

$$\begin{aligned}
(2\pi i)^r f(A) &= \sum_{1 \leq K \leq S} \sum_{1 \leq J \leq m_K} (J-1)! \int_{T_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \lambda_K)^J} \prod_{\nu=1}^r Z_{K,J}^\nu = \\
&= \sum_{1 \leq K \leq S} \sum_{1 \leq J \leq m_K} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_M f(\zeta) D^{J-1} \left[ \frac{\varphi^{-m}(\lambda)}{\zeta - \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_K} \varphi^m(\zeta) d\zeta \cdot \prod_{\nu=1}^r Z_{K,J}^\nu = \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_M f(\zeta) \left\{ \sum_K \sum_J D^{J-1} \left[ \frac{\varphi^{-m}(\lambda)}{\zeta - \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_K} \prod_{\nu=1}^r Z_{K,J}^\nu \right\} \varphi^m(\zeta) d\zeta = \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_M f(\zeta) R(A, \zeta) [\varphi^{-1}(A)]^m \varphi^m(\zeta) d\zeta.
\end{aligned}$$

Первое равенство следует из леммы 2, второе — из (9) и (11) после дифференцирования. Третье равенство очевидно, а последнее следует из  $r$ -кратного применения формулы (5.4.1) из [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ланкастер П. Теория матриц.— 2-е изд.— М.: Наука, 1982.— 272 с.
2. Mc Duffee C. The theory of matrices.— N. Y.: Chelsea, 1959.— 110 p.
3. Rinehart R. F. The equivalence of definitions of a matrix function // Amer. Math. Monthly.— 1955.— V. 62.— № 6.— P. 395—414.
4. Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А. Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства.— Новосибирск, 1975.— 115 с.
5. Худайберганов Г. Формула Карлемана для функций от матриц // Сиб. матем. журн.— 1988.— Т. 29.— № 1.— С. 207—208.
6. Фок В. А., Куни Ф. М. О введении „гасящей“ функции в дисперсионные соотношения // ДАН СССР.— 1959.— Т. 127.— № 6.— С. 1196—1198.
7. Айзенберг Л. А. О возможности аналитического продолжения в область функции, заданной на дуге границы этой области. Обобщенная теорема Фока-Куни // Комплекс. анализ и мат. физ.— Красноярск, 1988.— С. 5—11.
8. Айзенберг Л. А., Худайберганов Г. О кратной экстраполяции голоморфных функций от матриц и функций, голоморфных в произведении полуплоскостей // Изв. вузов. Математика.— 1988.— № 6.— С. 3—9.
9. Айзенберг Л. А., Южаков А. П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе.— Новосибирск, 1979.— 366 с.
10. Голузин Г. М., Крылов В. И. Обобщенная формула Carleman'a и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Матем. сб.— 1933.— Т. 40.— № 2.— С. 144—149.
11. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций.— М.—Л.: Гостехиздат, 1950.— 336 с.
12. Conchar A. A. On analytic continuation from the „edge of the wedge“ // Annal. Acad. Fenn.— 1985.— V. 10.— P. 221—225.

г. София (НРБ)

Поступила  
18.12.1989

*Г. Г. Михайличенко*

УДК 514.824

### НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ГИПОТЕЗЫ О БИНАРНОЙ СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВА (В РАМКАХ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР)

Физические предпосылки гипотезы о бинарной структуре пространства были изложены Ю. С. Владимировым [1] (с. 47—55). Действительно, классические пространственно-временные отношения присущи объектам макромира, т.е. достаточно сложным и массивным образованиям, состоящим из двух видов заряженных частиц. С другой стороны, идея бинарности отношений естественно включена в теорию физических структур (ТФС) Ю. И. Кулакова [2], которая исходит из очень общих понятий и постулатов. В данной работе автор, опираясь на гипотезу о бинарной структуре пространства и исполь-

зую некоторые свои результаты в ТФС [3], устанавливает симметрию метрики физического пространства и находит для этой метрики явное выражение.

