}^I{}_{kmn} + \mathcal{R}^I{}_{mnk} + \mathcal{R}^I{}_{nkm} = 0 \tag{1.60}$$

$$\mathcal{R}_{ikmn} + \mathcal{R}_{imnk} + \mathcal{R}_{inkm} = 0 \tag{1.61}$$

проверяется непосредственной подстановкой в (1.60) и (1.61) выражений (1.51) и (1.54).

2. Число независимых компонент тензора кривизны равно

$$N = \frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1). \tag{1.62}$$

Действительно, число компонент с двумя различными индексами вида $\mathcal{R}_{ikki}$ равно $\frac{1}{2}n(n-1)$, число компонент с тремя различными индексами вида: $\mathcal{R}_{iki\ell}$, $\mathcal{R}_{kik\ell}$ и $\mathcal{R}_{\ell i\ell k}$ равно $3 \cdot \frac{1}{3!}n(n-1)(n_2)$, число компонент с четырьмя различными индексами вида: $\mathcal{R}_{ikmn}$, $\mathcal{R}_{imnk}$ $(\mathcal{R}_{inkm} = -\mathcal{R}_{ikmn} - \mathcal{R}_{imnk})$ равно $2 \cdot \frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)$. Таким образом, полное число независимых компонент тензора кривизны равно

$$N = \frac{n}{2}(n-1) + \frac{n}{2}(n-1)(n-2) + \frac{n}{12}(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

Так для двухмерной поверхности $(n=2)$ тензор кривизны из $3^4 = 16$ компонент имеет одну $(N=1)$ независимую и выражается через скаляр k следующим образом:

$$\mathcal{R}_{ikmn} = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{mn}k.$$

Для трёхмерного пространства $(n=3)$ тензор кривизны из $3^4 = 81$ компонент имеет шесть $(N=6)$ независимых и выражается через симметричный тензор $\mathcal{G}^{pq}$

$$\mathcal{R}_{ikmn} = \varepsilon_{ikp}\varepsilon_{mnp}\mathcal{G}^{pq}.$$

Для четырёхмерного пространства $(n=4)$ тензор кривизны из $4^4 = 256$ компонент имеет двадцать $(N+20)$ независимых.

Тождество Бианки.

Наряду с алгебраическими соотношениями (1.60) и (1.61) тензоры $\mathcal{R}^i{}_{kmn}$ и $\mathcal{R}_{ikmn}$ удовлетворяют следующим дифференциальным соотношениям, которые называются тождествами Бианки:

$$\mathcal{R}^i{}_{kmn,p} + \mathcal{R}^i{}_{knp,m} + \mathcal{R}^i{}_{kpm,n} = 0, \tag{1.63}$$

$$\mathcal{R}_{ikmn,p} + \mathcal{R}_{iknp,m} + \mathcal{R}_{ikpm,n} = 0. \tag{1.64}$$

Для доказательства соотношения (1.63) воспользуемся тождеством Риччи

$$A_{i,mn} - A_{i,nm} = \mathcal{R}^\ell{}_{imn} A_\ell. \tag{1.65}$$

Дифференцируя (1.65) ковариантным образом по x^p и осуществляя циклическую перестановку индексов m, n, p получим:

$$A_{i,mnp} - A_{i,nmp} = \mathcal{R}^\ell{}_{imn,p} A_\ell + \mathcal{R}^\ell{}_{imn} A_{\ell,p}, \tag{1.66}$$

$$A_{i,npm} - A_{i,pnm} = \mathcal{R}^\ell{}_{inp,m} A_\ell + \mathcal{R}^\ell{}_{inp} A_{\ell,m}, \tag{1.67}$$

$$A_{i,pmn} - A_{i,mpn} = \mathcal{R}^\ell{}_{ipm,n} A_\ell + \mathcal{R}^\ell{}_{ipm} A_{\ell,n}. \tag{1.68}$$

Сложим все три равенства (1.66), (1.67) и (1.68) и перегруппируем члены в левой части:

$$(A_{i,mnp} - A_{i,mpn}) + (A_{i,npm} - A_{i,nmp}) + (A_{i,pmn} - A_{i,pnm}) =$$
$$= (\mathcal{R}^{\ell}{}_{imn,p} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{inp,m} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{ipm,n})A_{\ell} +$$
$$+ \mathcal{R}^{\ell}{}_{imn}A_{\ell,p} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{inp}A_{\ell,m} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{ipm}A_{\ell,n}. \quad (1.69)$$

Рассматривая $A_{i,mnp}$ как вторую ковариантную производную $A_{i,m}$ по x^n и x^p , имеем согласно (1.50)

$$A_{i,mnp} - A_{i,mpn} = \mathcal{R}^{\ell}{}_{inp}A_{\ell,m} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{mnp}A_{i,\ell} \quad (1.70)$$

и аналогично

$$A_{i,npm} - A_{i,nmp} = \mathcal{R}^{\ell}{}_{ipm}A_{\ell,n} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{npm}A_{i,\ell} \quad (1.71)$$
$$A_{i,pmn} - A_{i,pnm} = \mathcal{R}^{\ell}{}_{imn}A_{\ell,p} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{pmn}A_{i,\ell} \quad (1.72)$$

Подставим (1.70)–(1.72) в (1.69). После сокращения соответствующих членов получим:

$$(\mathcal{R}^{\ell}{}_{mnp} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{npm} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{pmn})A_{\ell} = (\mathcal{R}^{\ell}{}_{imn,p} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{inp,m} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{ipm,n})A_{\ell}.$$

Но из-за циклической симметрии (1.60)

$$\mathcal{R}^{\ell}{}_{mnp} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{npm} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{pmn} = 0.$$

А поскольку A_{ℓ} — произвольный вектор, то

$$\mathcal{R}^{\ell}{}_{imn,p} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{inp,m} + \mathcal{R}^{\ell}{}_{ipm,n} = 0.$$

Второе тождество (1.64) доказывается совершенно аналогичным образом.

1.8 Тензор Риччи.

В приложениях тензорного анализа в общей теории относительности очень важную роль играет симметричный тензор второго ранга, полученный путём всёртывания тензора кривизны $\mathcal{R}^{i}{}_{kmn}$ по двум индексам: ковариантному и контравариантному, стоящему на последнем месте

$$\mathcal{R}_{km} = \mathcal{R}^{i}{}_{kmi} = g^{in}\mathcal{R}_{ikmn} \quad (1.73)$$

или

$$\mathcal{R}_{km} = \frac{\partial \Gamma^p_{kp}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^p_{km}}{\partial x^p} + \Gamma^p_{kq}\Gamma^q_{mp} - \Gamma^p_{km}\Gamma^q_{pq}. \quad (1.74)$$

Тензор $\mathcal{R}_{km}$ называется тензором Риччи. Рассмотрим некоторые его свойства.

1. Симметрия.

$$\mathcal{R}_{km} = \mathcal{R}_{mk} \tag{1.75}$$

следует непосредственно из выражения (1.74), если воспользоваться равенством (1.28) и преобразовать первое слагаемое к виду

$$\frac{\partial \Gamma^p_{kp}}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial\sqrt{g_0}}{\partial x^k}\right) = -\frac{1}{g_0}\frac{\partial\sqrt{g_0}}{\partial x^m}\frac{\partial\sqrt{g_0}}{\partial x^m} + \frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial^2\sqrt{g_0}}{\partial x^m \partial x^k}.$$

2. Диввергенция.

Пусть $\mathcal{R}^n_k = g^{mn}\mathcal{R}_{mk}$ — смешанный тензор Риччи, а $\mathcal{R} = \mathcal{R}^n_n$ — скалярная риманова кривизна. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\mathcal{R}^n_{k,n} = \frac{1}{2}\mathcal{R}_{,k}. \tag{1.76}$$

В самом деле, согласно тождеству Бианки, имеем

$$\mathcal{R}^{pn}{}_{mk,\ell} + \mathcal{R}^{pn}{}_{k\ell,m} + \mathcal{R}^{pn}{}_{\ell m,k} = 0 \tag{1.77}$$

где

$$\mathcal{R}^{pn}{}_{mk} = g^{in}\mathcal{R}^p{}_{imk}.$$

После свёртки по двум индексам тождество (1.77) принимает вид:

$$\mathcal{R}^{pn}{}_{pn,\ell} + \mathcal{R}^{pn}{}_{n\ell,p} + \mathcal{R}^{pn}{}_{\ell p,n} = 0$$

или

$$\mathcal{R}_{,\ell} - \mathcal{R}^p_{\ell,p} - \mathcal{R}^n_{\ell,n} = \mathcal{R}_{,\ell} - 2\mathcal{R}^p_{\ell,p} = 0.$$

3. Тензор Эйнштейна.

Из смешанного тензора Риччи $\mathcal{R}^m_k$ легко получить тензор $\mathcal{G}^m_k$, дивергенция которого тождественно равна нулю

$$\mathcal{G}^n_{k,n} = 0. \tag{1.78}$$

Тензор $\mathcal{G}^m_k$ обладающий этим свойством называется тензором Эйнштейна и имеет вид:

$$\mathcal{G}^m_k = \mathcal{R}^m_k - \frac{1}{2}R\delta^m_k + \Lambda\delta^m_k, \tag{1.79}$$

где Λ — произвольная константа, исторически введённая Эйнштейном при решении частной задачи о структуре вселенной и поэтому названная “космологической”.

Тензор Эйнштейна (1.79) может быть записан в ко- и контравариантном виде:

$$\mathcal{G}_{mk} = \mathcal{R}_{mk} - \frac{1}{2}Rg_{mk} + \Lambda g_{mk},$$
$$\mathcal{G}^{mk} = \mathcal{R}^{mk} - \frac{1}{2}Rg^{mk} + \Lambda g^{mk}.$$

Четыре уравнения (1.78) имеют глубокий физический смысл, связанный с законом сохранения энергии и импульса.

1.9 Частные случаи римановых пространств.

1. Пространством Эйнштейна $\mathcal{G}_n$ называется такое риманово пространство V_n, для которого тензор Риччи имеет вид:

$$\mathcal{R}_{ik} = \frac{1}{n} R g_{ik}. \tag{1.80}$$

С помощью формулы (1.76) можно показать, что при $n \geqslant 3$ скалярная кривизна R пространства Эйнштейна должна быть постоянной; при $n = 2$ любое V_2 является пространством Эйнштейна $\mathcal{G}_2$.

2. Пространство постоянной кривизны.

