АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Институт математики

На правах рукописи

Михайличенко Геннадий Григорьевич

УДК 512.816 + 514.774

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

01.01.04 - геометрия и топология

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск, 1991

Работа выполнена в Новосибирском государственном педагогическом институте

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Ю.Ф.Борисов

доктор физико-математических наук, профессор Ю.С.Владимиров

доктор физико-математических наук, профессор А.М.Шелехов

Ведущая организация - Казанский государственный университет им. В.И.Ульянова-Ленина

Защита состоится "____"_____199 г. в "____" ч. на заседании Специализированного совета Д 002.23.02 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Институте математики СО АН СССР по адресу: 630090, Новосибирск, Университетский проспект, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики СО АН СССР.

Автореферат разослан "____"_____199 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета
доктор физ.-мат. наук В.С.Белоносов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Физические структуры представляют собой своеобразный математический объект, предложенный Ю.И.Кулаковым (Новосибирский университет) для классификации физических законов. В последнее время школой Ю.С.Владимирова (Московский университет) физические структуры стали применяться для анализа ряда принципиальных проблем теоретической физики, а именно: обоснования размерности и метрики пространства-времени, развития нового подхода к описанию электромагнитного, гравитационного и иных взаимодействий и их объединения, формулировки нового взгляда на спинорные свойства элементарных частиц. Установление групповых свойств физических структур позволяет более глубоко раскрыть их геометрическое содержание, а также понять эффективность их применения в анализе некоторых проблем оснований физики и геометрии.

Цель работы. В определение физической структуры входят различные характеристики, как-то: размерность исходных множеств, ранг феноменологической симметрии, степень групповой симметрии. Целью настоящей работы было дать естественное в физическом смысле и точное в математическом смысле определение физической структуры, в рамках которого можно доказать эквивалентность групповой и феноменологической симметрий, на ряде простых примеров проверить ее, а также объяснить основные соотношения между характеристиками физической структуры, при которых эта эквивалентность имеет место.

Общая методика исследования. Феноменологическая симметрия (симметрия в смысле Ю.И.Кулакова) означает существование функциональной связи между всеми расстояниями для определенного числа точек и тем самым определяет ранг соответствующей матрицы Якоби, который оказывается ровно на единицу меньше числа расстояний. Далее устанавливается, что коэффициенты ли-

нейной зависимости между столбцами этой матрицы задают конечномерную алгебру Ли гладких векторных полей, то есть некоторую локальную группу Ли локальных преобразований исходного многообразия, которая оказывается группой движений. С другой стороны, групповая симметрия (симметрия в смысле Клейна) означает существование такой группы Ли преобразований, относительно которой метрика сохраняется, являясь ее двухточечным инвариантом. Это, в свою очередь, также определяет ранг упомянутой выше матрицы Якоби и приводит к феноменологической симметрии. При исследовании конкретных физических структур сначала проводится классификация конечномерных алгебр Ли гладких векторных полей, которые находятся как решения систем дифференциальных уравнений, возникающих из условий коммутирования. Метрика же, понимаемая в общем случае только как некоторая функция двух точек, является решением другой системы дифференциальных уравнений, возникающих из условия ее инвариантности.

Научная новизна. Основным результатом диссертации является обнаружение определяющих групповых свойств бинарных физических структур на одном и двух множествах и установление для них эквивалентности групповой и феноменологической симметрий. Этот результат на момент публикации соответствующих работ автора является новым, ранее в математике неизвестным.

Практическое и теоретическое значение. Значение работы теоретическое. Установление групповых свойств физических структур дает возможность проводить их классификацию методами теории групп Ли преобразований. В частности, можно определить все феноменологически симметричные геометрии, в которых метрика рассматривается как невырожденный двухточечный инвариант. В рамках самой теории групп Ли преобразований возникают вопросы их классификации, но не с точностью до традиционного подобия, а с точностью до эквивалентности (замены координат) в каждом изоморфном классе, то есть вопросы классификации локальных действий группы Ли на многообразии. Кроме того, новым для теории групп преобразований является вопрос об определении условий невырожденности двухточечных инвариантов.

Апробация. Основные положения и результаты диссертации обсуждались на следующих научных семинарах: семинарах лаборатории математической физики ЛОМИ (рук. чл.-корр. О.А.Ладыженская), семинарах кафедры геометрии Новосибирского университета (рук. проф. Ю.Ф.Борисов), семинаре кафедры классической дифференциальной геометрии МГУ (рук. проф. А.М.Васильев), геометрическом семинаре МГУ (рук. проф. Э.Г.Позняк), семинаре кафедры теоретической физики МГУ (рук. проф. Ю.С.Владимиров), семинарах отдела геометрии и анализа ИМ СО АН СССР (рук. академик Ю.Г.Решетняк), семинарах отдела ассоциативных алгебр и колец Ли ИМ СО АН СССР (рук. проф. Л.А.Бокуть). Кроме того, результаты диссертации докладывались автором на Всесоюзном геометрическом семинаре памяти Н.В.Ефимова (Москва, 1985), Всесоюзной конференции по геометрии "в целом" (Новосибирск, 1987), Всесоюзных Герценовских чтениях (Ленинград, 1986), ежегодных научных конференциях Новосибирского пединститута, а также на заседаниях Всесоюзной школы-семинара по теории физических структур (Абакан, 1984; Уссурийск, 1987; Пущино, 1988, 1989; Казань, 1990).

Структура и объем диссертации. Объем диссертации - 251 машинописная страница. Библиография содержит 44 наименования. О структуре диссертации и расположении материала в ней можно судить по приводимому ниже ее оглавлению:

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В §I Введения сначала на примере евклидовой плоскости пояснено, что значит групповая и феноменологическая симметрии в обычной геометрии одного множества и как следует понимать эквивалентность этих симметрий. Далее рассмотрены второй закон Ньтона и закон Ома в их привычной и феноменологически инвариантной формах. При этом ускорение и ток рассматриваются как "расстояния" между точками различных множеств (материаль-

ных тел и ускорителей для случая закона Ньютона, проводников и источников тока в случае закона Ома). Групповая симметрия в этих геометриях (физических структурах) понимается следующим образом: существуют такие изоморфные группы преобразований исходных множеств, то есть такие в них эффективные действия некоторой группы Ли, относительно которых "расстояние" (ускорение или ток) является двухточечным инвариантом. Эквивалентность феноменологической и групповой симметрий в геометрии двух множеств понимается как их взаимно однозначная обусловленность.