Согласно [3] бинарная физическая структура в общих чертах и кратко может быть определена следующим образом. Пусть множества  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{N}$  суть  $m$ -мерное и  $n$ -мерное многообразия соответственно. Обозначим локальные координаты этих многообразий через  $x = (x^1, \dots, x^m)$  и  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$  и будем считать для определенности, что  $m \leq n$ . Пусть, далее, имеется функция  $f$ , сопоставляющая паре  $(i\alpha) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$  некоторое число  $f(i\alpha) \in R$ . Предполагается, что ее локальное координатное представление есть достаточно гладкая функция

$$f(i\alpha) = f(x(i), \xi(\alpha)) = f(x^1(i), \dots, x^m(i), \xi^1(\alpha), \dots, \xi^n(\alpha)), \quad (1)$$

в которую координаты  $x$  и  $\xi$  входят существенным образом. Построим функцию  $F$ , сопоставляя кортежу длины  $m + n + 2$  из прямого произведения  $\mathfrak{M}^{m+1} \times \mathfrak{N}^{n+1}$  все  $(m + 1)(n + 1)$  чисел, соответствующих упорядоченной по нему совокупности всех пар. Будем говорить, что функция  $f$  задает на множествах  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{N}$  бинарную физическую структуру ранга  $(n + 1, m + 1)$ , если локально в  $R^{(m+1)(n+1)}$  множество значений построенной функции  $F$  является подмножеством множества нулей некоторой достаточно гладкой функции  $\Phi$  от  $(m + 1)(n + 1)$  переменных с  $\text{grad} \Phi \neq 0$  на плотном в  $\mathfrak{M}^{m+1} \times \mathfrak{N}^{n+1}$  подмножестве.

В работе [3] приведена полная сводка локальных результатов для физических структур произвольного ранга. Запишем их здесь с точностью до эквивалентности (локально обратимой замены координат) и переобозначения  $\psi(f) \rightarrow f$ , где  $\psi$  — произвольная функция одной переменной:

$$m = 1, n = 1:$$

$$f(i\alpha) = x(i) + \xi(\alpha); \quad (2)$$

$$m = 1, n = 2:$$

$$f(i\alpha) = x(i)\xi(\alpha) + \eta(\alpha); \quad (3)$$

$$m = 1, n = 3:$$

$$f(i\alpha) = (x(i)\xi(\alpha) + \eta(\alpha))/(x(i) + \nu(\alpha)); \quad (4)$$

$$m = n \geq 2:$$

$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \dots + x^{n-1}(i)\xi^{n-1}(\alpha) + x^n(i) + \xi^n(\alpha), \quad (5)$$

$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \dots + x^n(i)\xi^n(\alpha); \quad (6)$$

$$m = n - 1 \geq 2:$$

$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \dots + x^{n-1}(i)\xi^{n-1}(\alpha) + \xi^n(\alpha). \quad (7)$$

Для всех остальных пар значений целых чисел  $m$  и  $n$  физические структуры ранга  $(n + 1, m + 1)$  не существуют.

В приложении к геометрии естественно ограничиться случаем  $m = n \geq 1$ , когда многообразия  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{N}$  имеют одинаковую размерность. Математическим выражением гипотезы о бинарной структуре пространства согласно соображениям Ю. С. Владимирова [1] и идеям Ю. И. Кулакова [4] будет следующая аксиома: *А. Существует такое взаимно однозначное локально гладкое отображение  $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ , что метрика пространства  $\mathfrak{M}$ , определяемая выражением*

$$L(ij) = f(i, \varphi(j)), \quad (8)$$

удовлетворяет следующему условию

$$L(ij) = \Theta(L(ji)), \quad (9)$$

где  $\Theta$  — некоторая функция одной переменной с  $\Theta' \neq 0$ .

Теорема. Метрика (8) пространства  $\mathfrak{M}$ , удовлетворяющая условию (9), с точностью до эквивалентности и переобозначения  $\psi(L) \rightarrow L$  задается одним из выражений (15), (28), (47), каждое из которых либо симметрично ( $a = +1$ ), либо антисимметрично ( $a = -1$ ).