Пространством постоянной кривизны S_n называется такое риманово пространство V_n, для которого тензор кривизны $\mathcal{R}_{ikmn}$ имеет вид:

$$\mathcal{R}_{ikmn} = k(g_{im}g_{km} - g_{in}g_{km}). \tag{1.81}$$

Покажем, что пространство постоянной кривизны S_n является частным случаем пространства Эйнштейна $\mathcal{G}_n$, для которого

$$R = k(1-n)n$$

В самом деле, имеем

$$\mathcal{R}^p{}_{kmn} = kg^{pi}(g_{im}g_{kn} - g_{in}g_{km}) = k(\delta^p_m g_{km} - \delta^p_n g_{km}),$$

откуда

$$\mathcal{R}_{km} = k(1-n)g_{km}$$

Сравнивая полученное выражение с (1.80) находим, что

$$R = k(1-n)n.$$

В частном случае $n = 3$ можно показать, что если V_n — пространство Эйнштейна, то оно является пространством постоянной кривизны.

3. Эвклидовы пространства.

Эвклидовым[10] пространством R_n называется такое риманово пространство V_n, для которого тензор кривизны $\mathcal{R}_{ikmn}$ тождественно равен нулю.

---

[10]Эвклид — древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Его научная деятельность протекала в Александрии в начале III века до н.э. Как свидетельствует Папп Александрийский, Эвклид был человеком мягкого характера очень скромным и независимым. Главная работа Эвклида — “Начала” составила целую эпоху в развитии элементарной геометрии. В “Началах” Эвклида, состоящих из 13 книг, дан образец дедуктивного изложения геометрического материала на основе предпосланной системы аксиом.

1.10 Интегральные теоремы.

Рассмотрим n-мерное риманово пространство V_n с координатами x_i и в нём подпространство V_m размерности m.

Назовём элементом интегрирования в V_m, соответствующее элементарной ячейке с m упорядоченными рёбрами $d_\alpha x^i$ $(\alpha = 1, 2, \dots, m;\ i = 1, 2, \dots, n)$, внешнее произведение m дифференциалов

$$[dx^1 dx^2 \dots dx^\ell]_{\alpha\beta\dots\gamma} = \frac{1}{m!}\delta^{\mu\nu\dots\lambda}_{\alpha\beta\dots\gamma} d_\mu x^i d_\nu x^k \dots d_\lambda x^\ell.$$

Тогда каждому m-мерному подпространству V_m может быть сопоставлено число[11]

$$\int\limits_{(m)} \omega_{(\dots)} = \int\limits_{(m)} a_{(\dots)ik\dots\ell}[dx^i dx^k \dots dx^\ell],$$

где $a_{(\dots)ik\dots\ell}$ — известные функции координат. Если подмножество V_m является m-мерной границей подмножества V_{m+1}, то при любых

$$\omega_{(\dots)} = a_{(\dots)ik\dots\ell}[dx^i dx^k \dots dx^\ell]$$

имеет место замечательное соотношение

$$\int\limits_{(m)} \omega_{(\dots)} = \int\limits_{(m+1)} a_{(\dots)ik\dots\ell}[dx^i dx^k \dots dx^\ell]. \tag{1.82}$$

Эта чрезвычайно компактная формула заключает в себе формулы Стокса, Гауса–Остроградского, Грина и обобщает их на случай n-мерных римановых пространств.

Формула (1.82), называемая обобщённой теорией Стокса, приводится нами без доказательства. При желании с ним можно познакомиться, например, по книге.

Переписывая соотношение (1.82) в развёрнутом виде, получим:

$$\int\limits_{(m)} a_{(\dots)i\dots\ell}[dx^i \dots dx^\ell] = \int\limits_{(m+1)} \frac{\partial a_{(\dots)i\dots\ell}}{\partial x^m}[dx^m dx^i \dots dx^\ell]. \tag{1.83}$$

Рассматривая строение подынтегральных выражений в формуле (1.83) нетрудно заметить, что слева под интегралом стоит тензор, справа нет, поскольку частная производная тензора, вообще говоря, не есть тензор. Однако никакого противоречия в этом нет, так как интеграл по конечной области пространства от тензора, заданного в системе криволинейных координат, вовсе не обязан быть тензором.

[11] Термин "интеграл" (от латинского слова integer — "целый") введён швейцарским математиком Якобом Бернули (1654–1705). Символ $\int$ был введён Лейбницем как стилизация первой буквы слова summa — "сумма" — первоначального названия интеграла. Современное обозначение определённого интеграла введено французским математиком Жозефом Фурье (1763–1830).

Другое дело, если тензор задан в декартовой системе координат. В этом случае, действительно, интеграл от тензора есть тензор.

Обобщённая формулу Стокса (1.82) имеет простой и компактный вид благодаря тому, что в качестве элемента интегрирования взята внешняя дифференциальная форма $[dx^i \dots dx^\ell]$ наиболее адекватно выражающая интегральные свойства дифференцируемых многообразий. Однако на практике, из соображений наглядности, в качестве исходных элементов интегрирования берут так называемые ковариантные $9n-m)$-объёмы $d\tau_{p\dots q}$ которые являются тензорами, дуальными к внешним дифференциальным формам $[\underbrace{dx^i \dots dx^\ell}_{m}]$ по всем m индексам. При этом обобщённая формула Стокса теряет присущие ей изящную форму и приобретает более громоздкий вид, различный для тензоров различного ранга и строения.

Чтобы установить соответствие между соотношением (1.82), выражающим наиболее глубокие интегральные свойства подпространств V_m и V_{m+1} и различными интегральными теоремами, встречающимися при рассмотрении конкретных задач, приведём формулы, позволяющие переходить от внешних форм $[\underbrace{dx^i dx^k \dots dx^\ell}_{m}]$ к ковариантным $(n-m)$-объёмам $d\tau_{\underbrace{p\dots q}_{n-m}}$ и обратно.

Согласно определению (стр.??) тензора, дуального данному, имеем:

$$d\tau_{\underbrace{u\dots v}_{n-m}} = \frac{1}{m!}\varepsilon_{\underbrace{u\dots v}_{n-m}\underbrace{i\dots\ell}_{m}}[\underbrace{dx^i \dots dx^\ell}_{m}] \tag{1.84}$$

Умножая обе части равенства (1.84) на $\varepsilon^{\overbrace{u\dots v}^{n-m}\overbrace{p\dots q}^{m}}$ и осуществляя свёртку по $n-m$ индексам $u\dots v$ получаем:

$$\varepsilon^{u\dots v\, p\dots q} d\tau_{u\dots v} = \frac{(n-m)!}{m!}\delta^{p\dots q}_{i\dots\ell}[dx^i \dots dx^\ell]. \tag{1.85}$$

Но так как форма $[dx^i \dots dx^\ell]$ антисимметрична по всем индексам, то на основании соотношения (**??**) переписываем (1.85) в виде

$$[\underbrace{dx^i \dots dx^\ell}_{m}] = \frac{1}{(n-m)!}\varepsilon^{\overbrace{u\dots v}^{n-m}\overbrace{i\dots\ell}^{m}} d\tau_{\underbrace{u\dots v}_{n-m}} \tag{1.86}$$

Итак, чтобы найти подынтегральное выражение $\Phi^{(\dots)u\dots v}$ в правой части соотношения

$$\int\limits_{(m)} A^{(\dots)u\dots vr} d\tau_{\underbrace{u\dots vr}_{n-m}} = \int\limits_{(m+1)} \Phi^{(\dots)u\dots v} d\tau_{\underbrace{u\dots v}_{n-m-1}}$$

выразим $d\tau_{\underbrace{u\dots v}_{n-m}}$ через $[\underbrace{dx^i \dots dx^\ell}_{m}]$ и сведём левый интеграл к виду

$$\int\limits_{(\dots)} \omega_{(\dots)} = \int\limits_{(\dots)} a_{(\dots)i\dots\ell}[dx^i \dots dx^\ell].$$

Затем, воспользуемся формулой Стокса (1.82) приведём исходный интеграл к

$$\int d\omega_{(\dots)} = \int \frac{\partial a_{(\dots)i\dots\ell}}{\partial x^m}[dx^m dx^i \dots dx^\ell].$$

Наконец выражая $[dx^m dx^i \dots dx^\ell]$ через $d\tau_{\underbrace{u\dots v}_{n-m-1}}$, преведём исходный интеграл к окончательному виду

$$\int \Phi^{(\dots)u\dots v} d\tau_{u\dots v}.$$

В главе ??, посвящённой прикладной стороне векторного анализа, мы иллюстрируем описанную схему на примере целого ряда интегральных теорем.

1.11 Тензорный анализ в терминах линейной алгебры.

Так уже поминалось выше, в своём изложении тензорного анализа мы старались придерживаться чисто аналитической точки зрения, избегая каких-либо геометрических понятий, претендующих на наглядность. Однако, после получения основных соотношений аналитическим путём, представляется интересным получить те же соотношения в более или менее наглядных терминах линейной алгебры.

При этом мы будем предполагать известными понятия вектора, произвольного базиса $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ и скалярного произведения двух векторов.

Итак, рассмотрим вектор

$$d\vec{r} = dx^i \vec{a}_i$$

и его квадрат, равный квадрату расстояния между двумя соседними точками

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{a}_i \vec{a}_k dx^i dx^k.$$

Сравнивая полученное соотношение с квадратом расстояния между двумя точками, записанными с помощью метрического тензора

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

получаем простое выражение для составляющих составляющих метрический тензор g_{ik} в виде скалярного произведения соответствующих базисных векторов:

$$g_{ik} = \vec{a}_i \vec{a}_k. \tag{1.87}$$

Введём новый базис $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^n$ взаимный к базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, т. е. такой что

$$\vec{a}_i \vec{a}^k = \delta_i^k. \tag{1.88}$$

Обозначая искомые координаты вектора $\vec{a}^k$ относительно первоначального базиса $\vec{a}_\ell$ через $g^{k\ell}$ будем иметь:

$$\vec{a}^k = g^{k\ell}\vec{a}_\ell. \tag{1.89}$$

Подставляя (1.89) в (1.88) получим

$$g^{k\ell}g^{i\ell} = \delta^k_i. \tag{1.90}$$

С другой стороны, умножая обе части равенства (1.89) на $\vec{a}^i$, находим

$$\vec{a}^i\vec{a}^k = g^{ik}. \tag{1.91}$$

Рассмотрим теперь произвольный вектор $\vec{A}$, имеющий компоненты A^i в базисе a_i:

$$\vec{A} = A^i\vec{a}_i \tag{1.92}$$

и образуем производную

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x^k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k}\vec{a}_i + A^i\frac{\partial\vec{a}_i}{\partial x^k}. \tag{1.93}$$

Вектор $\dfrac{\partial\vec{a}_i}{\partial x^k}$ может быть разложен по векторам первоначального базиса $\vec{a}_\ell$. Обозначая его координаты, называемые коэффициентами аффинной связности, через γ^ℓ_{ik}, получим:

$$\frac{\partial\vec{a}_i}{\partial x^k} = \Gamma^\ell_{ik}\vec{a}_\ell \tag{1.94}$$