В <u>§2 Введения</u> дается краткое изложение основных определений и результатов диссертации, чтобы можно было получить полное представление о ее содержании до ознакомления с подробностями доказательств.

Приступим сначала к краткому изложению содержания §§ I - - 5 первой главы.

<u>§I гл.I</u>. Пусть имеется множество $\mathfrak{M}$ произвольной природы, точки которого обозначим строчными латинскими буквами, а также функция $f: \mathfrak{S}_f \to R$, где $\mathfrak{S}_f \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, сопоставляющая упорядоченной паре $\langle ij \rangle \in \mathfrak{S}_f$ некоторое вещественное число $f(ij) \in R$. В общем случае область определения $\mathfrak{S}_f$ может не совпадать со всем прямым произведением $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Функцию f будем иногда называть метрикой, не требуя, однако, ее положительной определенности и выполнения обычных метрических аксиом, то есть понимая ее только как двухточечную функцию. Будем предполагать, что выполняется следующее условие:

А. Если две произвольные точки i, j из $\mathfrak{M}$ различны, то для некоторого $k \in \mathfrak{M}$ либо $\langle ik \rangle, \langle jk \rangle \in \mathfrak{S}_f$ и $f(ik) \neq f(jk)$, либо $\langle ki \rangle, \langle kj \rangle \in \mathfrak{S}_f$ и $f(ki) \neq$ $\neq f(kj)$.

Смысл условия А состоит, прежде всего, в том, что рассматриваются только такие свойства пространства $\mathfrak{M}$, которые выражаются посредством функции f. По метрике f, удовлетворяющей условию А, на множестве $\mathfrak{M}$ определяется отде-

лимая в смысле Хаусдорфа топология заданием системы окрестностей $\mathcal{U}(i)$ каждой его точки i. Топология в $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ и других прямых произведениях вводится обычным образом как произведение топологий пространств-сомножителей. В $\mathfrak{G}_f$ рассматривается топология, индуцированная из $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$.

Пусть $n \geqslant 1$ - целое число. Для некоторого кортежа $\langle k_1 \ldots k_n \rangle$ длины n из $\mathfrak{M}^n$ введем функцию $\bar{f}^n = \bar{f}[k_1 \ldots k_n]$ ($\bar{\bar{f}}^n = \bar{\bar{f}}[k_1 \ldots k_n]$), сопоставляя точке $i \in \mathfrak{M}$ точку $(f(ik_1), \ldots, f(ik_n)) \in R^n$ ($(f(k_1 i), \ldots, f(k_n i)) \in R^n$), если $\langle ik_1 \rangle, \ldots, \langle ik_n \rangle \in \mathfrak{G}_f$ ($\langle k_1 i \rangle, \ldots, \langle k_n i \rangle \in \mathfrak{G}_f$). В отношении пространства $\mathfrak{M}$ и исходной функции f будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. Область определения $\mathfrak{G}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ множество.

II. Существует открытое и плотное в $\mathfrak{M}$ множество, для каждой точки i которого найдется в $\mathfrak{M}^n$ такой кортеж длины n, что для него либо отображение $\bar{f}^n$, либо отображение $\bar{\bar{f}}^n$ некоторой ее окрестности $\mathcal{U}(i)$ в R^n является локальным гомеоморфизмом.

III. Функция f достаточно гладкая в локальных координатах, описанных в аксиоме II, и плотно в $\mathfrak{M}^n$ множество таких кортежей длины n, для которых отображение $\bar{f}^n$ ($\bar{\bar{f}}^n$) имеет ранг n в точках плотного в $\mathfrak{M}$ множества.

Согласно аксиомам II и III, открытое и плотное в $\mathfrak{M}$ множество является гладким многообразием размерности n (лемма 2). Функцию f, удовлетворяющую условиям аксиомы III, будем называть невырожденной.

Пусть, далее, $m = n+2 \geqslant 3$. Введем еще функцию F, сопоставляя кортежу $\langle ijk \ldots vw \rangle$ длины m из $\mathfrak{M}^m$ точку $(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) \in R^{m(m-1)/2}$, координаты которой в $R^{m(m-1)/2}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью значений функции f для всех пар его элементов $\langle ij \rangle, \langle ik \rangle, \ldots, \langle vw \rangle$, если эти пары принадлежат $\mathfrak{G}_f$. Область определения введенной функции обозначим через $\mathfrak{G}_F$.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что функция f задает на множестве $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную

n -мерную геометрию расстояний ранга $m = n+2$, если, кроме условия А и аксиом I, II, III, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IУ. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждого кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ длины $m = n+2$ которого и некоторой его окрестности $\mathcal{U}(\langle ijk\ldots vw\rangle)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi: \mathcal{E} \to R$, определенная в некоторой области $\mathcal{E} \subset R^{m(m-1)/2}$, содержащей точку $F(\langle ijk\ldots vw\rangle)$, что в ней $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$ и множество $F(\mathcal{U}(\langle ijk\ldots vw\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) = 0$$

для всех кортежей из $\mathcal{U}(\langle ijk\ldots vw\rangle)$.

Аксиома IУ составляет содержание принципа феноменологической симметрии в теории физических структур.

Т е о р е м а. Для того, чтобы функция f, удовлетворяющая условию А и аксиомам I, II, III, задавала на множестве $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную n -мерную геометрию расстояний ранга $m = n+2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $m(m-1)/2 - 1$ на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.

Из этой теоремы следует, что множество значений отображения F локально совпадает с множеством нулей функции Φ, а не только является его подмножеством.