Проведем доказательство сформулированной теоремы, рассматривая последовательно функции (2), (5), (6), задающие на множествах  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{N}$  бинарные физические структуры ранга  $(n+1, n+1)$  с  $n \geq 1$ .

Для функции (2) метрика  $L(ij)$  одномерного пространства  $\mathfrak{M}$  в соответствии с определением (8) запишется так:

$$L(ij) = x(i) + \varphi(j), \quad (10)$$

где  $\varphi(j) = \varphi(x(j))$ , а условие (9) примет вид

$$x(i) + \varphi(j) = \Theta(x(j) + \varphi(i)). \quad (11)$$

Продифференцируем равенство (11) по координате  $x(i): 1 = \Theta'(L(ij)) \times \times d\varphi(i)/dx(i)$ , и аналогично по координате  $x(j): d\varphi(j)/dx(j) = \Theta'(L(ji))$ , откуда получаем

$$(d\varphi(i)/dx(i))(d\varphi(j)/dx(j)) = 1. \quad (12)$$

Поскольку соотношение (12) выполняется для любой пары  $\langle ij \rangle$ , из него следует, что  $(d\varphi/dx)^2 = 1$ , т. е.

$$d\varphi/dx = a, \quad (13)$$

причем  $a^2 = 1$ . Для функции  $\varphi$  получено простое уравнение (13), интегрируя которое находим

$$\varphi = ax, \quad (14)$$

где опущена аддитивная постоянная, т. к. результат формулируется с точностью до переобозначения  $\psi(L) \rightarrow L$ . Подставим теперь функцию (14) в определение (10) метрики  $L(ij)$ :

$$L(ij) = x(i) + ax(j), \quad (15)$$

где  $a = \pm 1$ . Из полученного выражения (15) для метрики (10) одномерного пространства  $\mathfrak{M}$ , удовлетворяющего условию (11), следует, что она может быть только либо симметричной ( $a = +1$ ), либо антисимметричной ( $a = -1$ ).

Перейдем, далее, к рассмотрению функции (5), в которой  $n \geq 2$ . Согласно определению (8) для метрики  $L(ij)$  имеем выражение

$$L(ij) = x^\mu(i)\varphi_\mu(j) + x^n(i) + \varphi_n(j), \quad (16)$$

где  $\varphi_\mu(j) = \varphi_\mu(x^1(j), \dots, x^{n-1}(j), x^n(j))$  и аналогично для  $\varphi_n(j)$ . Суммирование по немому индексу  $\mu$  производится в пределах от 1 до  $n-1$ .

Подставим выражение (16) в условие (9):

$$x^\mu(i)\varphi_\mu(j) + x^n(i) + \varphi_n(j) = \Theta(x^\mu(j)\varphi_\mu(i) + x^n(j) + \varphi_n(i)), \quad (17)$$

затем продифференцируем его по координате  $x^\nu(i)$ ,  $\nu = 1, \dots, n-1$ :

$$\varphi_\nu(j) = \Theta'(L(ji))(x^\mu(j)\partial\varphi_\mu(i)/\partial x^\nu(i) + \partial\varphi_n(i)/\partial x^\nu(i)), \quad (18)$$

точно так же — по координате  $x^n(i)$ :

$$1 = \Theta'(L(ji))(x^\mu(j)\partial\varphi_\mu(i)/\partial x^n(i) + \partial\varphi_n(i)/\partial x^n(i)) \quad (19)$$

и, наконец, — по координате  $x^n(j)$ :

$$x^\mu(i)\partial\varphi_\mu(j)/\partial x^n(j) + \partial\varphi_n(j)/\partial x^n(j) = \Theta'(L(ji)). \quad (20)$$

Поскольку  $\theta' \neq 0$ , из равенств (18) и (19) получаем связь

$$\varphi_{\nu}(j) = \frac{x^{\mu}(j) \partial \varphi_{\mu}(i) / \partial x^{\nu}(i) + \partial \varphi_{\nu}(i) / \partial x^{\mu}(i)}{x^{\mu}(j) \partial \varphi_{\mu}(i) / \partial x^{\nu}(i) + \partial \varphi_{\nu}(i) / \partial x^{\mu}(i)}, \quad (21)$$