умножая обе части равенства (1.94) на $\vec{a}^m$, находим:

$$\gamma^\ell_{ik} = \frac{\partial\vec{a}_i}{\partial x^k}\vec{a}^\ell. \tag{1.95}$$

Точно так же определяем координаты $\gamma_{\ell,ik}$ вектора $\dfrac{\partial\vec{a}_i}{\partial x^k}$ относительно взаимного базиса $\vec{a}^\ell$

$$\frac{\partial\vec{a}_i}{\partial x^k} = \gamma_{\ell,ik}\vec{a}^\ell \tag{1.96}$$

или

$$\gamma_{\ell,ik} = \frac{\partial\vec{a}_i}{\partial x^k}\vec{a}_\ell. \tag{1.97}$$

Рассмотрим теперь разность

$$\frac{\partial\vec{a}_i}{\partial x^k} - \frac{\partial\vec{a}_k}{\partial x^i} = s_{\ell,ik}\vec{a}^\ell, \tag{1.98}$$

где

$$s_{\ell,ik}=\gamma_{\ell,ik}-\gamma_{\ell,ki} \tag{1.99}$$

— антисимметрическая часть объекта $\gamma_{\ell,ik}$ и постараемся выразить симметрическую часть объекта $\gamma_{\ell,ik}$ через производную от $g_{ik}=\vec{a}_i\vec{a}_k$:

$$\gamma_{\ell,ik}+\gamma_{\ell,ki}=\vec{a}_\ell\frac{\partial\vec{a}_i}{\partial x^k}+\vec{a}_\ell\frac{\partial\vec{a}_k}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^k}(\vec{a}_\ell\vec{a}_i)+\frac{\partial}{\partial x^i}(\vec{a}_\ell\vec{a}_k)-\vec{a}_i\frac{\partial\vec{a}_\ell}{\partial x^k}-\vec{a}_k\frac{\partial\vec{a}_\ell}{\partial x^i}.$$

воспользовавшись соотношением (1.98), получаем

$$\gamma_{\ell,ik}+\gamma_{\ell,ki}=\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{\ell k}}{\partial x^i}-\vec{a}_i\frac{\partial\vec{a}_k}{\partial x^\ell}-\vec{a}_k\frac{\partial\vec{a}_i}{\partial x^\ell}-s_{m,\ell k}\vec{a}^m\vec{a}_i-s_{m,\ell i}\vec{a}^m\vec{a}_k$$

или

$$\gamma_{\ell,ik}+\gamma_{\ell,ki}=\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{\ell k}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell}-s_{i,\ell k}-s_{k,\ell i}. \tag{1.100}$$

Складывая (1.99) и (1.100) находим окончательно выражение для коэффициентов аффинной связности:

$$\gamma_{\ell,ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{\ell k}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell}\right)+\frac{1}{2}(s_{i,k\ell}+s_{k,i\ell}+s_{\ell,ik})$$

или

$$\gamma_{\ell,ik}=\Gamma_{\ell,ik}+\frac{1}{2}(s_{i,k\ell}+s_{k,i\ell}+s_{\ell,ik}), \tag{1.101}$$

где

$$\Gamma_{\ell,ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{\ell k}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell}\right) \text{ — символ Кристоффеля,}$$

$s_{\ell,ik}$ — произвольно заданный антисимметрический по i и k тензор, называемый тензором кручения.

Итак, вообще говоря

$$\frac{\partial\vec{a}_i}{\partial x^k}\vec{a}_\ell=\Gamma_{\ell,ik}+\frac{1}{2}(s_{i,k\ell}+s_{k,i\ell}+s_{\ell,ik}) \tag{1.102}$$

Если $s_{\ell,ik}\neq 0$, то многообразие, задаваемое координатами x^i , называется римановым пространством с кручением, если же $s_{\ell,ik}=0$, то многообразие называется римановым пространством без кручения.

Как правило, в физике рассматривается римановы пространства без кручения и потому мы везде будем полагать $s_{\ell,ik}=0$ и считать $\gamma_{\ell,ik}=\Gamma_{\ell,ik}$.

Таким образом, для римановых пространств без кручения имеет место следующие простые выражения для символов Кристоффеля $\Gamma_{\ell,ik}$ и Γ^ℓ_{ik} в виде скалярного произведения векторов $\vec{a}_\ell$ или $\vec{a}^\ell$ и $\dfrac{\partial\vec{a}_i}{\partial x^k}$

$$\Gamma_{\ell,ik}=\vec{a}_\ell\frac{\partial\vec{a}_i}{\partial x^k} \tag{1.103}$$

$$\Gamma^{\ell}_{ik} = \vec{a}^{\ell}\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} \tag{1.104}$$

Возвращаясь к равенству (1.93) и подставляя в него выражение (1.94), получим:

$$\frac{\vec{A}}{\partial x^k} = A^{\ell}{}_{,k}\vec{a}_{\ell}, \tag{1.105}$$

где

$$A^{\ell}{}_{,k} = \frac{\partial A^{\ell}}{\partial x^k} + \gamma^{\ell}_{ik}A^i \tag{1.106}$$

ковариантная производная контравариантного вектора A^{ℓ} ; при отсутствии кручения

$$A^{\ell}{}_{,k} = \frac{\partial A^{\ell}}{\partial x^k} + \Gamma^{\ell}_{ik}A^i \tag{1.107}$$

Воспользовавшись соотношением (1.104) легко найти закон преобразования Γ^{ℓ}_{ik} при переходе от одной системы координат к другой. Имеем

$$\vec{a}^{\ell} = \underline{c}^{\ell}_m\underline{\vec{a}}^m$$
$$\vec{a}_i = \overline{c}^p_i\underline{\vec{a}}_p$$

Следовательно

$$\Gamma^{\ell}_{ik} = \vec{a}^{\ell}\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} = \underline{c}^{\ell}_m\underline{\vec{a}}^m\frac{\partial}{\partial x^r}(\overline{c}^p_i\underline{\vec{a}})\overline{c}^r_k =$$
$$= \underline{c}^{\ell}_m\overline{c}^p_i\overline{c}^r_k\underline{\vec{a}}^m\frac{\partial \vec{a}_p}{\partial \overline{x}^r} + \underline{c}^{\ell}_p\overline{c}^r_k\frac{\partial \overline{c}^p_i}{\partial \overline{x}^r}$$

Но так как

$$\frac{\partial \overline{c}^p_i}{\partial \overline{x}^r} = \frac{\partial \overline{c}^p_i}{\partial x^m}\underline{c}^m_r,$$

то

$$\Gamma^{\ell}_{ik} = \underline{c}^{\ell}_m\overline{c}^p_i\overline{c}^r_k\overline{\Gamma}^m_{pr} + \overline{c}^p_{ik}\underline{c}^{\ell}_p, \tag{1.108}$$

где

$$\overline{c}^p_{ik} = \frac{\partial \overline{c}^p_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \overline{x}^p}{\partial x^i \partial x^k}.$$

Рассмотрим теперь разность вторых производных базисного вектора $\vec{a}_{\ell}$.

Обозначая составляющие этой разности относительно базиса $\vec{a}_m$ через $\mathcal{R}^m{}_{\ell ik}$, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \vec{a}_{\ell}}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \vec{a}_{\ell}}{\partial x^i}\right) = \mathcal{R}^m{}_{\ell ik}\vec{a}_m. \tag{1.109}$$

Покажем, что $\mathcal{R}^m{}_{\ell ik}$ есть ни что иное как тензор кривизны.

В самом деле

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \vec{a}_\ell}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \vec{a}_\ell}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma^m_{\ell k}\vec{a}_m) - \frac{\partial}{\partial x^k}(\gamma^m_{\ell i}\vec{a}_m) =$$

$$= \left(\frac{\partial \gamma^m_{\ell k}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma^m_{\ell i}}{\partial x^k}\right)\vec{a}_m + \gamma^p_{\ell k}\frac{\partial \vec{a}_p}{\partial x^i} - \gamma^p_{\ell i}\frac{\partial \vec{a}_p}{\partial x^k} =$$

$$= \left(\frac{\partial \gamma^m_{\ell k}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma^m_{\ell i}}{\partial x^k} + \gamma^p_{\ell k}\gamma^m_{pi} - \gamma^p_{\ell i}\gamma^m_{pk}\right)\vec{a}_m.$$

Сравнивая полученное выражение с определителем (1.109), получаем:

$$\mathcal{R}^m{}_{\ell ik} = \frac{\partial \gamma^m_{\ell k}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma^m_{\ell i}}{\partial x^k} + \gamma^p_{\ell k}\gamma^m_{pi} - \gamma^p_{\ell i}\gamma^m_{pk}. \tag{1.110}$$

При отсутствии кручения $\gamma^m_{\ell k} = \Gamma^m_{\ell k}$ выражение (1.110) совпадает с общеупотребительным определением тензора кривизны (1.51).

Итак, результаты данного параграфа сводятся к следующему:

1. Метрический тензор g_{ik} равен составляющим вектора $\vec{a}_i$ относительно базиса $\vec{a}^k$:
$$\vec{a}_i = g_{ik}\vec{a}^k,$$
а контравариантный тензор g^{ik} равен составляющим вектора $\vec{a}^i$ относительно базиса $\vec{a}_k$
$$\vec{a}^i = g^{ik}\vec{a}_k.$$

2. Тензоры кручения $S^\ell{}_{ik}$ и $S_{\ell,ik}$ равны составляющим вектора $\dfrac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} - \dfrac{\partial \vec{a}_k}{\partial x^i}$ относительно базиса $\vec{a}_\ell$ и $\vec{a}^\ell$ соответственно:
$$\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \vec{a}_k}{\partial x^i} = S^\ell{}_{ik}\vec{a}_\ell = S_{\ell,ik}\vec{a}^\ell.$$

3. Коэффициенты аффинной связности γ^ℓ_{ik} и $\gamma_{\ell,ik}$ а при отсутствии кручения символы Кристоффеля Γ^ℓ_{ik} и $\Gamma_{\ell,ik}$ равны составляющим вектора $\dfrac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k}$ относительно базиса $\vec{a}_\ell$ и $\vec{a}^\ell$ соответственно:
$$\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} = \gamma^\ell_{ik}\vec{a}_\ell = \gamma_{\ell,ik}\vec{a}^\ell \quad \text{при } S^\ell_{ik} \neq 0,$$
$$\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} = \Gamma^\ell_{ik}\vec{a}_\ell = \Gamma_{\ell,ik}\vec{a}^\ell \quad \text{при } S^\ell_{ik} \neq 0.$$

4. Тензоры кривизны $\mathcal{R}^\ell{}_{mik}$ и $\mathcal{R}_{\ell mik}$ равны составляющим вектора
$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \vec{a}_m}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \vec{a}_m}{\partial x^i}\right)$$
относительно базиса $\vec{a}_\ell$ и $\vec{a}^\ell$ соответственно
$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \vec{a}_m}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \vec{a}_m}{\partial x^i}\right) = \mathcal{R}^\ell{}_{mik}\vec{a}_\ell = \mathcal{R}_{\ell mik}\vec{a}^\ell.$$

Глава 1

Векторный анализ в трёхмерном евклидовом пространстве.