<u>§2 гл.I</u>. Преобразование λ множества $\mathfrak{M}$ называется движением, если при нем сохраняется метрика f. Последнее означает, что для каждой пары $\langle ij\rangle \in \mathfrak{S}_f$ имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(ij),$$

если пара $\langle \lambda(i), \lambda(j)\rangle \in \mathfrak{S}_f$. Множество всех движений есть группа, для которой функция f является двухточечным инвариантом. Если метрика f известна, то условие ее сохранения представляет собой функциональное уравнение относительно

преобразования λ .

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что функция f задает на множестве $\mathfrak{M}$ n -мерную геометрию расстояний, наделенную групповой симметрией степени $n(n+1)/2$, если, кроме условия А и аксиом I, II, III, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IУ'. Существует открытое и плотное в $\mathfrak{M}$ множество, для каждой точки i которого определено эффективное гладкое действие $n(n+1)/2$ -мерной локальной группы Ли в некоторой окрестности $U(i)$, такое, что действия ее в окрестностях $U(i)$, $U(j)$ двух точек i , j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$, и что функция f является двухточечным инвариантом.

Группы преобразований, о которых говорится в аксиоме IУ', определяют локальную подвижность "твердых тел" в n -мерном пространстве $\mathfrak{M}$ с $n(n+1)/2$ степенями свободы, такую же как у твердых тел в евклидовом пространстве. Заметим, однако, что глобальной подвижности при этом может и не быть. Будем говорить также, что метрика f допускает локальную группу локальных движений с $n(n+1)/2$ степенями свободы.

Т е о р е м а I. Для того, чтобы функция f , удовлетворяющая условию А и аксиомам I, II, III, задавала на множестве $\mathfrak{M}$ n -мерную геометрию расстояний, наделенную групповой симметрией степени $n(n+1)/2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $m(m-1)/2 - 1$ на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.

Итоговым результатом §I и §2 гл.I является установление эквивалентности феноменологической и групповой симметрий в n -мерной геометрии расстояний:

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы функция f задавала на множестве $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную n-мерную геометрию расстояний ранга $n+2$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на $\mathfrak{M}$ n -мерную геометрию расстояний, наделенную групповой симметрией степени $n(n+1)/2$.

Заметим, что необходимое и достаточное условие теоремы из §I и теоремы I из §2 о ранге отображения F можно было бы включить в определение n -мерной геометрии расстояний, которая была бы, с одной стороны, феноменологически симмет-

рична, а с другой, наделена групповой симметрией соответствующей степени, причем обе симметрии были бы, согласно теореме 2, полностью эквивалентны.

Основные определения, результаты и методы исследования по §§ I и 2 гл.I опубликованы в работах /3/, /5/. В последующих трех параграфах первой главы эквивалентность феноменологической и групповой симметрий детально прослеживается на примере двумерных (плоских) геометрий.

<u>§3 гл.I</u>. Ранее автором методом, разработанным им в теории физических структур, были найдены все невырожденные феноменологически инвариантные плоские метрики /I/. Выпишем здесь их локальные координатные представления с точностью до эквивалентности (замены координат на плоскости) и переобозначения $\psi(f) \to f$, где ψ – произвольная функция одной переменной:

$$f(ij) = (x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2,$$

$$f(ij) = \cos y(i) \cos y(j) \cos(x(i) - x(j)) + \sin y(i) \sin y(j),$$

$$f(ij) = \operatorname{sh} y(i) \operatorname{sh} y(j) \cos(x(i) - x(j)) - \operatorname{ch} y(i) \operatorname{ch} y(j),$$

$$f(ij) = (x(i) - x(j))^2 - (y(i) - y(j))^2,$$

$$f(ij) = \operatorname{ch} y(i) \operatorname{ch} y(j) \cos(x(i) - x(j)) - \operatorname{sh} y(i) \operatorname{sh} y(j),$$

$$f(ij) = x(i) y(j) - x(j) y(i),$$

$$f(ij) = (x(i) - x(j))^{\alpha} (y(i) - y(j))^{\beta},$$

$$f(ij) = (x(i) - x(j))/(y(i) - y(j)) + \ln|y(i) - y(j)|,$$

$$f(ij) = \ln((x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2) +$$
$$+ \gamma \operatorname{arctg}(x(i) - x(j))/(y(i) - y(j)),$$

$$f(ij) = ((x(i) - x(j))^2 + \varepsilon_i y^2(i) + \varepsilon_j y^2(j))/y(i) y(j),$$

где $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\varepsilon_i, \varepsilon_j = 0, +1, -1$, причем не обязательно $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.

Первые семь выражений определяют метрики известных геометрий: евклидовой плоскости, двумерной сферы, плоскости Лобачевского, плоскости Минковского, двумерного однополостного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, симплектической плоскости, симплициальной плоскости. Восьмое и девятое выражения, по-видимому, до настоящего времени в геометрии не рассматривались. Последнее, десятое, выражение определяет метрику на несвязном двумерном многообразии, на связных компонентах которого будет либо симплектическая плоскость ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0$), либо плоскость Лобачевского ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = +1$), либо двумерный однополостной гиперболоид ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = -1$).

Если метрика f известна, то можно найти такие преобразования плоскости

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y),$$

которые ее сохраняют. Относительно функций λ и σ из условия сохранения растояния $f(ij)$ получаем функциональное уравнение

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)),$$

которое решается в §3 гл.I. Оказалось, что каждая из выписанных выше десяти плоских метрик допускает не более чем трехпараметрическую локальную группу локальных движений в соответствии с общими результатами §§ I и 2 гл.I. В качестве иллюстрации приведем ниже явные задания групп движений только для четырех последних ("экзотических") метрик:

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + c, \\ y' &= by + d, \end{aligned}\right\}$$

причем $a^\alpha b^\beta = 1$ и $a > 0$, $b > 0$;

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= ay + d, \end{aligned}\right\}$$

причем $b + a\ln a = 0$ и $a > 0$;

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= -bx + ay + d, \end{aligned}\right\}$$

причем $\ln(a^2 + b^2) + \gamma \operatorname{arctg} b/a = 0$;

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{(ax+b)(cx+d) + ac\varepsilon y^2}{(cx+d)^2 + c^2\varepsilon y^2}, \\ y' &= \frac{y}{(cx+d)^2 + c^2\varepsilon y^2}, \end{aligned}\right\}$$

причем $ad - bc = 1$.