из которой легко выводим

$$\partial \varphi_{\mu} / \partial x^{\nu} = 0. \quad (22)$$

С учетом соотношения (22) из равенств (19) и (20) получаем

$$\partial \varphi_{\nu} / \partial x^{\nu} = a, \quad (23)$$

где  $a^2 = 1$ , в результате чего связь (21) значительно упростится:

$$a \varphi_{\nu}(j) = x^{\mu}(j) \partial \varphi_{\mu}(i) / \partial x^{\nu}(i) + \partial \varphi_{\nu}(i) / \partial x^{\mu}(i).$$

Из этой упрощенной связи следует, что  $\partial \varphi_{\mu} / \partial x^{\nu} = \text{const}$ , и поэтому с учетом (22) имеем

$$\varphi_{\mu} = b_{\mu\nu} x^{\nu} + c_{\mu}, \quad (24)$$

причем матрица коэффициентов  $b_{\mu\nu}$ , имеющая порядок  $n-1$  — невырожденная, т.к. функции  $\varphi_{\mu}$  независимы,  $c_{\mu} = \text{const}$ .

Подставим выражение (24) в предыдущую связь:

$$a(b_{\mu\nu} x^{\nu}(j) + c_{\nu}) = b_{\mu\nu} x^{\nu}(j) + \partial \varphi_{\nu}(i) / \partial x^{\mu}(i),$$

отсюда легко получаем

$$b_{\mu\nu} = a b_{\nu\mu}, \quad (25)$$

где  $a = \pm 1$ , и дополнительно

$$\partial \varphi_{\nu} / \partial x^{\mu} = a c_{\mu}. \quad (26)$$

Из результата (25) следует, что по перестановке индексов  $\mu, \nu$  коэффициенты  $b_{\mu\nu}$  выражения (24) либо симметричны ( $a = +1$ ), либо антисимметричны ( $a = -1$ ). В случае антисимметрии порядок матрицы  $b_{\mu\nu}$ , равный  $n-1$ , должен быть четным, т.к. определитель ее отличен от нуля, т.е.  $n = 3, 5, 7, \dots$ .

Соотношения (23) и (26) представляют собой систему  $n$  уравнений относительно функции  $\varphi_{\nu}$ . Решая эту систему, находим

$$\varphi_{\nu} = a c_{\mu} x^{\mu} + a x^{\nu}, \quad (27)$$

где аддитивная постоянная опущена по тем же соображениям, что и в решении (14).

Подставим выражения (24) и (27) для функций  $\varphi_{\mu}$  и  $\varphi_{\nu}$  в определение (16) метрики  $L(ij)$ :

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} b_{\mu\nu} x^{\mu}(i) x^{\nu}(j) + x^{\nu}(i) + a x^{\nu}(j), \quad (28)$$

где  $b_{\mu\nu} = a b_{\nu\mu}$ ,  $a = \pm 1$ , и произведено естественное переобозначение последней координаты:  $c_{\mu} x^{\mu} + x^{\nu} \rightarrow x^{\nu}$ . Из окончательного выражения (28) и свойства (25) следует, что  $L(ij) = aL(ji)$ , т.е. определяемая выражением (16) и удовлетворяющая условию (17) метрика  $n$ -мерного пространства  $\mathbb{M}$  может быть только либо симметричной ( $a = +1$ ), либо антисимметричной ( $a = -1$ ).

Рассмотрим в заключение доказательства функцию (6), в которой также  $n \geq 2$ . Для метрики  $L(ij)$  в соответствии с определением (8) можно выписать следующее выражение:

$$\dot{L}(ij) = x^\mu(i) \varphi_\mu(j), \quad (29)$$

где нёмое суммирование по индексу  $\mu$  производится в пределах от  $\mu = 1$  до  $\mu = n$  (сравни с выражением (16)).

