УДК 514.1 + 512.816

Автореферат

ПРОСТЕЙШИЕ ПОЛИМЕТРИЧЕСКИЕ ГЕОМЕТРИИ

Г.Г. Михайличенко

Полиметрические геометрии, то есть геометрии с более чем одним расстоянием, естественно возникают в теории физических структур Ю.И.Кулакова. В этой теории метрика пространства понимается в самом общем смысле как числовая функция пары точек. По аксиоме феноменологической симметрии все взаимные расстояния для некоторого конечного числа точек должны быть функционально связаны. В работе определяются феноменологически симметричные геометрии с $s \geq 2$ расстояниями и в простейших случаях приводятся их полные классификации. Обсуждаются физические и математические интерпретации таких геометрий. В частности, термодинамика может быть аксиоматически описана как геометрия с тремя расстояниями, выраженными в терминах измеряемых в опыте температуры и работы.

УДК 514.1 + 512.816

Г.Г.Михайличенко

ПРОСТЕЙШИЕ ПОЛИМЕТРИЧЕСКИЕ ГЕОМЕТРИИ

Полиметрические геометрии, то есть геометрии с более чем одним расстоянием, естественно возникают в теории физических структур Ю.И.Кулакова [1], в частности, при аксиоматическом обосновании термодинамики. В этой теории метрика пространства понимается в самом общем смысле как числовая функция пары точек и по аксиоме феноменологической симметрии все взаимные расстояния для некоторого конечного числа точек должны быть функционально связаны.

Ранее автором было дано определение феноменологически симметричных геометрий с одним расстоянием [2]. В настоящей работе определяются полиметрические феноменологически симметричные геометрии ранга $m \geqslant 3$ с $s \geqslant 2$ расстояниями, а в случае минимального ранга $m = 3$ для $s = 2$ и $s = 3$ приводятся их полные классификации.

Пусть $s \geqslant 2$, $n \geqslant 1$ и $\mathfrak{M}$ – гладкое sn-мерное многообразие, точки которого обозначим строчными латинскими буквами. И пусть дано функциональное соответствие $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^s$, сопоставляющее паре $\langle ij \rangle$ из области его определения $\sigma_f \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ некоторую совокупность s вещественных чисел $f(ij) = (f^1(ij), \ldots, f^s(ij)) \in R^s$. Функциональным соответствием $\varphi: A \to B$ (сокращенно – ф.с.), как известно, называется однозначное отображение некоторого подмножества из A в B. Ф.с. $f = (f^1, \ldots, f^s)$ будем называть s-метрикой, не требуя, однако, от ее компонент выполнения аксиом обычной I-метрики.

Для некоторого кортежа $\langle k_1 \ldots k_n \rangle \in \mathfrak{M}^n$ длины n введем ф.с. $\bar{f}^n: \mathfrak{M} \to R^{sn}$ и $\bar{\bar{f}}^n: \mathfrak{M} \to R^{sn}$, сопоставляя то-

чке $i \in \mathfrak{M}$ точки $(f(ik_1), \ldots, f(ik_n)) \in R^{sn}$ и $(f(k_1 i), \ldots, f(k_n i)) \in R^{sn}$ соответственно, если пары $\langle ik_1 \rangle, \ldots, \langle ik_n \rangle$ и $\langle k_1 i \rangle, \ldots, \langle k_n i \rangle$ принадлежат $\mathfrak{G}_f$. Будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. Область определения $\mathfrak{G}_f$ ф.с. $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^s$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множество.

II. Ф.с. f в области своего определения $\mathfrak{G}_f$ есть достаточно гладкая функция.

III. В $\mathfrak{M}^n$ плотно множество таких кортежей длины n, для которых ф.с. $\bar{f}^n (\bar{\bar{f}}^n)$ имеет максимальный ранг, равный sn, в точках плотного в $\mathfrak{M}$ множества.

Гладкую полиметрику, для которой выполняется аксиома III, будем называть невырожденной.

Пусть, далее, $m = n + 2 \geqslant 3$. Введем ф.с. $F: \mathfrak{M}^m \to R^{sm(m-1)/2}$, сопоставляя кортежу $\langle ijk \ldots vw \rangle \in \mathfrak{M}^m$ длины m точку $(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) \in R^{sm(m-1)/2}$, координаты которой в $R^{sm(m-1)/2}$ задаются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью $sm(m-1)/2$ расстояний для всех пар его точек $\langle ij \rangle, \langle ik \rangle, \ldots, \langle vw \rangle$, если эти пары принадлежат $\mathfrak{G}_f$. Область определения введенного ф.с. F обозначим через $\mathfrak{G}_F$.