<u>§4 гл.I</u>. Из результатов предыдущего параграфа следует, что всякая феноменологически инвариантная двумерная метрика является двухточечным инвариантом некоторой трехпараметрической группы преобразований плоскости. Естественно возник вопрос: всякий ли невырожденный двухточечный инвариант трехмерной группы Ли преобразований плоскости феноменологически инвариантен? Для ответа на этот вопрос автор в §4 гл.I проводит полную классификацию трехмерных алгебр Ли преобразований плоскости (то есть гладких локальных действий на плоскости трехмерных локальных групп Ли) с точностью до эквивалентности (обратимой замены координат). Исходной была хорошо известная, полная с точностью до изоморфизма, классификация трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли, заданная коммутаторами $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_1]$, $[X_2, X_3]$ ее базисных векторов X_1 , X_2 , X_3 . Подставляя в эти коммутаторы операторы

$$X_\alpha = \lambda_\alpha(x,y)\partial_x + \sigma_\alpha(x,y)\partial_y ,$$

где $\alpha = 1,2,3$, получаем систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $\lambda_\alpha(x,y), \sigma_\alpha(x,y)$, решение которой и дает для каждой отдельной абстрактной алгебры ее реализацию линейными операторами преобразований плоскости. Полученная классификация сопоставляется с соответствующей классификацией С.Ли, которая была проведена им с точностью до подобия, то есть с точностью до слабой эквивалентности в каждом изоморфном классе, допускающей при сравнении двух алгебр, кроме замены координат на плоскости, еще и автоморфное преобразование базиса одной из них. Отметим, что в более тонкой классификации автора имеются неэквивалентные локальные действия, которые С.Ли в своей классификации отождествляет:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \partial_x ,\ X_2 = y\partial_x ,\ X_3 = -\partial_y , \\ X_1 = \partial_x ,\ X_2 = \partial_y ,\ X_3 = y\partial_x + \delta\partial_y \end{array}\right\}$$

с коммутационными соотношениями

$$[X_1,X_2]=0,\ [X_3,X_1]=0,\ [X_2,X_3]=X_1;$$

а также

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \partial_x ,\ X_2 = y\partial_x ,\ X_3 = x\partial_x + y\partial_y , \\ X_1 = \partial_x ,\ X_2 = \partial_y ,\ X_3 = x\partial_x + \delta\partial_y \end{array}\right\}$$

с коммутационными соотношениями

$$[X_1,X_2]=0,\ [X_3,X_1]=-X_1,\ [X_2,X_3]=0,$$

где δ - произвольная постоянная. В соответствующих изоморфных классах С.Ли оставляет в своей классификации только следующие алгебры:

$$X_1 = \partial_x, \; X_2 = y\partial_x, \; X_3 = -\partial_y;$$

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = \partial_x, \; X_2 = y\partial_x, \; X_3 = x\partial_x + y\partial_y, \\ X_1 = \partial_x, \; X_2 = \partial_y, \; X_3 = x\partial_x, \end{array}\right\}$$

хотя, например, выражения с разными значениями постоянной δ определяют различные неэквивалентные локальные действия на плоскости соответствующей трехмерной локальной группы Ли.

Отметим еще, что решенная в §4 гл.I задача восходит к той, которую сформулировал А.Пуанкаре в его известной работе "Об основных гипотезах геометрии"(1887): "какие заключения можно извлечь", исходя из предположения, что необходимыми и достаточными условиями плоской геометрии являются гипотезы:

А. Плоскость имеет два измерения;

В. Положение плоской фигуры в ее плоскости определяется тремя условиями?

Результаты §4 гл.I и подробная методика их получения опубликованы в работе /2/.

<u>§5 гл.I</u>. Последний параграф первой главы посвящен вычислению всех двухточечных инвариантов $f(ij)$ трехмерных групп Ли преобразований плоскости, являющихся решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$X_\alpha(i) f(ij) + X_\alpha(j) f(ij) = 0,$$

причем выражения для базисных операторов $X_\alpha, \alpha = 1,2,3$ берутся по классификационной теореме §4 гл.I. Алгебры Ли с базисными операторами $X_\alpha(i)$ и $X_\alpha(j)$, имея в соответствующих базисах одинаковые структурные константы, изоморфны, но не обязательно эквивалентны. В работе /4/ последовательно для всех возможных пар этих операторов находятся решения системы уравнений, записанной выше. В §5 гл.I основные приемы решения показаны на нескольких типичных случаях и перечислены все возможные двухточечные инварианты, которых получилось 32, как вырожденных, так и не вырожденных. Оказалось, что полностью

невырожденные двухточечные инварианты совпадают с невырожденными феноменологически инвариантными плоскими метриками. Этот результат на примере плоских геометрий подтверждает эквивалентность феноменологической и групповой симметрий в геометрии.

Перейдем теперь к краткому изложению содержания §§ I - 6 второй главы.

<u>§I гл.II</u>. Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ произвольной природы, в общем случае различной, точки которых будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами соответственно, а также функция $f: \mathfrak{G}_f \to R^s$, где $\mathfrak{G}_f \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, сопоставляющая паре $\langle i\alpha \rangle \in \mathfrak{G}_f$ некоторую точку $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), \ldots, f^s(i\alpha)) \in R^s$, то есть некоторую совокупность s вещественных чисел, причем $s \geq 1$. Будем предполагать, что выполняется следующее условие:

А. Если две произвольные точки i, j из $\mathfrak{M}$ (α, β из $\mathfrak{N}$) различны, то для некоторого $\gamma \in \mathfrak{N}$ ($k \in \mathfrak{M}$) пары $\langle i\gamma \rangle, \langle j\gamma \rangle \in \mathfrak{G}_f$ и $f(i\gamma) \neq f(j\gamma)$ ($\langle k\alpha \rangle, \langle k\beta \rangle \in \mathfrak{G}_f$ и $f(k\alpha) \neq f(k\beta)$).