Подставим выражение (29) в условие (9):

$$x^\mu(i) \varphi_\mu(j) = \Theta(x^\mu(j) \varphi_\mu(i)) \quad (30)$$

и продифференцируем его по координатам  $x^\nu(i)$ ,  $x^\sigma(i)$ ,  $x^\sigma(j)$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\nu(j) &= \Theta'(L(ji)) x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(i) / \partial x^\nu(i), \\ \varphi_\sigma(j) &= \Theta'(L(ji)) x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(i) / \partial x^\sigma(i), \\ x^\mu(i) \partial \varphi_\mu(j) / \partial x^\sigma(j) &= \Theta'(L(ji)) \varphi_\sigma(i), \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

отсюда, исключая производную  $\Theta'(L(ji))$ , находим два соотношения:

$$\frac{\varphi_\nu(j)}{\varphi_\sigma(j)} = \frac{x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(i) / \partial x^\nu(i)}{x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(i) / \partial x^\sigma(i)}, \quad (32)$$

$$\frac{\varphi_\nu(j)}{x^\mu(i) \partial \varphi_\mu(j) / \partial x^\sigma(j)} = \frac{x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(i) / \partial x^\nu(i)}{\varphi_\sigma(i)}, \quad (33)$$

которые выполняются тождественно по координатам точек  $i$  и  $j$ . Зафиксируем в первом из них координаты точки  $i$ :  $\varphi_\nu / b_{\nu\mu} x^\mu = \varphi_\sigma / b_{\sigma\mu} x^\mu$ , причем слева и справа нет суммирования по индексам  $\nu$  и  $\sigma$ , т.е.

$$\varphi_\nu = c b_{\nu\mu} x^\mu, \quad (34)$$

где  $b_{\nu\mu} = \text{const}$ , а  $c$  — некоторая функция координат. В силу предполагаемой независимости функций  $\varphi_\mu$ , определитель матрицы коэффициентов  $b_{\nu\mu}$  должен быть отличен от нуля и, кроме того,  $c \neq 0$ .

Итак, из первого соотношения (32) было получено выражение (34), на которое второе соотношение (33) налагает некоторые дополнительные ограничения. Положим в нем сначала  $i = j$ :

$$\frac{\varphi_\nu(j)}{x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(j) / \partial x^\sigma(j)} = \frac{x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(j) / \partial x^\nu(j)}{\varphi_\sigma(j)},$$

а затем  $\nu = \sigma$ , отсюда получаем  $\varphi_\nu = a_\nu x^\mu \partial \varphi_\mu / \partial x^\nu$ , причем в правой части по индексу  $\nu$  нет суммирования и  $a_\nu^2 = 1$ . Подставляя последнее соотношение в предыдущее, получим  $a_\nu a_\sigma = 1$ , а поскольку  $a_\nu = 1/a_\nu$ , то  $a_\nu = a_\sigma = a$ . Таким образом, следствием соотношения (33) является уравнение

$$\varphi_\nu = a x^\mu \partial \varphi_\mu / \partial x^\nu, \quad (35)$$

где  $a^2 = 1$ .

В уравнение (35), а также в исходные соотношения (32) и (33) подставим полученное ранее выражение (34), получим

$$b_{\mu\sigma} x^\mu x^\sigma \partial c / \partial x^\nu = (a b_{\nu\mu} - b_{\mu\nu}) x^\mu c, \quad (36)$$

$$b_{\nu\mu} x^\mu(j) / b_{\sigma\mu} x^\mu(j) = \frac{b_{\mu\nu} x^\mu(j) c(i) + b_{\mu\epsilon} x^\mu(j) x^\epsilon(i) \partial c(i) / \partial x^\nu(i)}{b_{\mu\sigma} x^\mu(j) c(i) + b_{\mu\epsilon} x^\mu(j) x^\epsilon(i) \partial c(i) / \partial x^\sigma(i)}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \frac{b_{\nu\mu} x^\mu(j) c(j)}{b_{\mu\sigma} x^\mu(i) c(j) + b_{\mu\epsilon} x^\mu(i) x^\epsilon(j) \partial c(j) / \partial x^\sigma(j)} = \\ & = \frac{b_{\mu\nu} x^\mu(j) c(i) + b_{\mu\epsilon} x^\mu(j) x^\epsilon(i) \partial c(i) / \partial x^\nu(i)}{b_{\sigma\mu} x^\mu(i) c(i)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Далее соотношения (36), (37), (38) естественно исследовать, предполагая, что либо  $b_{\mu\nu} = ab_{\nu\mu}$  для всех индексов  $\mu, \nu$ , либо  $b_{\mu\nu} \neq ab_{\nu\mu}$  для некоторых индексов  $\mu, \nu$ . Рассмотрим сначала первый случай:

