ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 7 (470)

УДК 517.948

Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО, В.М. МАЛЫШЕВ

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть заданы одномерное многообразие $\mathfrak{M}$ и функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, сопоставляющая каждой паре $\langle i, j\rangle \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ некоторое число $f(i, j) \in \mathbb{R}$. Предполагается, что функция f гладкая и имеет отличные от нуля производные. Каждой тройке $\langle i, j, k\rangle \in \mathfrak{M}^3$ функция f естественно сопоставляет точку $(f(i, j), f(i, k), f(j, k))$ в $\mathbb{R}^3$. Говорят, что функция f задает на множестве $\mathfrak{M}$ одномерную феноменологически симметричную геометрию (физическую структуру) ранга 3, если все такие точки лежат на некоторой двумерной гиперповерхности, задаваемой уравнением $\Phi(f(i, j), f(i, k), f(j, k)) = 0$ с $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$. Представим это уравнение в виде, разрешенном относительно первого аргумента

$$f(i, j) = \varphi(f(i, k), f(j, k)), \tag{1}$$

где $\varphi(u, v)$ — функция двух переменных, причем $\varphi_u \neq 0$, $\varphi_v \neq 0$.

Уравнение (1), выполняющееся для любой тройки $\langle i, j, k\rangle$, является математическим выражением принципа феноменологической симметрии — основного постулата теории физических структур, которая была предложена Ю.И. Кулаковым [1] для анализа строения физических законов.

Рассмотрим далее четверку $\langle i, j, k, l, \rangle$ и запишем уравнение (1) для всех троек из нее: $\langle i, j, k\rangle$, $\langle i, j, l\rangle$, $\langle i, k, l\rangle$, $\langle j, k, l\rangle$. Из этих четырех уравнений легко получить соотношение

$$\varphi[\varphi(f(i, l), f(k, l)), \varphi(f(j, l), f(k, l))] = \varphi(f(i, l), f(j, l)),$$

в котором, очевидно, независимы все три переменные. Если для них ввести обозначения $f(i, l){=}x$, $f(j, l) = y$, $f(k, l) = z$, то для функции $\varphi(u, v)$ приходим к функциональному уравнению

$$\varphi(\varphi(x, z), \varphi(y, z)) = \varphi(x, y). \tag{2}$$

Уравнение (1) является естественным следствием принципа феноменологической симметрии и, как будет показано ниже, имеет решение, содержательное как в физическом, так и в математическом (геометрическом) смыслах.

С математической точки зрения представляет интерес рассмотреть все варианты, получающиеся всевозможными перестановками переменных x, y и z, в левой его части. Таких вариантов, включая само уравнение (2), не сводимых друг к другу, будет восемь (сами же перестановки дают двенадцать):

$$\varphi(\varphi(y, z), \varphi(x, z)) = \varphi(x, y), \tag{3}$$

$$\varphi(\varphi(x,z),\varphi(z,y)) = \varphi(x,y), \tag{4}$$
$$\varphi(\varphi(z,y),\varphi(x,z)) = \varphi(x,y), \tag{5}$$
$$\varphi(\varphi(z,x),\varphi(y,z)) = \varphi(x,y), \tag{6}$$
$$\varphi(\varphi(y,z),\varphi(z,x)) = \varphi(x,y), \tag{7}$$
$$\varphi(\varphi(x,y),\varphi(z,z)) = \varphi(x,y), \tag{8}$$
$$\varphi(\varphi(y,x),\varphi(z,z)) = \varphi(x,y). \tag{9}$$

Теорема. *Из восьми функциональных уравнений (2)–(9) только уравнения (2), (3), (8), (9) имеют решения с $\varphi_u \neq 0$, $\varphi_v \neq 0$. Решения этих четырех уравнений задаются соответствующими выражениями*

$$\varphi(u,v) = \psi^{-1}(\psi(u) - \psi(v)), \tag{2$'$}$$
$$\varphi(u,v) = \psi^{-1}(-\psi(u) + \psi(v)), \tag{3$'$}$$

где ψ — произвольная функция одной переменной с $\psi' \neq 0$, ψ^{-1} — обратная к ней функция;

$$\varphi(u,v) = \psi^{-1}(\lambda(u,v) - \lambda(v,v) + \lambda(c,c)), \tag{8$'$}$$

где $\lambda(u,v)$ — произвольная функция двух переменных с $\lambda_u \neq 0$, c – произвольная постоянная, ψ^{-1} — функция, обратная к $\psi(s) = \lambda(s,c)$;

$$\varphi(u,v) = \psi^{-1}(\sigma(u,v)), \tag{9$'$}$$

где $\sigma(u,v)$ — произвольная антисимметричная функция двух переменных с $\sigma_v \neq 0$, c — произвольная постоянная, ψ^{-1} — функция, обратная к $\psi(t) = \sigma(c,t)$.

Доказательством теоремы будет последовательное решение функциональных уравнений (2)–(9), в которых присутствует только искомая функция $\varphi(u,v)$. Методы решения таких уравнений в классе дифференцируемых функций были предложены в [2].

По решениям (2$'$), (3$'$), (8$'$), (9$'$) уравнений (2), (3), (8), (9), а также по отсутствию решений уравнений (4)–(7) можно сделать вывод, что из восьми функциональных уравнений (2)–(9) содержательными в математическом смысле являются только уравнения (2), (3), причем первое из них является прямым следствием принципа феноменологической симметрии. В частности, если решение (2$'$) поставить в уравнение (1), то получим соотношение

$$\psi(f(i,j)) - \psi(f(i,k)) + \psi(f(j,k)) = 0. \tag{10}$$

Будем интерпретировать $f(i,j)$ как квазирасстояние между точками i, j евклидовой прямой. И тогда для некоторой функции ψ соотношение (10) задает связь трех истинных расстояний $L(i,j) = \psi(f(i,j))$, $L(i,k) = \psi(f(i,k))$, $L(j,k) = \psi(f(j,k))$ между любыми ее тремя точками i, j, k:

$$L(i,j) - L(i,k) + L(j,k) = 0,$$

причем в координатном представлении полагаем $L(i,j) = x(i) - x(j)$. Соотношение (10) выражает также структуру одномерного времени, где $\psi(f(i,j))$ есть истинный временной промежуток $T(i,j) = t(i) - t(j)$ между событиями i, j из некоторого их множества

$$T(i,j) - T(i,k) + T(j,k) = 0.$$

Авторы выражают благодарность Ю.И. Кулакову и участникам научного семинара по теории физических структур в Новосибирском университете за обсуждение роли функциональных уравнений в математическом аппарате современной теоретической физики.

Литература

1. Кулаков Ю.И. *Элементы теории физических структур.* – Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1968. – 226 с.
2. Михайличенко Г.Г. *Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур* / В кн.: Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. – Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1968. – С. 175–226.

Горно-Алтайский государственный университет

Поступили
полный текст 05.08.1997
краткое сообщение 13.11.2000