О п р е д е л е н и е I. Будем говорить, что ф.с. $f: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^s$ задает на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ s-метрическую феноменологически симметричную геометрию ранга $m = n + 2$, если, кроме аксиом I, II, III, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IУ. Существует плотное в $\mathfrak{M}^m$ множество, для каждого кортежа которого $\langle ijk \ldots vw \rangle$ длины $m = n + 2$ и некоторой его окрестности $\mathcal{U}$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi: \mathcal{E} \to R^s$, что $\operatorname{rang} \Phi = s$ в области $\mathcal{E} \subset R^{sm(m-1)/2}$

и $F(\mathcal{U}) = \ker \Phi$, то есть

$$\Phi(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) = 0 \qquad (I)$$

для всех кортежей из $\mathcal{U}$.

Аксиома IУ выражает принцип феноменологической симметрии, согласно которому $sm(m-1)/2$ расстояний между точками любого кортежа длины $m = n+2$ из $\mathcal{U}$ должны быть функционально связаны, удовлетворяя системе s независимых уравнений (I).

Пусть $x^1, \ldots, x^{sn}$ – локальные координаты в многообразии $\mathcal{M}$. Тогда для s -метрики f в некоторой окрестности каждой пары $\langle ij \rangle \in \mathcal{G}_f$ можно записать ее координатное представление:

$$f(ij) = f(x^1(i), \ldots, x^{sn}(i), x^1(j), \ldots, x^{sn}(j)), \qquad (2)$$

свойства которого задаются аксиомами II и III.

Определение 2. Будем говорить, что гладкие ф.с. $f: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to R^s$ и $g: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to R^s$ с открытыми и плотными в $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ областями определения $\mathcal{G}_f$ и $\mathcal{G}_g$ эквивалентны, если существуют такие локальные диффеоморфизмы $\lambda: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ и $\psi: R^s \to R^s$, что для открытого и плотного в $\mathcal{G}_f$ множества пар $\langle ij \rangle$ пара $\langle \lambda(i), \lambda(j) \rangle \in \mathcal{G}_g$ и имеет место соотношение $f(ij) = \psi(g(\lambda(i), \lambda(j)))$.

Теорема I. С точностью до эквивалентности существуют только две невырожденные 2-метрики $f = (f^1, f^2)$, задающие на двумерном многообразии $\mathcal{M}$ феноменологически симметричные геометрии ранга 3. В надлежаще выбранных в $\mathcal{M}$ системах локальных координат x, y эти 2-метрики могут быть представлены следующими выражениями:

$$f^1(ij) = x(i) - x(j), \; f^2(ij) = y(i) - y(j); \qquad (3)$$

$$f^1(ij) = (x(i) - x(j))\,y(i)\,,\quad f^2(ij) = (x(i) - x(j))\,y(j)\,. \tag{4}$$

Т е о р е м а 2. С точностью до эквивалентности 3-метрика $f = (f^1, f^2, f^3)$, задающая на трехмерном многообразии M феноменологически симметричную геометрию ранга 3, в надлежаще выбранных в M системах локальных координат x, y, z может быть представлена одним из следующих семи выражений:

$$f^1(ij) = x(i) - x(j),\ f^2(ij) = y(i) - y(j),\ f^3(ij) = z(i) - z(j); \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= y(i) - y(j),\\ f^2(ij) &= (x(i) - x(j))\,y(i) + z(i) - z(j),\\ f^3(ij) &= (x(i) - x(j))\,y(j) + z(i) - z(j); \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &f^1(ij) = (x(i) - x(j))^2 \exp[(y(i) - y(j))/(x(i) - x(j))],\\ &f^2(ij) = (x(i) - x(j))\,z(i),\ f^3(ij) = (x(i) - x(j))\,z(j); \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &f^1(ij) = (x(i) - x(j))^p\,(y(i) - y(j)),\\ &f^2(ij) = (x(i) - x(j))\,z(i),\ f^3(ij) = (x(i) - x(j))\,z(j); \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= [(x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2]\exp\left(\gamma\,\mathrm{arctg}\,\frac{y(i) - y(j)}{x(i) - x(j)}\right),\\ f^2(ij) &= z(i) + \mathrm{arctg}\,[(y(i) - y(j))/(x(i) - x(j))],\\ f^3(ij) &= z(j) + \mathrm{arctg}\,[(y(i) - y(j))/(x(i) - x(j))]; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= \cos y(i)\cos y(j)\cos(x(i) - x(j)) + \sin y(i)\sin y(j),\\ f^2(ij) &= z(i) + \mathrm{sgn}\left(\frac{\partial f^1(ij)}{\partial y(i)}\right)\arcsin\left(\frac{\sin(x(i) - x(j))\cos y(i)}{\sqrt{1 - (f^1(ij))^2}}\right),\\ f^3(ij) &= z(j) - \mathrm{sgn}\left(\frac{\partial f^1(ij)}{\partial y(j)}\right)\arcsin\left(\frac{\sin(x(i) - x(j))\cos y(j)}{\sqrt{1 - (f^1(ij))^2}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= (x(i)-x(j))\,y(i)y(j), \\ f^2(ij) &= z(i) + 1/(x(i)-x(j))\,y^2(i), \\ f^3(ij) &= z(j) - 1/(x(i)-x(j))\,y^2(j), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

где $|\rho| \leq 1$ и $|\gamma| < \infty$.