Difficile est proprie communia dicere; tuque Rectius Iliacum in actus, Quam si proferres ignota indictaque primus.[1]

— *Квинт Гораций Флакк*

1.1 Векторная алгебра в терминах тензорного исчисления.

Что такое вектор? Ответ на этот вопрос представляет известные затруднения. Существует разные подходы к определению вектора.

С точки зрения элементарной геометрии вектором называется всякая величина, которая может быть поставлена в соответствии отрезок, имеющий определённую длину и направление[2].

Беря за основу наглядный образ направленного отрезка, определяются следующие операции, осуществляемые над векторами:

1. Сложение
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$
2. Умножение на число
$$\lambda\vec{a} = \vec{b}$$
3. Скалярное произведение
$$\vec{a}\vec{b} = \alpha$$

[1]— Если будем понимать слова Горация, как понял их английский поэт (Байрон Ю. К., то мы согласимся с его мнением: трудно хорошо выразить общеизвестные вещи. — А. С. Пушкин, “Об Альфреде Мюссе”.

[2]Подчеркнём, что все понятия, приведённые в данной главе не претендуют на какую-либо строгость и выражает лишь наглядно-интуитивную точку зрения, присущую традиционному изложению.

4. Векторное произведение[3]

$$[\vec a\,\vec b] = \vec c$$

Используя соответствующие свойства введённых операций можно доказать ряд тождеств, составляющих набор основных теорем векторной алгебры

$$\vec a[\vec b\,\vec c] = \vec b[\vec c\,\vec a] = \vec c[\vec a\vec b], \tag{1.1}$$

$$\big[\vec a[\vec b\,\vec c]\big] = \vec b(\vec a\vec c) - \vec c(\vec a\vec b), \tag{1.2}$$

$$\big[\vec a[\vec b\,\vec c]\big] + \big[\vec b[\vec c\,\vec a]\big] + \big[\vec c[\vec a\vec b]\big] = 0, \tag{1.3}$$

$$[\vec a\vec b][\vec c\vec d] = \begin{vmatrix} (\vec a\vec c) & (\vec a\,\vec d) \\ (\vec b\,\vec c) & (\vec b\vec d) \end{vmatrix}, \tag{1.4}$$

$$[\vec a\vec b] = a^2b^2 - (\vec a\vec b)^2, \tag{1.5}$$

$$\vec a\big(\vec b[\vec c\vec d]\big) - \vec b\big(\vec c[\vec d\,\vec a]\big) + \vec c\big(\vec d[\vec a\vec b]\big) - \vec d\big(\vec a[\vec b\,\vec c]\big) = 0, \tag{1.6}$$

$$\big(\vec a[\vec b\,\vec c]\big)\cdot\big(\vec f[\vec g\vec h]\big) = \begin{vmatrix} (\vec a\,\vec f) & (\vec a\vec g) & (\vec a\vec h) \\ (\vec b\vec f) & (\vec b\vec g) & (\vec b\vec h) \\ (\vec c\vec f) & (\vec c\,\vec b) & (\vec c\vec h) \end{vmatrix}, \tag{1.7}$$

$$\big(\vec a[\vec b\,\vec c]\big)^2 = \begin{vmatrix} a^2 & (\vec a\vec b) & (\vec a\vec c) \\ (\vec b\vec a) & b^2 & (\vec b\,\vec c) \\ (\vec c\,\vec a) & (\vec c\,\vec b) & c^2 \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

Эти тождества могут быть легко получены, если рассматривать вектор $\vec a$ как тензор первого порядка, определённый в декартовой системе координат.

Поскольку в декартовой системе координат метрический тензор имеет вид:

$$g_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

то не имеет смысла различать ко- контравариантные индексы. Поэтому на протяжении этой главы мы будем писать все индексы, в том числе и немые, внизу.

Итак, рассматривая вектор $\vec a$ как тензор перового порядка a_i легко установить соответствие между скалярным и векторным произведением с одной стороны и известными свёртками с другой

$$\vec a\vec b = a_ib_i, \tag{1.9}$$

$$[\vec a\vec b]_i = e_{ik\ell}a_kb_\ell. \tag{1.10}$$

Используя эти соотношения, тождества (1.1)–(1.8) доказываются безо всякого труда, почти автоматически.

[3] Векторное произведение было определено Гамильтоном как векторная часть кватернионного произведения. Векторное произведение было было определено также Грассманом под названием “внешнего произведения двух векторов”; Грассман обозначал это произведение как $[\vec a\,\vec b]$, это же обозначение применял Хевисайд. Гиббс обозначал векторное произведение как $\vec a \times \vec b$ и называл его “косым произведением” (в противоположность “прямому”, т. е. скалярному).

(1.1). Циркулярная симметрия тройного произведения следует из очевидных равенств:

$$\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}] = a_i[\vec{b}\,\vec{c}]_i e_{ik\ell} a_i b_k c_\ell = e_{k\ell i} b_k c_\ell a_i = e_{\ell ik} c_\ell a_i b_k = \vec{b}[\vec{c}\,\vec{a}] = \vec{c}[\vec{a}\vec{b}].$$

(1.2). Двойное векторное произведение раскрывается автоматически:

$$\begin{gathered}\big[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]\big]_i = e_{ik\ell} a_k [\vec{b}\,\vec{c}]_\ell = e_{ik\ell} e_{\ell mn} a_k a_m c_n = \\ = (\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}) a_k b_m b_n = a_k b_i c_k - a_k b_k c_i = \\ = b_i(\vec{a}\,\vec{c}) - c_i(\vec{a}\vec{b}).\end{gathered}$$

(1.3). Это тождество, известное под названием тождества Якоби и заменяющее собой свойство ассоциативности в алгебре Ли, доказывается непосредственной подстановкой равенства (1.2)

$$\begin{gathered}\big[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]\big]_i + \big[\vec{b}[\vec{c}\,\vec{a}]\big]_i + \big[\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]\big]_i = \\ = a_k b_i c_k - a_k b_k c_i + a_k b_k c_i - a_i b_k c_k + a_i b_k c_k - a_k b_i c_k = 0.\end{gathered}$$

(1.4). Это тождество называется тождеством Лагранжа. Его доказательство очевидно:

$$\begin{gathered}[\vec{a}\vec{b}][\vec{c}\vec{d}] = [\vec{a}\vec{b}]_i[\vec{c}\vec{d}]_i = e_{ik\ell} e_{imn} a_k b_\ell c_m d_n = \\ = (\delta_{km}\delta_{\ell n} - \delta_{kn}\delta_{\ell m}) a_k b_\ell c_m d_n = a_k b_n c_k d_n - a_k b_n c_n d_k = \\ = (\vec{a}\,\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}).\end{gathered}$$

(1.5). Это тождество, выражающее квадрат векторного произведения через определитель Грама второго порядка, является частным случаем ($\vec{c} = \vec{a}$; $\vec{d} = \vec{b}$) тождества (**??**).

(1.6). Это тождество представляет собой разложение произвольного вектора $\vec{d}$ по трём произвольным направлениям, задаваемым тремя некомпланарными ($\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}] \neq 0$) векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Имеем:

$$\begin{gathered}X_s = \vec{a}_s\big(\vec{b}[\vec{c}\vec{d}]\big) - \vec{b}_s\big(\vec{c}[\vec{d}\,\vec{a}]\big) + \vec{c}_s\big(\vec{d}[\vec{a}\vec{b}]\big) - \vec{d}_s\big(\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]\big) = \\ = e_{ik\ell}(a_s b_i c_k d_\ell - b_s c_i d_k a_\ell + c_s d_i a_k b_\ell - d_s a_i b_k c_\ell).\end{gathered}$$

Замечая, что $a_s = a_m\delta_{ms}$ и циклически переобозначая индексы i, k, ℓ получаем

$$X_s = a_m b_i c_k d_\ell (e_{ik\ell}\delta_{ms} - e_{k\ell m}\delta_{is} + e_{\ell mi}\delta_{ks} - e_{mik}\delta_{\ell s}).$$

Но согласно (**??**)

$$e_{ik\ell}\delta_{ms} - e_{k\ell m}\delta_{is} + e_{\ell mi}\delta_{ks} - e_{mik}\delta_{\ell s} = 0.$$

Следовательно
$$X_s \equiv 0.$$

(1.7). Для доказательства этого тождества воспользуемся соотношением (**??**), выражающим обобщение символа Кронекера третьего порядка через δ_i^k . Имеем:

$$\begin{gathered}
\left(\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]\right)\cdot\left(\vec{f}[\vec{g}\vec{h}]\right) = e_{ik\ell}e_{pqr}a_i b_k c_\ell f_p g_q h_r = \\
= \delta_{ip}\delta_{kq}\delta_{\ell r} - \delta_{ip}\delta_{\ell q}\delta_{kr} - \delta_{kp}\delta_{iq}\delta_{\ell r} + \delta_{kp}\delta_{\ell q}\delta_{ir} + \\
+ \delta_{\ell p}\delta_{iq}\delta_{kr} - \delta_{\ell p}\delta_{kq}\delta_{ir})a_i b_k c_\ell f_p g_q h_r = \\
= (\vec{a}\vec{f})(\vec{b}\vec{g})(\vec{c}\vec{h}) + (\vec{a}\vec{g})(\vec{b}\vec{h})(\vec{c}\,\vec{f}) + (\vec{a}\vec{h})(\vec{b}\vec{f})(\vec{c}\,\vec{g}) - \\
- (\vec{a}\vec{h})(\vec{b}\vec{h})(\vec{c}\,\vec{g}) - (\vec{a}\,\vec{f})(\vec{b}\vec{h})(\vec{c}\,\vec{g}) - (\vec{a}\vec{g})(\vec{b}\vec{f})(\vec{c}\vec{h}).
\end{gathered}$$

(1.8). Это тождество выражает квадрат тройного произведения через определитель Грама (**??**) и является частным случаем тождества (1.7)

1.2 Векторный анализ в терминах тензорного исчисления.

Основная задача векторного анализа, как известно, состоит в получении новых величин, обладающих ковариантными свойствами, т. е. преобразующихся как скаляр или вектор, из заданных скалярных или векторных функций путём операции дифференцирования.