$$b_{\mu\nu} = ab_{\nu\mu}, \quad (39)$$

когда матрица коэффициентов  $b_{\mu\nu}$  в выражении (34) симметрична ( $a = +1$ ) или антисимметрична ( $a = -1$ ) по перестановке индексов  $\mu$  и  $\nu$ . Соотношение (37) в случае (39) значительно упростится:  $b_{\nu\mu} x^\mu(j) \partial c(i) / \partial x^\sigma(i) = = b_{\sigma\mu} x^\mu(j) \partial c(i) / \partial x^\nu(i)$ , отсюда, дифференцируя по координате  $x^\mu(j)$ , получаем связь производных  $b_{\nu\mu} \partial c / \partial x^\sigma = b_{\sigma\mu} \partial c / \partial x^\nu$ . Используя полученную связь, покажем, что  $c = \text{const}$ . Действительно, предположим, что хотя бы одна из производных функции  $c$  не обращается в нуль, напр.,  $\partial c / \partial x^{\nu'} \neq 0$ . Тогда при  $\sigma = \nu'$  из предыдущей связи находим  $b_{\nu\mu} = b_{\nu\mu} \partial c / \partial x^\nu (\partial c / \partial x^{\nu'})^{-1}$ . Но при таком мультипликативном расщеплении индексов  $\nu$  и  $\mu$  в коэффициентах  $b_{\nu\mu}$  определитель их матрицы обращается в нуль, что противоречит независимости функций (34). Таким образом, предположение о том, что хотя бы одна из производных функции  $c$  не обращается в нуль, приводит к противоречию. Следовательно,  $\partial c / \partial x^\mu = 0, \mu = 1, \dots, n$ , и поэтому  $c = \text{const}$  при условии (39).

Рассмотрим теперь второй случай, когда

$$b_{\mu\nu} \neq ab_{\nu\mu} \quad (40)$$

для некоторых индексов  $\mu, \nu$ , причем, как это следует из уравнения (36),  $b_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 0$ .

Подставим уравнение (36) в соотношение (38):

$$\begin{aligned} b_{\nu\mu} x^\mu(j) / [b_{\mu\sigma} x^\mu(i) + c_\sigma(j) \tilde{c}_\mu(j) x^\mu(i)] = \\ = [b_{\mu\nu} x^\mu(j) + c_\nu(i) \tilde{c}_\mu(i) x^\mu(j)] / b_{\sigma\mu} x^\mu(i), \end{aligned} \quad (41)$$

где введены новые обозначения:  $c_\nu = (ab_{\nu\mu} - b_{\mu\nu}) x^\mu / b_{\mu\mu} x^\mu x^\nu$ ,  $\tilde{c}_\mu = b_{\mu\mu} x^\nu$ , из которых следует, что  $c_\nu \neq 0$  и  $\tilde{c}_\mu \neq 0$  для некоторых индексов  $\nu$  и  $\mu$ . По равенству (41) получаем

$$b_{\mu\nu} x^\mu(j) + c_\nu(i) \tilde{c}_\mu(i) x^\mu(j) = A(i, j) b_{\nu\mu} x^\mu(j), \quad (42)$$