По функции f, удовлетворяющей условию А, на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ определяются отделимые топологии заданием системы окрестностей $\mathcal{U}(i)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$ всех точек $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$.

Пусть $m \geq 1$ и $n \geq 1$ - целые числа. Для некоторых кортежей $\langle \gamma_1 \ldots \gamma_m \rangle \in \mathfrak{N}^m$ длины m и $\langle k_1 \ldots k_n \rangle \in \mathfrak{M}^n$ длины n введем функции $f^m = f[\gamma_1 \ldots \gamma_m]$ и $f^n = f[k_1 \ldots k_n]$, сопоставляя точкам $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ точки $(f(i\gamma_1), \ldots, f(i\gamma_m)) \in R^{sm}$ и $(f(k_1\alpha), \ldots, f(k_n\alpha)) \in R^{sn}$, если пары $\langle i\gamma_1 \rangle, \ldots, \langle i\gamma_m \rangle$ и $\langle k_1\alpha \rangle, \ldots, \langle k_n\alpha \rangle$ принадлежат $\mathfrak{G}_f$. В отношении множеств $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и исходной функции f будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. Область определения $\mathfrak{G}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ множество.

II. Существуют открытые и плотные в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множества, для любых точек i и α которых найдутся в $\mathfrak{N}^m$ и $\mathfrak{M}^n$ такие кортежи длины m и n, что для них соответствующие отображения f^m и f^n некоторых окрестностей

$\mathcal{U}(i)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$ в R^{sm} и R^{sn} являются локальными гомеоморфизмами.

III. Функция f достаточно гладкая в локальных координатах, описанных в аксиоме II, и плотны в $\mathcal{M}^m$ и $\mathcal{M}^n$ множества таких кортежей длины m и n, для которых соответствующие отображения f^m и f^n имеют ранги sm и sn в точках плотных в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ множеств.

Согласно аксиомам II,III, открытые и плотные в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ множества являются гладкими многообразиями размерности sm и sn (лемма 2). Функцию f, удовлетворяющую условиям аксиомы III, будем называть невырожденной.

Введем еще функцию F, сопоставляя кортежу $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$ длины $m+n+2$ из $\mathcal{M}^{n+1}\times\mathcal{N}^{m+1}$ точку $(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots, f(v\tau))\in R^{s(m+1)(n+1)}$, координаты которой определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью значений функции f для всех пар его элементов: $\langle i\alpha\rangle, \langle i\beta\rangle, \ldots, \langle v\tau\rangle$, если эти пары принадлежат $\mathcal{G}_f$. Область определения введенной функции обозначим через $\mathcal{G}_F$.

Определение I. Будем говорить, что функция f задает на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$ и порядка s, если, кроме условия А и аксиом I, II, III, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IУ. Существует плотное в $\mathcal{G}_F$ множество, для каждого кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$ длины $m+n+2$ которого и некоторой его окрестности $\mathcal{U}(\langle i\ldots\tau\rangle)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi: \mathcal{E}\to R^s$, определенная в некоторой области $\mathcal{E}\subset R^{s(m+1)(n+1)}$, содержащей точку $F(\langle i\ldots\tau\rangle)$, что в ней ранг функции Φ равен s и множество $F(\mathcal{U}(\langle i\ldots\tau\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots, f(v\tau)) = 0$$

для всех кортежей из $\mathcal{U}(\langle i\ldots\tau\rangle)$.

Аксиома IУ составляет содержание принципа феноменологической симметрии в теории физических структур, предложенной первоначально (см. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических

структур.-Новосибирск:НГУ,1968) для классификации физических законов. Уравнения $\varphi = 0$, то есть $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_s = 0$, задают s функциональных связей между $s(m+1)(n+1)$ измеряемыми в опыте значениями физических величин $f = (f^1, \ldots, f^s)$ и являются аналитическим выражением физического закона, записанного в феноменологически инвариантной форме. Условие на ранг функции φ означает, что уравнения $\varphi = 0$ не сводимы друг к другу, то есть независимы. Заметим также, что не всякая функция может задавать физический закон, и потому одной из основных задач теории физических структур является перечисление всех возможных феноменологически инвариантных форм физических законов, то есть их полная классификация.

Функцию $f = (f^1, \ldots, f^s)$ можно рассматривать как своего рода s-мерную метрику в геометрии двух множеств. Скажем также, что функция f задает на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ феноменологически симметричную (sm, sn)-мерную геометрию ранга $(n+1, m+1)$.

Преобразования λ и σ множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называются движением, если при них сохраняется функция f, то есть для каждой пары $\langle i\alpha \rangle \in \mathfrak{S}_f$, такой что $\langle \lambda(i), \sigma(\alpha) \rangle \in \mathfrak{S}_f$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \sigma(\alpha)) = f(i\alpha).$$

Множество всех движений есть группа, для которой функция (метрика) f является двухточечным инвариантом.

Определение 2. Будем говорить, что функция f задает на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ (sm, sn)-мерную геометрию, наделенную групповой симметрией степени smn, если, кроме условия А и аксиом I, II, III, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IУ'. Существуют открытые и плотные в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множества, для всех точек i и α которых определены эффективные гладкие действия smn-мерной локальной группы Ли в некоторых окрестностях $\mathcal{U}(i)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$, такие что действия ее в окрестностях $\mathcal{U}(i)$, $\mathcal{U}(j)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$, $\mathcal{U}(\beta)$ точек i, j и α, β совпадают в пересечениях $\mathcal{U}(i) \cap \mathcal{U}(j)$ и $\mathcal{U}(\alpha) \cap \mathcal{U}(\beta)$ и что функция f является двухточечным инвариантом.

