$$\frac{\partial F}{\partial y^2} = F\left(\frac{f_1 - (m_1,\ m_2)f_2}{e^2}\ m_1^2 + \frac{f_2 - (m_1,\ m_2)f_1}{e^2}\ m_2^2\right)$$

имеет в U_1 *единственное решение* $F(y)$ *такое, что*

$$F(x) = A(x(s)) = B(s), \quad x \in M,$$

тогда и только тогда, когда $G(y) \equiv 0$ *для* $y \in U_1$.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР,
Новосибирск

Поступило
27 V 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кирейтов В.Р.* – ДАН, 1980, т. 252, № 1, с. 27. 2. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М., 1962. 3. *Сантало Л.А.* Введение в интегральную геометрию. М., 1956. 4. *Hamaker C., Smith K.T., Solmon D.S., Wagner S.L.* – J. Math., 1980, vol. 10, № 1, p. 253. 5. *Лаврентьев М.М., Кирейтов В.Р.* – ДАН, 1975, т. 221, № 5, с. 1027.

УДК 513.811 МАТЕМАТИКА

Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

ДВУМЕРНЫЕ ГЕОМЕТРИИ

(Представлено академиком А.Д. Александровым 19 III 1981)

Хорошо известно, что для всякой четверки точек на евклидовой плоскости шесть взаимных расстояний связаны между собой некоторым соотношением, геометрически означающим, что объем тетраэдра с вершинами, лежащими на плоскости, обращается в нуль. В работах по геометрии расстояний (см., например, [1]) было установлено, что если в метрическом пространстве $\mathfrak{M}$ для всякой четверки точек расстояния между ними удовлетворяют тому же уравнению, что и в случае евклидовой плоскости, то $\mathfrak{M}$ изометрично некоторому множеству точек этой плоскости. Аналогичные утверждения имеют место и для плоскости в пространстве постоянной кривизны (т.е. в пространстве Лобачевского и сферическом пространстве).

Основной результат настоящей заметки состоит в установлении того факта, что наличие зависимости между шестью расстояниями для всякой четверки точек пространства без указания вида этой зависимости достаточно жестко определяет геометрию пространства. Кроме геометрии плоскостей в пространствах постоянной кривизны, существуют еще семь геометрий, удовлетворяющих тому же условию. Требования, налагаемые на соотношение между расстояниями и метрику, сводятся в основном к условиям дифференцируемости функций и независимости некоторых уравнений. Полученный результат представляет собой приложение принципа феноменологической симметрии, предложенного Ю.И. Кулаковым [2].

Отметим, что постановку задачи настоящей заметки неявно можно обнаружить в знаменитой работе Г. Гельмгольца "О фактах, лежащих в основании геометрии" [3]. Действительно, там Гельмгольц высказывает соображение, что геометрия n-мерного пространства определяется существованием подвижных твердых тел с

$n(n+1)/2$ степенями свободы. Но тогда между всеми взаимными расстояниями для произвольных $n+2$ точек твердого тела должна существовать зависимость, так как иначе число степеней свободы уменьшится на единицу. В плоскости $(n=2)$ твердые тела движутся с тремя степенями свободы, а между шестью расстояниями для произвольных четырех точек имеется связь.

Приведем точные формулировки. Пусть даны произвольное множество $\mathfrak{M}$ и вещественная функция $a(x, y)$, определенная для любых различных $x \in \mathfrak{M}$, $y \in \mathfrak{M}$. Функцию a можно рассматривать как своего рода метрику в $\mathfrak{M}$. При этом, однако, мы не будем требовать выполнения обычных аксиом метрики. Мы будем предполагать, что выполняется следующее условие:

1) если $x \in \mathfrak{M}$ и $y \in \mathfrak{M}$ таковы, что для всякого $z \in \mathfrak{M}$ $a(x, z) = a(y, z)$ и $a(z, x) = a(z, y)$, то $x = y$.

Наделим множество $\mathfrak{M}$ слабейшей топологией, при которой функция a непрерывна. Если $x \in \mathfrak{M}$, то через $P(x)$ обозначим окрестность точки x в этой топологии, которая по условию 1) будет хаусдорфовой.

Построим отображение A: $\mathfrak{M}^4 \to R^6$, сопоставляя каждой четверке $(x, y, z, t) \in \mathfrak{M}^4$ точку $\langle a(x, y), a(x, z), a(x, t), a(y, z), a(y, t), a(z, t) \rangle$ пространства R^6. Пусть $N = A(\mathfrak{M}^4)$ есть совокупность всех точек в R^6, которые таким образом получаются. Мы будем предполагать, что выполнены еще следующие условия:

2) множество пар $(x, y) \in \mathfrak{M}^2$, для которых отображения a_{xy}: $z \in \mathfrak{M} \to \langle a(z, x), a(z, y) \rangle \in R^2$ и $\tilde{a}_{xy}$: $z \in \mathfrak{M} \to \langle a(x, z), a(y, z) \rangle \in R^2$ открыты, плотно в $\mathfrak{M}^2$;

3) существует такая функция Φ: $\mathfrak{E} \to R$ класса C^4, определенная в некоторой области $\mathfrak{E} \subset R^6$, что N есть открытое подмножество множества, задаваемого уравнением $\Phi = 0$, т.е.

$$\Phi(a(x, y), a(x, z), a(x, t), a(y, z), a(y, t), a(z, t)) = 0$$

для любой четверки $(x, y, z, t) \in \mathfrak{M}^4$;

4) отображение A: $\mathfrak{M}^4 \to N$ открыто относительно топологии в N, индуцированной из R^6;

5) множество точек N, где все производные первого порядка функции Φ отличны от нуля, плотно в N.