где для коэффициента  $A(i, j)$  имеем перестановочное свойство

$$A(i, j) A(j, i) = 1. \quad (43)$$

Предположим, далее, что в рамках условия (40) коэффициент  $A(i, j)$  зависит от координат обеих точек  $i$  и  $j$  явным образом:

$$A(i, j) \neq A(i) \text{ и } A(i, j) \neq A(j). \quad (44)$$

Продифференцируем соотношение (42), выполняющееся тождественно, по координате  $x^\mu(j)$ :

$$b_{\mu\nu} + c_\nu(i) \tilde{c}_\mu(i) = b_{\nu\mu} A(i, j) + b_{\nu\mu} x^\mu(j) \partial A(i, j) / \partial x^\mu(j),$$

после чего зафиксируем все координаты точки  $j$ :  $b_{\mu\nu} = A(i) b_{\nu\mu} - c_\nu(i) \tilde{c}_\mu(i) + + d_\mu \tilde{d}_\mu(i)$ . Полученную связь подставим в исходное соотношение (42), решим его относительно  $b_{\nu\mu} x^\mu(j)$  и продифференцируем по  $x^\mu(j)$ :

$$b_{\nu\mu} = d_{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}(j)} \left( \frac{\tilde{d}_{\nu}(i) x^{\mu}(j)}{A(i, j) - A(i)} \right),$$

причем в силу предположения (44) знаменатель  $A(i, j) - A(i)$  в правой части отличен от нуля. Но мультипликативное расщепление индексов  $\nu$  и  $\mu$  в полученном для  $b_{\nu\mu}$  выражении означает, что определитель матрицы  $b_{\nu\mu}$  равен нулю, что противоречит независимости функций (34).

Предположим, что

$$A(i, j) = A(i) \text{ или } A(i, j) = A(j) \quad (45)$$

дополнительно к условию (40). Перестановочное свойство (43) в этом случае означает, очевидно, что

$$A(i, j) = A = \pm 1. \quad (43')$$

Соотношение (42) продифференцируем по координате  $x^{\mu}(j)$ , учитывая (43'):  $b_{\nu\mu} + c_{\nu}(i) \tilde{c}_{\mu}(i) = A b_{\nu\mu}$ , откуда следует  $c_{\nu}(i) \tilde{c}_{\mu}(i) = c_{\nu}(j) \tilde{c}_{\mu}(j)$ . Пусть при некотором  $\nu = \nu'$  отличен от нуля коэффициент  $c_{\nu'}$ . Тогда  $\tilde{c}_{\mu}(i) = c_{\nu'}(j) \tilde{c}_{\mu}(j) / c_{\nu'}(i)$  и поскольку по введенному в соотношении (40) обозначению  $\tilde{c}_{\mu}(i) = b_{\nu\mu} x^{\nu}(i)$ , имеем  $b_{\nu\mu} x^{\nu}(i) = c_{\nu'}(j) \tilde{c}_{\mu}(j) / c_{\nu'}(i)$ . Дифференцируя этот результат по координате  $x^{\nu}(i)$ , получаем мультипликативное расщепление индексов  $\mu$  и  $\nu$  в выражении для коэффициентов  $b_{\nu\mu}$  функций (34), что противоречит их независимости.

Таким образом, условие (41) необходимо приводит к противоречию с независимостью функций (34) и поэтому не может выполняться. Остается только условие (39), при котором, как было показано выше, в выражениях (34)  $c = \text{const}$ . Без ограничения общности, очевидно, можно положить  $c = 1$  и тогда

$$\varphi_{\mu} = b_{\nu\mu} x^{\nu}, \quad (46)$$

причем  $b_{\nu\mu} = a b_{\nu\mu}$ , и матрица коэффициентов  $b_{\nu\mu}$  невырожденная. В случае  $a = -1$ , когда  $b_{\nu\mu} = -b_{\nu\mu}$ , порядок матрицы  $b_{\nu\mu}$ , равный  $n$ , должен быть четным, т. е.  $n = 2, 4, 6, \dots$ . Подставим найденные выражения (46) для функций  $\varphi_{\mu}$  в определение метрики (29):

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n b_{\nu\mu} x^{\mu}(i) x^{\nu}(j), \quad (47)$$

где  $b_{\nu\mu} = a b_{\nu\mu}$ ,  $a = \pm 1$ , которая оказывается либо симметричной ( $a = +1$ ), либо антисимметричной ( $a = -1$ ), т. е.  $L(ij) = aL(ji)$ . Теорема полностью доказана.