Группы преобразований, о которых говорится в аксиоме IУ′, определяют локальную подвижность жестких фигур ("твердых тел") в (sm, sn)-мерном пространстве $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ с smn степенями свободы.

Т е о р е м а 1. Если функция f задает на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ (sm, sn)-мерную геометрию, наделенную групповой симметрией степени smn, то она на тех же множествах задает физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$ и порядка s.

Т е о р е м а 2. Если функция f задает на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$ и порядка s, то она на тех же множествах задает (sm, sn)-мерную геометрию, наделенную групповой симметрией степени smn.

Эквивалентность феноменологической и групповой симметрий (sm, sn)-мерной геометрии, задаваемой на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ функцией f, непосредственно вытекает из сформулированных выше теорем I и 2.

Основные положения и результаты §I гл.II опубликованы в работах /6/ для $s = 1$ и /II/ для $s \geqslant 1$. Однако физические структуры порядка s в случае $s \geqslant 2$ еще не все найдены. Часть их для $s = 2$, например, может быть получена комплексификацией соответствующих структур порядка I или их тривиальным наложением.

<u>§2 гл.II</u>. Ранее автором были найдены все функции f, задающие на многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ размерности m и n физические структуры ранга $(n+1, m+1)$ и порядка I (см.ДАН, I972,-Т.206,№5,-С.I056-I058). Выпишем здесь их локальные координатные представления с точностью до эквивалентности (замены координат в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$) и переобозначения $\psi(f) \to f$, считая для определенности, что $m \leq n$:

$m = 1,\ n = 1$:

$$f = x + \xi\ ;$$

$m = 1,\ n = 2:$

$$f = x\xi + \eta;$$

$m = 1,\ n = 3:$

$$f = (x\xi + \eta)/(x + \vartheta);$$

$m = n \geqslant 2:$

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m,$$

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m + \xi^m;$$

$m = n - 1 \geqslant 2:$

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m + \xi^{m+1}.$$

Для всех остальных пар значений целых чисел m и n физические структуры ранга $(n+1, m+1)$ и порядка I не существуют.

Если функция f известна, то преобразования

$$x' = \lambda(x),\ \xi' = \sigma(\xi)$$

многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, составляющие движение, являются решением функционального уравнения

$$f(\lambda(x), \sigma(\xi)) = f(x, \xi).$$

В §2 гл.II для каждой из перечисленных выше шести функций находятся полные локальные группы локальных движений как решения соответствующих уравнений сохранения, причем на функции λ и σ, кроме гладкости и локальной обратимости, никакие другие условия (например, линейность или аналитичность) не налагаются.

Т е о р е м а I. Полная локальная группа локальных

движений в геометрии двух множеств с одной из выписанных шести метрик задается следующими локальными преобразованиями многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$:

$m = 1,\ n = 1$:

$$x' = x + a,\ \xi' = \xi - a;$$

$m = 1,\ n = 2$:

$$x' = ax + b,\ \xi' = \xi / a,\ \eta' = \eta - b\xi / a,$$

причем $a > 0$;

$m = 1,\ n = 3$:

$$\left.\begin{aligned} &x' = (ax+b)/(cx+d),\ \xi' = (d\xi - c\eta)/(d - c\vartheta), \\ &\eta' = (a\eta - b\xi)/(d - c\vartheta),\ \vartheta' = (a\vartheta - b)/(d - c\vartheta), \end{aligned}\right\}$$

причем $ad - bc = 1$;

$m = n \geq 2$:

$$x' = xa,\ \xi' = \tilde{a}\xi,$$

где a - квадратная матрица порядка m с $\det a > 0$, $\tilde{a}$ - обратная к ней матрица, x - строка длины m, ξ - столбец высоты m ;

$$\left.\begin{aligned} &x' = xa + b,\ x'^m = x^m + xc + b^m, \\ &\xi' = \tilde{a}(\xi - c),\ \xi'^m = \xi^m - b\tilde{a}(\xi - c) - b^m, \end{aligned}\right\}$$

где a - квадратная матрица порядка $m-1$ с $\det a > 0$ $\tilde{a}$ - обратная к ней матрица, x, b - строки длины $m-1$, ξ, c - столбцы высоты $m-1$;

$m = n-1 \geqslant 2$:

$$\left.\begin{aligned} x' = xa + b, \quad \xi' = \tilde{a}\xi, \\ \xi'^{m+1} = \xi^{m+1} - b\tilde{a}\xi, \end{aligned}\right\}$$

где a - квадратная матрица порядка m с $\det a > 0$, $\tilde{a}$ - обратная к ней матрица, x, b - строки длины m, ξ - столбец высоты m.

Все перечисленные в теореме группы движений зависят от конечного числа параметров, максимальное число которых, в соответствии с общими результатами §I гл.II, равно mn, то есть произведению размерностей многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, так как $s = 1$. (Для сравнения заметим, что в n-мерной феноменологически симметричной геометрии одного множества с одним расстоянием это число равно $n(n+1)/2$). В каждой из групп движений группы преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, имея одну и ту же параметрическую группу, изоморфны, но не обязательно эквивалентны, то есть не обязательно переходят друг в друга при некотором локально обратимом гладком отображении $\varphi: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$. Эквивалентность имеет место только в однопараметрической группе движений $x' = x + a$, $\xi' = \xi - a$ для случая $m = n = 1$, так как в ней каждое движение состоит из двух локальных одномерных параллельных переносов на прямой. Неэквивалентность в группах движений для случая $m \neq n$ обусловлена тем, что преобразуемые в них многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имеют различную размерность. В группах движений для случая $m = n \geqslant 2$ эти многообразия имеют одинаковую размерность и естественно было ожидать эквивалентности групп их преобразований, однако имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 2. Локальные группы локальных преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, задающие группы движений для случая $m = n \geqslant 2$, неэквивалентны.