Существует следующие четыре дифференциальные операции первого порядка, обладающие указанными выше свойствами:

1. Градиент скалярной функции φ —

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{1.11}$$

2. Производная[4] векторной функции $\vec{a}$ по направлению вектора $\vec{c}$

$$(\vec{c}\,\mathrm{grad})\vec{a} = (\vec{c}\vec{\nabla})\vec{a} = \vec{i}\left(c_x\frac{\partial a_x}{\partial x} + c_y\frac{\partial a_x}{\partial y} + c_z\frac{\partial a_x}{\partial z}\right) + \\ + \vec{j}\left(c_x\frac{\partial a_y}{\partial x} + c_y\frac{\partial a_y}{\partial y} + c_z\frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \\ + \vec{k}\left(c_x\frac{\partial a_z}{\partial x} + c_y\frac{\partial a_z}{\partial y} + c_z\frac{\partial a_z}{\partial z}\right). \quad (1.12)$$

3. Дивергенция векторной функции $\vec{a}$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = (\vec{\nabla}\vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (1.13)$$

4. Ротор векторной функции $\vec{a}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = [\vec{\nabla}\vec{a}] = \\ = \vec{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right). \quad (1.14)$$

Применяя эти операции к произведениям скалярных и векторных функций, получаем:

$$\mathrm{grad}(\varphi\psi) = \varphi\,\mathrm{grad}\,\psi + \psi\,\mathrm{grad}\,\varphi; \quad (1.15)$$

$$\mathrm{grad}(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\,\mathrm{grad})\vec{b} + (\vec{b}\,\mathrm{grad})\vec{a} + [\vec{a}\,\mathrm{rot}\,\vec{b}] + [\vec{b}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}]; \quad (1.16)$$

$$(\vec{c}\,\mathrm{grad})(\varphi\vec{a}) = \varphi(\vec{c}\,\mathrm{grad})\vec{a} + \vec{a}(\vec{c}\;\varphi); \quad (1.17)$$

$$(\vec{c}\,\mathrm{grad})[\vec{a}\vec{b}] = \left[\vec{a}\cdot(\vec{c}\,\mathrm{grad})\vec{b}\right] - \left[\vec{b}\cdot(\vec{c}\,\mathrm{grad})\vec{a}\right]; \quad (1.18)$$

$$\mathrm{div}(\varphi\vec{a}) = \varphi\,\mathrm{div}\,\vec{a} + \vec{a}\,\mathrm{grad}\,\varphi; \quad (1.19)$$

$$\mathrm{div}[\vec{a}\vec{b}] = \vec{b}\,\mathrm{rot}\,\vec{a} - \vec{a}\,\mathrm{rot}\,\vec{b}; \quad (1.20)$$

$$\mathrm{rot}(\varphi\vec{a}) = \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{a} - [\vec{a}\,\mathrm{grad}\,\varphi]; \quad (1.21)$$

$$\mathrm{rot}[\vec{a}\vec{b}] = \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{b} - \vec{b}\,\mathrm{div}\,\vec{a} + (\vec{b}\,\mathrm{grad})\vec{a} - (\vec{a}\,\mathrm{grad})\vec{b}. \quad (1.22)$$

---

[4] Градиент скалярной функции $\mathrm{grad}\,\varphi = \vec{\nabla}\varphi$, дивергенция $\mathrm{div}\,\vec{a} = (\vec{\nabla}\vec{a})$, ротор $\mathrm{rot}\,\vec{a} = [\vec{\nabla}\vec{a}]$ и символ набла $\vec{\nabla}$ были введены Гамильтоном в “Лекциях о кватернионах” (1853). Производная векторной функции по заданному направлению была определена Гиббсом в “Элементах векторного анализа” (1883).

Термин “набла” (nabla) для символа $\vec{\nabla}$ происходит от библейского названия музыкального инструмента типа арфы, имеющего треугольную форму — “небел”. Слово “градиент” происходит от латинского слова gradiens — “шагающий” и появилось впервые в метеорологии для обозначения направления максимального изменения температуры воздуха, атмосферного давления и и. д. “дивергенция” и “ротор” происходящие от латинских слов divergo — “расхожусь” и roto — “вращение” объясняются тем, что необращение в нуль дивергенции или ротора силового поля указывает на наличие, соответственно, источников или стоков силовых линий или их замкнутости. Что касается вектора (1.12), то до сих пор не выработан общепринятый термин для его обозначения.

Рассматривая вектор $\vec{a}$ как тензор первого ранга a_i заменим введённые выше дифференциальные операторы соответствующими свёртками содержащими оператор $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$:

$$\operatorname{grad}_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \tag{1.23}$$

$$(\vec{c}\,\mathrm{grad}) a_i = c_k \frac{\partial a_i}{\partial x^k}, \tag{1.24}$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_k}{\partial x^k}, \tag{1.25}$$

$$\operatorname{rot}_i \vec{a} = e_{ik\ell} \frac{\partial a_\ell}{\partial x^k}. \tag{1.26}$$

Кроме того оказывается полезным ещё одно выражение

$$e_{ik\ell} \operatorname{rot}_\ell \vec{a} = \frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k}. \tag{1.27}$$

Используя эти соотношения, тождества (1.15)–(1.22) доказываются безо всякого труда:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_i(\varphi\psi) &= \frac{\partial}{\partial x^i}(\varphi\psi) = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \\ &= \varphi \operatorname{grad}_i \psi + \psi \operatorname{grad}_i \varphi; \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_i(\vec{a}\,\vec{b}) &= \frac{\partial}{\partial c^i}(a_k b_k) = a_k \frac{\partial b_k}{\partial x^i} + b_k \frac{\partial a_k}{\partial x^i} = \\ = a_k \frac{\partial b_i}{\partial x^k} &+ a_k e_{ik\ell} \operatorname{rot}_\ell \vec{b} + b_k \frac{\partial a_i}{\partial x^k} + b_k e_{ik\ell} \operatorname{rot}_\ell \vec{a} = \\ = (\vec{a}\,\mathrm{grad}) b_i &+ (\vec{b}\,\mathrm{grad}) a_i + [\vec{a} \operatorname{rot} \vec{b}]_i + [\vec{b} \operatorname{rot} \vec{a}]_i; \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} (\vec{c}\,\mathrm{grad})(\varphi a_i) &= c_k \frac{\partial}{\partial x^k}(\varphi a_i) = c_k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} a_i + c_k \varphi \frac{\partial a_i}{\partial x^k} = \\ &= a_i (\vec{c}\,\mathrm{grad}\, \varphi) + \varphi (\vec{c}\,\mathrm{grad}) a_i; \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} (\vec{c}\,\mathrm{grad})[\vec{a}\,\vec{b}]_i &= c_k \frac{\partial}{\partial x^k}(e_{imn} a_m a_n) = e_{imn} c_k a_m \frac{\partial b_n}{\partial x^k} + \\ + e_{imn} c_k b_n \frac{\partial a_m}{\partial x^k} &= \left[\vec{a} \cdot (\vec{c}\,\mathrm{grad}) \vec{b}\right]_i - \left[\vec{b} \cdot (\vec{c}\,\mathrm{grad}) \vec{a}\right]_i; \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\operatorname{div}(\varphi\vec a) = \frac{\partial}{\partial x_k}(\varphi a_k) = \varphi\frac{\partial a_k}{\partial x_k} + a_k\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \\ = \varphi \operatorname{div}\vec a + \vec a \operatorname{grad}\varphi; \tag{1.19}$$

$$\operatorname{div}[\vec a\,\vec b] = \frac{\partial}{\partial x_k}(e_{kmn}a_m b_n) = e_{kmn}\frac{\partial a_m}{\partial x_k}b_n + \\ + e_{kmn}\frac{\partial b_n}{\partial x_k}a_m = \vec b \operatorname{rot}\vec a - \vec a \operatorname{rot}\vec b; \tag{1.20}$$

$$\operatorname{rot}_i(\varphi\vec a) = e_{ik\ell}\frac{\partial}{\partial x_k}(\varphi\vec a) = e_{ik\ell}\varphi\frac{\partial a_\ell}{\partial x_k} = \\ = \varphi \operatorname{rot}_i\vec a - [\vec a \operatorname{grad}\varphi]_i; \tag{1.21}$$

$$\operatorname{rot}_i[\vec a\,\vec b] = e_{ik\ell}\frac{\partial}{\partial x_k}[\vec a\,\vec b]_\ell = e_{ik\ell}\frac{\partial}{\partial x_k}(e_{\ell mn}a_m b_n) = \\ = (\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km})\left(\frac{\partial a_m}{\partial x_k}b_n + a_m\frac{\partial b_n}{\partial x_k}\right) = \\ + \frac{\partial a_i}{\partial x_k}b_k - \frac{\partial a_k}{\partial x_k}b_i + a_i\frac{\partial b_k}{\partial x_k} - a_k\frac{\partial b_i}{\partial x_k} = \\ = (\vec b \operatorname{grad})\vec a - (\vec a \operatorname{grad})\vec b + a_i \operatorname{div}\vec b - b_i \operatorname{div}\vec a. \tag{1.22}$$

1.3 Интегральные теоремы.

Применим теперь общие результаты, полученные в § **??**, гл **??** к векторам трёхмерного эвклидова пространства.

Обычно при записи интегральных выражений в традиционном векторном анализе в качестве элементов интегрирования используются

$d\ell_i$ — декартовы составляющие элемента длины дуги кривой,

ds_i — декартовы составляющие элемента площади поверхности и

dV — элемент объёма.

Чтобы воспользоваться обобщённой формулой Стокса (**??**) необходимо выразить $d\ell_i$, ds_i и dV через внешние формы Картана $[dx_i]$, $[dx_i dx_k]$ и $[dx - idx_k dx_\ell]$. Оказывается, что декартовы составляющие элемента длины $d\ell_i$ просто равны $[dx_i]$, а s_i и dV являются ковариантными объёмами $d\tau_i$ и $d\tau$.