Рассмотрим более подробно геометрическую интерпретацию полученных результатов. Предположим сначала, что  $a = +1$ , т. е. метрика  $L(ij)$  симметрична:

$$L(ij) = L(ji). \quad (48)$$

Выражение (15) в этом случае будет следующим:

$$L(ij) = x(i) + x(j), \quad (15')$$

т. е.  $\exp L(ij)$  локально представляет собой скалярное произведение.

Выражение (28) при  $a = +1$  запишется так:

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} b_{\nu\mu} x^{\mu}(i) x^{\nu}(j) + x^n(i) + x^n(j), \quad (28')$$

где  $b_{\mu\nu} = b_{\nu\mu}$ . Пусть для всех точек  $i \in \mathfrak{M}$  дополнительно выполняется условие  $L(ii) = 0$ , которое уменьшает число независимых координат, т. к.  $2x^n + b_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 0$ . Если воспользоваться этой связью координат, то для метрики (28') получим выражение  $L(ij) = -0,5b_{\mu\nu} (x^\mu(i) - x^\mu(j))(x^\nu(i) - x^\nu(j))$ . Вследствие симметрии и невырожденности матрицы  $b_{\mu\nu}$  можно ввести такую локальную обратимую замену координат  $x \rightarrow y$ , что эта квадратичная форма станет диагональной:

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \epsilon_\mu (y^\mu(i) - y^\mu(j))^2, \quad (49)$$

причем  $\epsilon_\mu = \pm 1$ . Полученное выражение (49) задает локально симметричную невырожденную квадратичную метрику в евклидовом или псевдоевклидовом пространстве. Вопрос об интерпретации исходного выражения (28') без дополнительного условия  $L(ii) = 0$  остается открытым.

Выражение (47) при  $a = +1$ , когда  $b_{\mu\nu} = b_{\nu\mu}$ , диагоналируем некоторой локально обратимой заменой координат  $x \rightarrow y$ :

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^n \epsilon_\mu y^\mu(i) y^\mu(j), \quad (50)$$

где  $\epsilon_\mu = \pm 1$ . Метрику (50) естественно интерпретировать как симметричное скалярное произведение в некотором евклидовом или псевдоевклидовом пространстве. Налагая на нее естественное дополнительное условие  $L(ii) = \text{const}$ , выделяем класс неевклидовых пространств постоянной кривизны (гиперсферы).

Предположим теперь, что  $a = -1$ , т. е. метрика  $L(ij)$  антисимметрична:

$$L(ij) = -L(ji).$$

Выражения (15), (28), (47) при  $a = -1$  запишем соответственно так:

$$L(ij) = x(i) - x(j), \quad (15'')$$

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} b_{\mu\nu} x^\mu(i) x^\nu(j) + x^n(i) - x^n(j), \quad n = 3, 5, \dots, \quad (28'')$$

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n b_{\mu\nu} x^\mu(i) x^\nu(j), \quad n = 2, 4, \dots, \quad (47'')$$

причем  $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$ . Первые два выражения (15'') и (28'') задают нелинейную невырожденную метрику симплектического пространства *нечетной* размерности, в то время как третье выражение (47'') задает обычную билинейную невырожденную метрику симплектического пространства *четной* размерности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров Ю. С. Пространство — время: явные и скрытые размерности. — М. Наука, 1989. — 191 с.
2. Кулаков Ю. И. Элементы теории физических структур (дополнение Михайличенко Г. Г.). — Новосибирск, 1968. — 226 с.
3. Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // ДАН СССР. — 1972. — Т. 206. — № 5. — С. 1056—1058.
4. Кулаков Ю. И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур // ДАН СССР. — 1970. — Т. 193. — № 5. — С. 985—987.

г. Новосибирск

Поступила  
25.12.1989