Отметим, что эти группы оказываются слабо эквивалентными. Результаты §2 гл.II были доложены автором на Всесоюзной конференции по геометрии, проходившей в Новосибирске в 1987

году /I0/ и опубликованы в работе /I2/.

<u>§3 гл.II</u>. В этом параграфе детально рассматриваются вопросы классификации групп преобразований, играющие особую роль при вычислении двухточечных инвариантов. Дело в том, что обычно эта классификация проводится с точностью до подобия, то есть с точностью до слабой эквивалентности в каждом изоморфном классе действующих групп, когда при сравнении действий допускаются как замена параметров в действующей группе так и замена координат в преобразуемом многообразии. Но слабая эквивалентность не всегда равносильна эквивалентности, допускающей при сравнении действий только замену координат, в том случае, когда действующая (параметрическая) группа имеет внешние автоморфизмы. Например, для двух эквивалентных четырехмерных групп Ли преобразований плоскости с базисными операторами (векторными полями)

$$\left.\begin{aligned} &X_1=\partial_x,\ X_2=y\partial_x,\ X_3=-\partial_y,\ X_4=-y\partial_y,\\ &\Xi_1=\partial_\xi,\ \Xi_2=\eta\partial_\xi,\ \Xi_3=-\partial_\eta,\ \Xi_4=-\eta\partial_\eta \end{aligned}\right\}$$

соответствующих алгебр Ли двухточечный инвариант $f(x,y,\xi,\eta)$ тривиален:

$$f=const,$$

в то время как для слабо эквивалентных (то есть таких, которые С.Ли в своей классификации не различает), но не эквивалентных групп с базисными операторами

$$\left.\begin{aligned} &X_1=\partial_x,\ X_2=y\partial_x,\ X_3=-\partial_y,\ X_4=-y\partial_y,\\ &\Xi_1=\partial_\xi,\ \Xi_2=\partial_\eta,\ \Xi_3=\eta\partial_\xi,\ \Xi_4=\eta\partial_\eta \end{aligned}\right\}$$

соответствующих алгебр Ли этот инвариант невырожден:

$$f=x-\xi-y\eta.$$

Обсуждению вопросов классификации групп преобразований в свете задач, возникающих в теории физических структур, автор посвятил работу /8/, а также выступление на Всесоюзном семинаре памяти Н.В.Ефимова /7/.

В §4 гл.II проводится полная классификация четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости (семейств векторных полей) с точностью до эквивалентности в каждом изоморфном классе алгебр Ли соответствующих групп Ли, действующих на плоскости. При проведении этой классификации использовались, с одной стороны, классификация вещественных четырехмерных абстрактных алгебр Ли, а с другой, методы и результаты §4 гл.I, поскольку у каждой четырехмерной алгебры имеется трехмерная подалгебра. Полученная классификация сравнивается с соответствующей классификацией С.Ли. Проведенное сопоставление показывает, что в пределах подобия имеется взаимно однозначное соответствие между множеством всех четырехмерных алгебр по классификации С.Ли и множеством четырехмерных алгебр по классификационной теореме §4 гл.II. Таким же был результат сопоставления, проведенного в конце §4 гл.I для трехмерных алгебр Ли преобразований плоскости. Однако, если только две трехмерные алгебры из классификации С.Ли допускали уточнение в пределах эквивалентности, то в четырехмерном случае таких алгебр значительно больше.

В §5 гл.II изучаются групповые свойства физической структуры ранга (3,3) и порядка I, задаваемой на двумерных многообразиях $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ с локальными координатами x, y и ξ, η функцией $f(x, y, \xi, \eta)$, допускающей четырехмерную группу движений. Рассматривая функцию f как невырожденный двухточечный инвариант четырехмерных групп Ли преобразований плоскости и используя классификацию предыдущего §4 гл.II, автор устанавливает, что с точностью до замены локальных координат в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ и переобозначения $\psi(f) \to f$ существуют два и только два таких инварианта, задаваемые следующими выражениями: $f = x\xi + y\eta$ и $f = x\xi + y + \eta$. Отмечено также, что ни один из них не может быть получен, если исходить из обычной классификации групп преобразований с точностью до

подобия (слабой эквивалентности). Таким образом, уточнение в пределах эквивалентности классификации С.Ли, осуществленное в §4 гл.II, при вычислении двухточечных инвариантов оказывается необходимым. Результаты §4 и §5 гл.II опубликованы в /9/.

<u>§6 гл.II</u> посвящен изучению групповых свойств физических структур ранга $(n+1,2)$ и порядка I, задаваемых на одномерном и n -мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ функцией $f(x,\xi^1,\dots,\xi^n)$, допускающей n -мерную группу движений. Классификацию всех групп Ли преобразований прямой с точностью до подобия (слабой эквивалентности) провел в свое время сам С.Ли и уточнение ее в пределах эквивалентности не изменило этого результата. Далее находятся с точностью до эквивалентности в соответствующих изоморфных классах двумерные алгебры Ли преобразований плоскости и трехмерные алгебры Ли преобразований трехмерного пространства. Для $n=1,2,3$ доказано, что с точностью до замены локальных координат в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и переобозначения $\psi(f)\to f$ невырожденные двухточечные инварианты определяются следующими выражениями: $f=x+\xi$ для $n=1$, $f=x\xi+\eta$ для $n=2$, $f=(x\xi+\eta)/(x+\nu)$ для $n=3$. Для случая $n\geq 4$ физические структуры ранга $(n+1,2)$ и порядка I не существуют, так как максимальная размерность групп Ли преобразований прямой равна трем. Результаты §6 гл.II опубликованы в работе /I3/.