Итак

$$d\ell_i = [dx_i] \tag{1.28}$$

и согласно (**??**) и (**??**)[5]

$$ds_i = d\tau_i = \frac{1}{2!} e_{ik\ell}[dx_k dx_\ell], \tag{1.29}$$

$$dV = d\tau = \frac{1}{3!} e_{ik\ell}[dx_i dx_k dx_\ell] \tag{1.30}$$

и обратно

$$[dx_i dx_k] = e_{\ell ik} ds_\ell, \tag{1.31}$$

$$[dx_i dx_k dx_\ell] = e_{ik\ell} dV. \tag{1.32}$$

Используя соотношения (1.28),(1.29) и (1.31) нетрудно доказать следующие интегральные теоремы, устанавливающие связь между интегралами по замкнутому контуру L и интегралами по поверхности S , опирающейся на этот контур:

$$\oint_L \varphi d\vec{\ell} = \int_S [d\vec{s} \operatorname{grad} \varphi]; \tag{1.33}$$

$$\oint_L \vec{a} d\vec{\ell} = \int_S \operatorname{rot} \vec{a} d\vec{s}; \tag{1.34}$$

$$\oint_L \vec{a}(\vec{b} d\vec{\ell}) = \int_S \vec{a}(\operatorname{rot} \vec{b} \cdot d\vec{s}) + \big([\vec{b} d\vec{s}] \cdot \mathrm{grsd}\big)\vec{a}; \tag{1.35}$$

$$\oint_L [\vec{a} d\vec{\ell}] = \int_S \operatorname{div} \vec{a} \cdot d\vec{s} - (d\vec{s} \cdot \operatorname{grad})\vec{a} + [\operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{s}]; \tag{1.36}$$

В самом деле, имеем:

$$\oint_L \varphi d\ell_i = \oint_L \varphi [dx_i] = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} [dx^i dx^i] =$$

$$= \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} e_{\ell ki} ds_\ell = \int_S [d\vec{s} \operatorname{grad} \varphi]_i; \tag{1.33}$$

$$\oint_L a_i d\ell_i = \oint_L a_i [dx_i] = \int_S \frac{\partial a_i}{\partial x_k} [dx_k dx_i] =$$

$$= \int_S \frac{\partial a_i}{\partial x_k} e_{\ell ki} ds_\ell = \int_S \operatorname{rot}_c \vec{a} \cdot ds_\ell; \tag{1.34}$$

[5] В декартовой системе координат $g_0 = 1$ и поэтому в формулах (??) и (??) мы можем заменить $\varepsilon_{ik\ell}$ на $e_{ik\ell}$.

$$\oint_L a_i b_k d\ell_k = \oint_L a_i b_k [dx_k] = \int_S \left(a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_m} + \frac{\partial a_i}{\partial x_m} b_k \right) [dx_m dx_k] =$$

$$= \int_S a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_m} e_{mk\ell} ds_\ell + \frac{\partial a_i}{\partial x_m} b_k e_{mk\ell} ds_\ell =$$

$$= \int a_i \operatorname{rot}_\ell ds_\ell + [\vec{b} d\vec{s}]_m \frac{\partial a_i}{\partial x_m}; \tag{1.35}$$

$$\oint [\vec{a} d\vec{\ell}]_i = \oint e_{ik\ell} a_k [dx_\ell] = \int e_{ik\ell} \frac{\partial a_k}{\partial x_m} [dx_m dx_\ell] =$$

$$= \int e_{ik\ell} e_{pm\ell} \frac{\partial a_k}{\partial x_m} ds_p = \int (\delta_{ip}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kp}) \frac{\partial a_k}{\partial x_m} ds_p =$$

$$= \int \frac{\partial a_m}{\partial x_m} ds_i - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} ds_k = \int \frac{\partial a_m}{\partial x_m} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k} ds_k -$$

$$- \int e_{ik\ell} \operatorname{rot}_\ell \vec{a} ds_k = \int \operatorname{div} \vec{a} ds_i - (d\vec{s} \operatorname{grad}) \vec{a} + [\operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{s}]_i. \tag{1.36}$$

Точно так же используя соотношения (1.31)–(1.32) доказываем интегральные теоремы, устанавливающие связь между интегралами по замкнутой поверхности S и интегралами по объёму V, заключённому внутри этой поверхности:

$$\oint \varphi d\vec{s} = \int \operatorname{grad} \varphi dv, \tag{1.37}$$

$$\oint_S \vec{a} d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dv, \tag{1.38}$$

$$\oint_S \vec{a}(\vec{b} d\vec{s}) = \int_V \vec{a} \operatorname{div} \vec{b} dv + \int_V (\vec{b} \operatorname{grad}) \vec{a} dv, \tag{1.39}$$

$$\oint_S [\vec{a} d\vec{s}] = - \int_V \operatorname{rot} \vec{a} dv. \tag{1.40}$$

Действительно, имеем:

$$\oint_S \varphi ds_i = \frac{1}{2!} \oint_S \varphi e_{ik\ell} [dx_k dx_\ell] = \frac{1}{2!} \int_V e_{ik\ell} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} [dx_m dx_k dx_\ell] =$$

$$= \frac{1}{2!} \int_V e_{ik\ell} e_{mk\ell} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} dV = \int_V \delta_{im} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} dv = \int_V \operatorname{grad}_i \varphi dv; \tag{1.37}$$

$$\oint\limits_S a_i ds_i = \frac{1}{2!}\oint\limits_S a_i e_{ik\ell}[dx_k dx_\ell] = \frac{1}{2!}\int\limits_V e_{ik\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}[dx_m dx_k dx_\ell] =$$

$$= \int\limits_V \delta_{im}\frac{\partial a_i}{\partial x_m}dv = \int\limits_V \operatorname{div}\vec{a}dv; \qquad (1.38)$$

$$\oint\limits_S a_i b_k ds_k = \frac{1}{2!}\oint\limits_S a_i b_k e_{kmn}[dx_m dx_n] =$$

$$= \frac{1}{2!}\int\limits_V e_{kmn}\frac{\partial}{\partial x_\ell}(a_i b_k)[dx_\ell dx_m dx_n] =$$

$$\int\limits_V \delta_{k\ell}\left(a_i\frac{\partial b_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}b_k\right)dv = \int\limits_V a_i \operatorname{div}\vec{b}dv + \int\limits_V (\vec{b}\operatorname{grad})a_i dv; \qquad (1.39)$$

$$\oint\limits_S [\vec{a}d\vec{s}]_i = \oint\limits_S e_{ik\ell}a_k ds_\ell = \frac{1}{2!}\oint\limits_S e_{ik\ell}a_k e_{\ell mn}[dx_m dx_n] =$$

$$= \frac{1}{2!}\int\limits_V e_{ik\ell}e_{\ell mn}\frac{\partial a_k}{\partial x_p}[dx_p dx_m dx_n] = \frac{1}{2!}\int\limits_V e_{ik\ell}e_{\ell mn}e_{pmn}\frac{\partial a_k}{\partial x_p}dv =$$

$$= \int\limits_V e_{ikp}\frac{\partial a_k}{\partial x_p}dv = -\int\limits_V \operatorname{rot}_i\vec{a}dv. \qquad (1.40)$$

Отмитим, что соотношение (1.34) называется теоремой Стокса (в узком смысле), а (1.38) — теоремой Гаусса[6]–Остроградского[7].

Если в формуле (1.38) взять в качестве $\vec{a}$ вектор $\psi\operatorname{grad}\varphi$, то получим:

$$\oint \psi\operatorname{grad}\varphi d\vec{s} = \int(\psi\Delta\varphi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi)dv, \qquad (1.41)$$

[6]Карл Фридрих Гаусс (771-1855), названный современниками королём математиков, родился в Брауншвейге (Германия) в семье водопроводчика. Когда Гауссу исполнилось три года он обнаружил свои удивительные математические способности. Свою вычислительную технику, где он был непревзойдённым виртуозом, он совершенствовал всю жизнь. После обнаружения малой планеты Цереры, предвычисленной Гауссом, он стал считаться величайшим математиком мира и получил почётное звание Геттингенского колосса. Гаусс вошел в историю математики и как один из создателей неевклидовой геометрии. Однако боязнь быть непонятым и осмеянным со стороны невежественных людей помешали ему обработать свои идеи по неевклидовой геометрии и опубликовать их. Трудно указать такую область чистой и прикладной математики, в которую бы Гаусс не внёс существенный вклад. Гаусс является также создателем абсолютной системы электромагнитных единиц.

[7]Михаил Васильевич Остроградский (1801-1861) русский математик, действительный член Петербугской академии наук. Остроградский был признанным научным авторитетом в области математики и механики. Им написан ряд работ по теории чисел, математическому анализу, алгебре, теории вероятностей. Остроградский по праву считается центром всей математической деятельности в России того времени.

где

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Формула (1.41), переписанная в симметричном виде

$$\oint(\psi\operatorname{grad} - \varphi\operatorname{grad})d\vec{s} = \int(\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)dv \qquad (1.42)$$

называется формулой Грина[8].

1.4 Криволинейная система координат в трёхмерном эвклидовом пространстве.

В некоторых задачах удобнее определять положение точки в пространстве не тремя декартовыми координатами[9] $,y,x$ а тремя новыми числами q^1,q^2,q^3, называемыми криволинейными координатами точки.

При этом предполается, что декартовы и криволинейные координаты связаны друг с другом системой трёх произвольных достаточное число раз дифференцируемых функций, якобиан которых отличен от нуля:

$$q^i = q^i(x,y,z). \qquad (1.43)$$

Поскольку якобиан системы (1.43) отличен от нуля, она может быть разрешена относительно декартовых[10] координат

$$\begin{aligned} x &= x(q^1,q^2,q^3) \\ y &= y(q^1,q^2,q^3) \\ z &= z(q^1,q^2,q^3) \end{aligned} \qquad (1.44)$$

[8] Джорж Грин (1793–1841) — английский математик-самоучка. Лишь в сорокалетнем возрасте Грин поступил в Кембриджский университет, который окончил в 1838 году. В 1828 году Грин опубликовал книгу “Опыт применения математического анализа к теории электричества и магнетизма”. В ней он впервые ввёл в науку понятие и термин потенциал и развил теорию электромагнетизма. Книга Грина,вышедшая незначительным тиражом, оставалась неизвестной до её переиздания (1845) даже в самой Англии. За это время другие учёные успели получить некоторые результаты, совпадающие с результатами Грина.

[9] Термин “координата” (от латинских слов sym-??? — “с” и otdinata — “упорядоченная”) был введён немецким математиком и философом Готтфридом Вильгельмом Лейбницем (1646-1716).

[10] Рене Декарт — выдающийся французский философ, физик, математик, физиолог. Родился в 1596 году в местечке Лаэ (департамент Турень) в дворянской семье. С 1626 по 1649 г. проживал в Голландии. Умер в 1650 году в Стакгольме. Математические исследования Декарта тесно связаны с его философскими и физическими работами. В “Геометрии” (1637) Декарт впервые ввёл понятие переменной величины и функции, что составило его основную заслугу в математике.

“Поворотным пунктом в математике — писал Энгельс — была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика и благодаря этому же стало немедленно необходимо дифференциальное и интегральное исчисление, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем”.