В доказательствах теорем I и 2 используются групповые свойства полиметрических геометрий. Оказывается, что невырожденная s - метрика $f = (f^1, \ldots, f^s)$, задающая на sn-мерном многообразии M феноменологически симметричную геометрию ранга $m = n + 2$ (см. определение I) допускает $sn(n+1)/2$ - мерную группу локальных движений, относительно которой каждая компонента s-метрики является двухточечным инвариантом. В частности, 2-метрики (3), (4) и 3-метрики (5)-(II) допускают двух- и трехпараметрические группы движений соответственно.

Компоненты 2-метрики (3) и 3-метрики (5) можно, очевидно, интерпретировать проекциями вектора на координатные оси. Соответствующие функциональные связи (I) задаются системами двух и трех независимых уравнений:

$$f^\alpha(ij) - f^\alpha(ik) + f^\alpha(jk) = 0,$$

где $\alpha = 1,2$ для 2-метрики (3) и $\alpha = 1,2,3$ для 3-метрики (5).

2-метрика (4) и 3-метрика (6) допускают содержательную физическую интерпретацию в термодинамике. Компоненты 2-метрики (4) в этой интерпретации суть количества тепла, которые термодинамическая система отдает внешним телам при ее переходе из состояния i в состояние j по двум путям TS и ST, составленным из изотермического ($T = const$) и адиабатического ($S = const$) процессов:

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= Q^{TS}(ij) = (S(i)-S(j))T(i), \\ f^2(ij) &= Q^{ST}(ij) = (S(i)-S(j))T(j), \end{aligned}\right\}$$

где T и S – абсолютная температура и энтропия системы. Соответствующая функциональная связь (I) задается двумя независимыми уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} & f^1(ij)f^2(ik)f^1(jk) - f^2(ij)f^1(ik)f^2(jk) = 0, \\ & f^1(ik)f^1(jk)f^2(jk) - f^2(ik)f^1(ij)f^2(ij) - \\ & - f^1(ik)f^2(ik)(f^1(jk) - f^2(ij)) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Первую компоненту 3-метрики (6) можно интерпретировать как разность температур $T(i)$ и $T(j)$ термодинамической системы в состояниях i и j, а вторую и третью – как работы внешних тел над ней при ее переходе из состояния i в состояние j по путям TS и ST:

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= T(i) - T(j), \\ f^2(ij) &= A^{TS}(ij) = (S(i)-S(j))T(i) - U(i) + U(j), \\ f^3(ij) &= A^{ST}(ij) = (S(i)-S(j))T(j) - U(i) + U(j), \end{aligned}\right\}$$

где U – внутренняя энергия системы. Соответствующая феноменологически симметричная функциональная связь (I) задается в этом случае тремя независимыми уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} & f^1(ij) - f^1(ik) + f^1(jk) = 0, \\ & (f^2(ij) - f^3(ij))/f^1(ij) - (f^2(ik) - f^3(ik))/f^1(ik) + \\ & + (f^2(jk) - f^3(jk))/f^1(jk) = 0, \\ & (f^3(ij) - f^3(ik) + f^2(jk))f^1(ik) - (f^2(ik) - f^3(ik))f^1(jk) = 0. \end{aligned}\right\}$$

В термодинамике можно интерпретировать еще и компоненты 3-метрики (8) при $p = 0$ разностью температур и работами по путям PV и VP, где P и V - давление и объем системы. Вопрос о физической и математической интерпретациях остальных 3-метрик пока остается открытым. Их нетривиальные симметрии, групповая и феноменологическая, обуславливающие друг друга, дают основание надеяться, что такие интерпретации будут найдены и для других 3-метрик.

В заключение отметим, что с точностью до эквивалентности возможна единая форма записи первых компонент 3-метрик (7), (8) и (9) с помощью дуальных, двойных и комплексных чисел $w = x + ey$ соответственно:

$$f^1(ij) = |w(i) - w(j)|^2 \exp \gamma \operatorname{Arg}(w(i) - w(j)),$$

где $\gamma = 1$, $e^2 = 0$ для 3-метрики (7), $\gamma \leq 0$, $e^2 = +1$ для 3-метрики (8) и $|\gamma| < \infty$, $e^2 = -1$ для 3-метрики (9).

Автор выражает благодарность А.И.Фету за постоянный интерес к работе и многочисленные полезные замечания.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

/Г.Г.Михайличенко/

Адрес автора: 630126, Новосибирск, 126, Выборная, 146, кв.27
Михайличенко Геннадий Григорьевич

Телефоны: 68-10-41 рабочий, 68-10-90 домашний.

G. G. Mikhailichenko
The simplest polimetrical
geometries

Литература

1. Кулаков Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур//ДАН,1970.Т.193. №5.С.985-987.

2. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии//ДАН,1983.Т.269.№2.С.284-288.