Смысл условия 1) состоит в том, что рассматриваются только те свойства пространства $\mathfrak{M}$, которые выражаются посредством функции a. Назначение условия 2) – обеспечить тот факт, что $\mathfrak{M}$ есть двумерное многообразие. Фактически, конечно, требование, содержащееся в условии 2), слабее чем двумерность $\mathfrak{M}$. Условие 3) является основным, составляя содержание принципа феноменологической симметрии, в общей схеме теории физических структур, предложенной Ю.И. Кулаковым [4] как средство классификации физических законов. Это условие выражает собой требование: шесть расстояний между любыми четырьмя точками должны быть зависимы. Смысл условий четвертого и пятого – определенная невырожденность отображения A. Условие 4) гарантирует, что ни для какой окрестности в $\mathfrak{M}^4$ ее образ при отображении A не будет иметь меньшую, чем у N, размерность. Условие 5) означает, грубо говоря, что существуют четверки, находящиеся в общем расположении.

Определение. Будем говорить, что функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ задает на множестве $\mathfrak{M}$ двумерную геометрию расстояний (физическую структуру) ранга 4, если выполнены условия 1)–5).

Две геометрии, заданные на множестве $\mathfrak{M}$ функциями a и b, будем считать эквивалентными, если $b(x, y) = \psi(a(x, y))$, где ψ – некоторая функция одной переменной.

Теорема. *Если функция* $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ *задает на множестве* $\mathfrak{M}$ *двумерную геометрию расстояний ранга* 4, *то для плотного в* $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ *множества пар* (x, y) *и некоторых их окрестностей* $P(x) \times P(y)$ *можно ввести координаты* x_1, x_2 *и* y_1, y_2, *посредством которых метрика* $a(x, y)$ *с точностью до эквивалентности определяется одним из следующих выражений*:

(1) $a(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$;

(2) $a(x, y) = \cos x_2 \cos y_2 \cos(x_1 - y_1) + \sin x_2 \sin y_2$;

(3) $a(x, y) = \operatorname{sh} x_2 \operatorname{sh} y_2 \cos(x_1 - y_1) - \operatorname{ch} x_2 \operatorname{ch} y_2$;

(4) $a(x, y) = (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2$;

(5) $a(x, y) = \operatorname{ch} x_2 \operatorname{ch} y_2 \cos(x_1 - y_1) - \operatorname{sh} x_2 \operatorname{sh} y_2$;

(6) $a(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$;

(7) $a(x, y) = (x_1 - y_1)^\alpha (x_2 - y_2)^\beta$;

(8) $a(x, y) = (x_1 - y_1)/(x_2 - y_2) + \ln(x_2 - y_2)$;

(9) $a(x, y) = \ln((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) + \gamma \operatorname{arctg}((x_1 - y_1)/(x_2 - y_2))$;

(10) $a(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + \delta_x x_2^2 + \delta_y y_2^2)/x_2 y_2$,

где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq 0$; δ_x, δ_y — постоянные для окрестностей $P(x), P(y)$, причем $\delta_x, \delta_y = 0, +1, -1$.

Выражения (1)–(7) определяют метрики хорошо известных геометрий: евклидовой плоскости (1), двумерной сферы (2), плоскости Лобачевского (3), плоскости Минковского (4), двумерного однополостного гиперболоида (5), симплектической плоскости (6), симплициальной плоскости (7). Метрики, определяемые выражениями (8)–(10), по-видимому, до настоящего времени в геометрии не рассматривались. Выражение (10), заметим, задает геометрию на несвязанном множестве $\mathfrak{M}$, на связанных компонентах которого будет либо симплектическая плоскость ($\delta_x = \delta_y = 0$), либо плоскость Лобачевского ($\delta_x = \delta_y = +1$), либо двумерный однополостной гиперболоид ($\delta_x = \delta_y = -1$).

По аналогии можно ввести систему аксиом для n-мерной геометрии расстояний ранга $n + 2$, однако к настоящему моменту полностью исследованы только одномерная [5] и двумерные геометрии. Есть некоторые основания думать, что в случае $n \geqslant 3$ имеют место только такие метрики, которые обобщают выражения (1)–(6), (10). Метрики же (7), (8), (9) специфичны для двумерной геометрии. Обратим внимание на появление симплектических пространств нечетной размерности, метрика которых не может быть введена на базе линейного пространства [2]. Например, метрика трехмерного симплектического пространства определяется выражением

$$a(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 - y_3.$$

Автор выражает глубокую благодарность проф. Ю.И. Решетняку за стимулирование исследований по геометрии расстояний и постоянное внимание к работе.

Новосибирский государственный педагогический институт

Поступило 27 III 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blumenthal L.M.* Theory and application of distance geometry. Oxford, 1953. 2. *Кулаков Ю.И.* – ДАН, 1970, т. 193, № 5, с. 985. 3. *Гельмгольц Г.* – В кн.: Об основаниях геометрии. М., 1956, с. 336. 4. *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур. Новосибирск, 1968. 5. *Михайличенко Г.Г.* Математическое дополнение к кн. Ю.М. Кулакова, 1968, с. 200–205.