Согласно совершенно общим соотношениям (??) и (??) частные производные вида $\dfrac{\partial q^i}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial x}{\partial q^i}$ удовлетворяют следующим восемнадцати тождествам:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial x} = 1; \qquad \frac{\partial x}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial x}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial z} = 0;\\
&\frac{\partial y}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial y}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial y}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial z} = 0;\\
&\frac{\partial z}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial z}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial z} = 1;
\end{aligned} \tag{1.45}$$

и

$$\frac{\partial x}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial x} = \delta_i^k. \tag{1.46}$$

В декартовой системе координат квадрат расстояния между двумя точками имеет наиболее простой вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{1.47}$$

Подставляя в (1.47) дифференциалы системы (1.44) будем иметь

$$ds^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial x}\right) dq^i dq^k.$$

Таким образом для метрического тензора g_{ik} имеем следующее выражение

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial x}. \tag{1.48}$$

Пусть $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ — единичные векторы направленные по осям декартовой системы координат. Определим базисные векторы $\vec{a}_i$ в криволинейной системе координат следующим образом:

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz = \vec{a}_i dq^i. \tag{1.49}$$

Из (1.49) следует, что

$$\vec{a}_i = \vec{i}\frac{\partial x}{\partial q^i} + \vec{j}\frac{\partial y}{\partial q^i} + \vec{k}\frac{\partial z}{\partial q^i} \tag{1.50}$$

и обратно

$$\begin{aligned}
\vec{i} &= \vec{a}_i\frac{\partial q^i}{\partial x},\\
\vec{j} &= \vec{a}_i\frac{\partial q^i}{\partial y},\\
\vec{k} &= \vec{a}_i\frac{\partial q^i}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что
$$g_{ik} = \vec{a}_i \vec{a}_k. \tag{1.51}$$

Введём новый базис $\vec{a}^k$, взаимный к $\vec{a}_i$ такой что
$$\vec{a}^k \vec{a}_i = \delta_i^k. \tag{1.52}$$

Используя соотношение (1.46) нетрудно убедиться в том, что векторы $\vec{a}^k$, удовлетворяющие равенству (1.52), являются
$$\vec{a}^k = \vec{i}\frac{\partial q^k}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial q^k}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial q^k}{\partial z}. \tag{1.53}$$
Аналогично формуле (1.51) имеет место равенство
$$g^{ik} = \vec{a}^i \vec{a}^k. \tag{1.54}$$

Рассмотрим теперь произвольный вектор $\vec{A}$ разложенный тремя различными способами
$$\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z = \vec{a}_k A^k = \vec{a}^k A_k. \tag{1.55}$$

Компоненты A_x, A_y, A_z называются декартовыми, а A_k и A^k — ко- и контравариантными компонентами вектора $\vec{A}$.

Базисные векторы $\vec{a}_k$ и $\vec{a}^k$ не являются, вообще говоря, единичными. Поэтому часто вместо $\vec{a}_k$ и $\vec{a}^k$ рассматривают единичные векторы
$$\vec{e}_{(k)} = \frac{\vec{a}_k}{\sqrt{\vec{a}_k^2}} = \frac{\vec{a}_k}{\sqrt{g_{kk}}} \tag{1.56}$$
$$\vec{e}^{(k)} = \frac{\vec{a}^k}{\sqrt{\vec{a}^{k^2}}} = \frac{\vec{a}^k}{\sqrt{g^{kk}}} \tag{1.57}$$

Если разложить теперь произвольный вектор $\vec{A}$ по единичным векторам $\vec{e}_{(k)}$ или $\vec{e}^{(k)}$
$$\vec{A} = \vec{e}_{(k)} A^{(k)} = \vec{e}^{(k)} A_{(k)}, \tag{1.58}$$
то система чисел $A^{(k)}$ и $_{(k)}$ будет называться натуральными или физическими компонентами вектора $\vec{A}$. Связь физических компонент $A^{(k)}$ и $A_{(k)}$ с контра- и ковариантными компонентами вектора $\vec{A}$ находится без труда
$$A^{(k)} = \sqrt{g_{kk}} A^k, \tag{1.59}$$
$$A_{(k)} = \sqrt{g^{kk}} A_k, \tag{1.60}$$
(суммирования по k нет).

Физические компоненты $A^{(k)}$ и $A_{(k)}$ имеют наглядный смысл параллельных проекций вектора $\vec{A}$ на оси, задаваемые векторами $\vec{a}_k$ и $\vec{a}^k$ соответственно. Однако, из-за наличия множителей $\sqrt{d_{kk}}$ и $\sqrt{d^{kk}}$ они не подчиняются векторному закону преобразования (??) или (??) и, таким образом, не являются тензорами. В связи с этим все вычисления почти всегда производятся с ко- и контравариантными компонентами A_k или A^k и только в конце, если нужно, делается пересчёт на физические компоненты $A_{(k)}$ или $A^{(k)}$.

1.5 Ортогональная система координат.

Криволинейная система координат называется ортогональной, если взаимно ортогональны базисные вектора $\vec{a}_i$, т. е.

$$\vec{a}_i\vec{a}_k = \begin{cases} g_{ii} & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Таким образом, в ортогональной системе координат квадрат длины дуги ds между двумя близкими точками имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}(q^1)^2 + g_{22}(dq^2)^2 + g_{33}(dq^3)^2 = \\ &= (h_1dq^1)^2 + (h_2dq^2)^2 + (h_3dq^3)^2. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Величины

$$h_k = \sqrt{g_{kk}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^k}\right)^2} \tag{1.62}$$

называются параметрами Ламе[11].

В ортогональной системе координат

$$g^{kk} = \frac{1}{g_{kk}} = \frac{1}{h_k^2}, \tag{1.63}$$

$$g_0 = g_{11}g_{22}g_{33} = h_1^2h_2^2h_3^3, \tag{1.64}$$

$$\vec{a}^k = \frac{1}{h_k^2}\vec{a}_k, \tag{1.65}$$

$$\vec{e}_{(k)} = \frac{1}{h_k}\vec{a}_k = h_k\vec{a}^k = \vec{e}^{(k)}, \tag{1.66}$$

$$A_k = h_k^2A^k, \tag{1.67}$$

$$A^{(k)} = h_kA^k = \frac{1}{h_k}A_k = A_{(k)}. \tag{1.68}$$

Можно показать также, что символы Кристоффеля определяются следующи-

[11] Габриэль Ламе (1795-1870) — французский математик и инженер, член Парижской академии наук. В 1820–32 годах работал в России. Большое значение имеют его исследования по математической физике и теории упругости. Ламе разработал общую теорию криволинейных координат.

ми формулами:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{i,k\ell} = 0, && \Gamma^{i}_{k\ell} = 0, \\
&\Gamma_{\ell,kk} = -h_k \frac{\partial h_k}{\partial q^\ell}, && \Gamma^{\ell}_{kk} = -\frac{h_k}{h_\ell^2}\frac{\partial h_k}{\partial q^\ell}, \\
&\Gamma_{k,k\ell} = h_k \frac{\partial h_k}{\partial q^\ell}, && \Gamma^{k}_{k\ell} = \frac{1}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial q^\ell}, \\
&\Gamma_{k,kk} = h_k \frac{\partial h_k}{\partial q^k}, && \Gamma^{k}_{kk} = \frac{1}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial q^k}.
\end{aligned}
\tag{1.69}
$$

Заметим, что правило суммирования по дважды повторяющимся индексам не распространяется на формулы (1.63)–(1.69). Кроме того необходимо иметь в виду, что в формулах (1.69) индексы i, k, ℓ могут принимать лишь отличные друг от друга значения.

Рассмотрим наиболее употребительные ортогональные системы координат:

1. **Цилиндрические координаты.**

Цилиндрическими координатами являются переменные ρ, φ, z связанные с декартовыми следующими уравнениями:

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\cos\varphi, \\
y &= \rho\sin\varphi, \\
z &= z.
\end{aligned}
\tag{1.70}
$$

и обратно

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\
\varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \\
z &= z.
\end{aligned}
\tag{1.71}
$$

В цилиндрической системе координат имеем:

$$
ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \tag{1.72}
$$

Таким образом для параметров Ламе получаем следующие выражения:

$$
h_\rho = 1, \qquad h_\varphi = \rho, \qquad h_z = 1. \tag{1.73}
$$

Используя соотношения (1.50), (1.65) и (1.66) получаем следующие выражения для базисных векторов $\vec{a}_i$, $\vec{a}^i$ и $\vec{e}_{(i)} = \vec{e}^{(i)}$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_\rho\\ \vec{a}^\rho\\ \vec{e}_{(\rho)}\end{array}\right\} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi,$$
$$\vec{a}_\varphi = -\vec{i}\rho\sin\varphi + \vec{j}\rho\cos\varphi,$$
$$\vec{a}^\varphi = -\vec{i}\frac{1}{\rho}\sin\varphi + \vec{j}\frac{1}{\rho}\cos\varphi, \tag{1.74}$$
$$\vec{e}_{(\varphi)} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi,$$
$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_z\\ \vec{a}^z\\ \vec{e}_{(z)}\end{array}\right\} = \vec{k}.$$

Умножая скалярно $\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$ на $\vec{a}_i$, $\vec{a}^i$ и $\vec{e}_{(i)}$ получаем, соответственно, контравариантные, ковариантные и физические составляющие вектора $\vec{A}$:

$$\left.\begin{array}{l}A^\rho\\ A_\rho\\ A_{(\rho)}\end{array}\right\} = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi,$$
$$A^\varphi = -A_x\rho\sin\varphi + A_y\rho\cos\varphi,$$
$$A_\varphi = -A_x\frac{1}{\rho}\sin\varphi + A_y\frac{1}{\rho}\cos\varphi, \tag{1.75}$$
$$A_{(\varphi)} = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi,$$
$$\left.\begin{array}{l}A^z\\ A_z\\ A_{(z)}\end{array}\right\} = A_z.$$

2. **Сферические координаты.**

Сферическими координатами являются переменные r, θ, φ связанные с декартовыми координатами следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi,\\ y &= r\sin\theta\sin\varphi,\\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.76}$$

и обратно

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2},\\ \theta &= \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z},\\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{1.77}$$

В сферической системе координат имеем:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \tag{1.78}$$

Таким образом для параметров Ламе получаем следующие выражения:

$$h_r = 1, \qquad h_\theta = r, \qquad h_\varphi = r\sin\theta. \tag{1.79}$$

Используя соотношения (1.50), (1.65) и (1.66) как и в случае цилиндрических координат получаем следующие выражения для базисных векторов $\vec{a}_i$, $\vec{a}^i$ и $\vec{e}_{(i)} = \vec{e}^{(i)}$:

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{array}{l}\vec{a}_r\\ \vec{a}^{\,r}\\ \vec{e}_{(r)}\end{array}\right\} = \vec{i}\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\cos\theta,\\
&\vec{a}_\theta = \vec{i}r\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}r\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}r\cos\theta,\\
&\vec{a}^{\,\theta} = \vec{i}\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\frac{1}{r}\sin\theta,\\
&\vec{e}_{(\theta)} = \vec{i}\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta,\\
&\vec{a}_\varphi = -\vec{i}r\sin\theta\sin\varphi + \vec{j}r\sin\theta\cos\varphi,\\
&\vec{a}^{\varphi} = -\vec{i}\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi + \vec{j}\frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi,\\
&\vec{e}_{(\varphi)} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Так же как и в случае цилиндрических координат, по базисным векторам $\vec{a}_i$, $\vec{a}^i$ и $\vec{e}_{(i)}$ легко находится контравариантные, ковариантные и физические составляющие вектора $\vec{A}$:

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{array}{l}A^r\\ A_r\\ A_{(r)}\end{array}\right\} = A_x\sin\theta\cos\varphi + A_y\sin\theta\sin\varphi + A_z\cos\theta,\\
&A^\theta = A_x r\cos\theta\cos\varphi + A_y r\cos\theta\sin\varphi - A_z r\sin\varphi,\\
&A_\theta = A_x\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi + A_y\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi - A_z\frac{1}{r}\sin\theta,\\
&A_{(\theta)} = A_x\cos\theta\cos\theta + A_y\cos\theta\sin\varphi - A_z\sin\theta,\\
&A^\varphi = -A_x r\sin\theta\sin\varphi + A_y r\sin\theta\cos\varphi,\\
&A_\varphi = -A_x\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi + A_y\frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi,\\
&A_{(\varphi)} = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{1.81}$$

1.6 Основные дифференциальные операции в криволинейной системе координат.

Используя общие определения, введённые в § § **??** и **??** гл. **??**, рассмотрим основные дифференциальные операции в криволинейной системе координат применительно к векторам трёхмерного эвклидова пространства.

1. Градиент скалярной функции

$$\operatorname{grad}\varphi = \varphi_{,i}\vec{a}^{\,i}. \tag{1.82}$$

2. Производная векторной функции $\vec{A}$ по заданному неправлению

$$(\vec{B}\,\mathrm{grad})\vec{A} = B^k A_{i,k}\vec{a}^i. \tag{1.83}$$

3. Дивергенция векторной функции $\vec{A}$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = A^k{}_{,k}. \tag{1.84}$$

4. Ротор векторной функции $\vec{A}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \varepsilon^{ik\ell} A_{\ell,k}\vec{a}_i. \tag{1.85}$$

5. Оператор Лапласа

$$\Delta\varphi = g^{ik}\varphi_{,ik}. \tag{1.86}$$

Используя соотношения (??), (??), (??), (??) и (??) перепишем определения (1.82)–(1.86) в виде:

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial q^i}\vec{a}^i, \tag{1.87}$$

$$(\vec{B}\,\mathrm{grad})\vec{A} = B^k\left(\frac{\partial A_i}{\partial q^k} - \Gamma^\ell_{ik}A_\ell\right)\vec{a}^i, \tag{1.88}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial}{\partial q^k}(\sqrt{g_0}A^k), \tag{1.89}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g_0}}e^{ik\ell}\frac{\partial A_\ell}{\partial q^k}\vec{a}_i, \tag{1.90}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\sqrt{g_0}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial q^i}\right). \tag{1.91}$$

В ортогональной системе координат формулы (1.87)–(1.91) принимают вид[12]:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{grad}\,\varphi)_i &= \frac{\partial\varphi}{\partial q^i},\\
(\mathrm{grad}\,\varphi)^i &= \frac{1}{h_i^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q^i},\\
(\mathrm{grad}\,\varphi)_{(i)} &= \frac{1}{h_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q^i}.
\end{aligned} \tag{1.92}$$

[12]При доказательстве первой из формул (1.93) нужно воспользоваться выражением (1.69) для символов Кристоффеля и показать, что

$$\Gamma^\ell_{ik}A_\ell B^k = \frac{A_i}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial q^k}B^k - \frac{A_k}{h_k^2}\left(h_i B^i\frac{\partial h_i}{\partial q^k} - h_k B^k\frac{\partial h_k}{\partial q^i}\right).$$

В этом выражении, так же как и в формулах (1.92)–(1.96) предполагается суммирование только по немым индексам k при фиксированном значении индекса i.

$$\left\{(\vec B\,\mathrm{grad})\vec A\right\}_i = h_i\left[B^k\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{A_i}{h_i}\right)+\frac{1}{h_ih_k}\left(\frac{A_K}{h_k}\right)\left(h_iB^i\frac{\partial h_i}{\partial q^k}-h_kB^k\frac{\partial h_k}{\partial q^i}\right)\right],$$

$$\left\{(\vec B\,\mathrm{grad})\vec A\right\}^i = \frac{1}{h_i}\left[B^k\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{A_i}{h_i}\right)+\frac{1}{h_ih_k}\left(\frac{A_K}{h_k}\right)\left(h_iB^i\frac{\partial h_i}{\partial q^k}-h_kB^k\frac{\partial h_k}{\partial q^i}\right)\right],$$

$$\left\{(\vec B\,\mathrm{grad})\vec A\right\}_{(i)} = \frac{B_{(k)}}{h_k}\frac{\partial A_{(i)}}{\partial q^k}+\frac{1}{h_ih_k}A_{(k)}\left(B_{(i)}\frac{\partial h_i}{\partial q^k}-B_{(k)}\frac{\partial h_k}{\partial q^i}\right). \tag{1.93}$$

$$\mathrm{div}\,\vec A = \frac{1}{h_1h_2h_3}\cdot\frac{\partial}{\partial q^k}(h_1h_2h_3A^k) =$$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}(h_2h_3A_{(1)})+\frac{\partial}{\partial q^2}(h_1h_3A_{(2)})+\frac{\partial}{\partial q^3}(h_1h_2A_{(3)})\right] \tag{1.94}$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec A)^i = \frac{1}{h_1h_2h_3}e^{ik\ell}\frac{\partial A_\ell}{\partial q^k},$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec A)_i = \frac{h_i^2}{h_1h_2h_3}e^{ik\ell}\frac{\partial A_\ell}{\partial q^k}, \tag{1.95}$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec A)_{(i)} = \frac{h_i}{h_1h_2h_3}e^{ik\ell}\frac{\partial}{\partial q^k}(h_\ell A_{(\ell)}).$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_k^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q^k}\right). \tag{1.96}$$

Выпишем для справок физические составляющие рассмотренных дифференциальных операторов в цилиндрических и сферических координатах.

1. Цилиндрические координаты.

$$\mathrm{grad}_{(\rho)}\,\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho},$$

$$\mathrm{grad}_{(\varphi)}\,\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \tag{1.97}$$

$$\mathrm{grad}_{(z)}\,\psi = \frac{\partial\psi}{\partial z};$$

$$\left\{(\vec B\,\mathrm{grad})\vec A\right\}_{(\rho)} = B_{(\rho)}\frac{\partial A_{(\rho)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}B_{(\varphi)}\frac{\partial A_{(\rho)}}{\partial\varphi}+B_{(z)}\frac{\partial A_{(\rho)}}{\partial z}-\frac{1}{\rho}B_{(\varphi)}A_{(\varphi)},$$

$$\left\{(\vec B\,\mathrm{grad})\vec A\right\}_{(\varphi)} = B_{(\rho)}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}B_{(\varphi)}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial\varphi}+B_{(z)}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial z}+\frac{1}{\rho}B_{(\varphi)}A_{(\rho)},$$

$$\left\{(\vec B\,\mathrm{grad})\vec A\right\}_{(z)} = B_{(\rho)}\frac{\partial A_{(z)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}B_{(\varphi)}\frac{\partial A_{(z)}}{\partial\varphi}+B_{(z)}\frac{\partial a_{(z)}}{\partial z}; \tag{1.98}$$

$$\mathrm{div}\,\vec A = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_{(\rho)})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{(z)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_{(z)}}{\partial z}; \tag{1.99}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}_{(\rho)}\,\vec{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{(z)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial z},\\
\mathrm{rot}_{(\varphi)}\,\vec{A} &= \frac{\partial A_{(\rho)}}{\partial z} - \frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial \rho}\\
\mathrm{rot}_{(z)}\,\vec{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_{(\varphi)}) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{(\rho)}}{\partial \varphi};
\end{aligned} \tag{1.100}$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \psi}{\overline{\varphi^2}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \tag{1.101}$$

2. Сферические координаты.

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_{(r)}\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial r}, \\ \operatorname{grad}_{(\theta)}\psi &= \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \\ \operatorname{grad}_{(\varphi)}\psi &= \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}; \end{aligned} \tag{1.102}$$

$$\begin{aligned} \left\{(\vec{B}\operatorname{grad})\vec{A}\right\}_{(r)} = B_{(r)}\frac{\partial A_{(r)}}{\partial r} + \frac{1}{r}B_{(\theta)}\frac{\partial A_{(r)}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}B_{(\varphi)}\frac{\partial A_{(r)}}{\partial\varphi} - \\ - \frac{1}{r}A_{(\theta)}B_{(\theta)} - \frac{1}{r}A_{(\varphi)}B_{(\varphi)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{(\vec{B}\operatorname{grad})\vec{A}\right\}_{(\theta)} = B_{(r)}\frac{\partial A_{(\theta)}}{\partial r} + \frac{1}{r}B_{(\theta)}\frac{\partial A_{(\theta)}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}B_{(\varphi)}\frac{\partial A_{(\theta)}}{\partial\varphi} + \\ + \frac{1}{r}A_{(r)}B_{(\theta)} - \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}A_{(\varphi)}B_{(\varphi)}, \end{aligned} \tag{1.103}$$

$$\begin{aligned} \left\{(\vec{B}\operatorname{grad})\vec{A}\right\}_{(\varphi)} = B_{(r)}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial r} + \frac{1}{r}B_{(\theta)}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}B_{(\varphi)}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial\varphi} + \\ + \frac{1}{r}A_{(r)}B_{(\varphi)} - \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}A_{(\theta)}B_{(\varphi)}; \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_{(r)}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_{(\theta)}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial\varphi}; \tag{1.104}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_{(r)}\vec{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(-\frac{\partial A_{(\theta)}}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_{(\varphi)})\right), \\ \operatorname{rot}_{(\theta)}\vec{A} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_{(\varphi)}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_{(r)}}{\partial\varphi}, \\ \operatorname{rot}_{(r)}\vec{A} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial A_{(r)}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_{(\theta)}); \end{aligned} \tag{1.105}$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}. \tag{1.106}$$