В главах I и II были определены бинарные физические структуры, когда функция f сопоставляет число паре точек. Бинарные структуры естественно определяются на одном и двух множествах. Функция f для них допускает нетривиальную группу движений с конечным числом параметров, которое было названо степенью групповой симметрии. При определенных соотношениях между рангом физической структуры, числом параметров группы движений и размерностью множеств групповая и феноменологическая симметрии соответствующей геометрии оказываются эквивалентными. Эти соотношения были заложены в определение физической структуры, ее феноменологической и групповой симметрий. Естественно возникает вопрос об их происхождении и обосновании. Кроме того, имеется несколько возможностей обобщения и

развития понятия физической структуры, одна из которых была реализована в §I гл.II, когда двум точкам из разных множеств сопоставлялось S действительных чисел, где $S \geqslant 1$ (S-метрические физические структуры). Другая возможность реализуется в определении тернарных физических структур, например, когда функция f сопоставляет число не паре точек, как в случае бинарных структур, а трем. Тернарные физические структуры могут быть определены на одном, двух и трех множествах. Однако предварительное исследование показало, что тернарные структуры в их естественном определении, в отличие от бинарных, никаких групповых свойств не имеют, то есть соответствующая функция f не допускает нетривиальную группу движений. Возникает поэтому еще и вопрос о внутренних причинах такого различия между бинарными и тернарными физическими структурами.

В §I Заключения, исходя из более общего определения физической структуры, автор сделал попытку ответить на вопрос о соотношениях между рангом физической структуры, степенью ее групповой симметрии и размерностью множеств, а также на вопрос о причинах различия групповых свойств бинарных и тернарных физических структур. Естественно предположить, что только те структуры содержательны в физическом и математическом смыслах, которые наделены нетривиальными групповыми свойствами. Групповой симметрией могут быть наделены только бинарные физические структуры на одном и двух множествах, для которых эта симметрия является определяющей. Последнее означает, что функция f будет задавать бинарную физическую структуру в том и только в том случае, если она допускает нетривиальную конечномерную группу движений. Условие наделения физической структуры групповой симметрией определяет ее степень, устанавливая связь этой степени с размерностью множеств, рангом и порядком структуры. Результаты §I Заключения опубликованы в работе /I4/.

В §2 Заключения обсуждаются и другие вопросы и задачи, естественно возникшие по ходу исследования, а также дополнительные возможности дальнейшего содержательного обобщения и развития понятия физической структуры. Одной из наиболее важ-

ных задач является установление тех структурных ограничений на группы преобразований, которые вытекают из условия невырожденности двухточечного инварианта. Решение этой задачи позволило бы без предварительной полной классификации групп преобразований, с одной стороны, находить все физические структуры, если они существуют, а с другой, не вычисляя двухточечных инвариантов, установить, в каком случае они могут или не могут существовать. Например, известно, что бинарные физические структуры ранга $(n+1, 3)$ и порядка I для $n \geq 4$ не существуют (см. §2 гл.II), хотя имеются $2n$-мерные группы преобразований плоскости $\{x, y\}$ и n-мерного пространства $\{\xi^1, \ldots, \xi^n\}$, необходимые для вычисления соответствующего двухточечного инварианта $f(x, y, \xi^1, \ldots, \xi^n)$. Было бы желательно понять этот нетривиальный факт еще и из общих групповых соображений.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

I. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии//Докл.АН СССР.-I98I.-Т.260,№4.-С.803-805.

2. Михайличенко Г.Г. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости//Сиб.мат.журн.-I982.-Т.23,№5.-С.I32-I4I.

3. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии//Докл.АН СССР.-I983.-Т.269,№2.-С.284-288.

4. Михайличенко Г.Г. Метрика плоскости как двухточечный инвариант/Ред."Сиб.мат.журн."-I984.-36 с.-Деп.в ВИНИТИ 30.I0.84,№6980-84.(Реферат//Сиб.мат.журн.-I985.-Т.26,№5.-С.I98).

5. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии//Сиб.мат.журн.-I984.-Т.25,№5.-С.99-II3.

6. Михайличенко Г.Г. Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур) //Докл.АН СССР.-I985.-Т.284,№I.-С.39-4I.

7. Михайличенко Г.Г. Некоторые замечания к классификации Ли групп преобразований//Вест.МГУ.Сер.I.Математика, механика. -I986.-№5.-С.93.

8. Михайличенко Г.Г. Некоторые замечания об изоморфизме и подобии групп преобразований, их расширении и двухточечных инвариантах/Ред."Сиб.мат.журн."-1987.-13 с.-Деп.в ВИНИТИ 29.05.87,№3858-В87.(Реферат//Сиб.мат.журн.-1989.-Т.30,№1.-С.223).

9. Михайличенко Г.Г. Групповые свойства физической структуры ранга (3,3)/Ред."Сиб.мат.журн."-1987.-22 с.-Деп.в ВИНИТИ 29.05.87,№3855-В87.(Реферат//Сиб.мат.журн.-1989.-Т.30,№1.-С.222).

10. Михайличенко Г.Г. Группы движений в геометрии двух множеств//Всесоюзная конференция по геометрии "в целом", Новосибирск, сентябрь 1987 г.:Тез.докл.-Новосибирск,1987.-С.85.

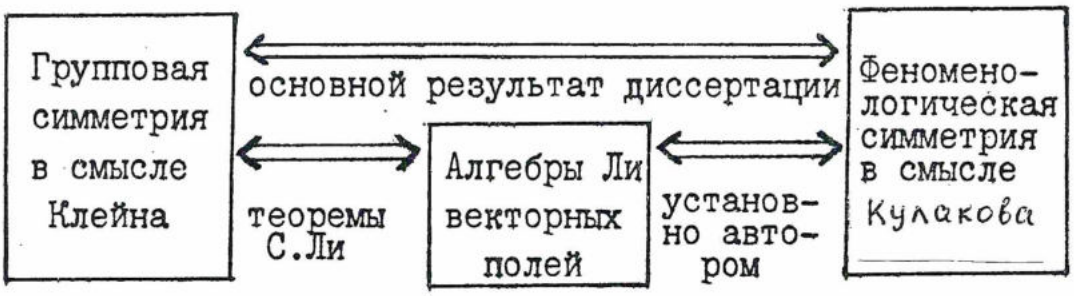
11. Михайличенко Г.Г. Групповые свойства физических структур/Ред."Сиб.мат.журн."-1989.-35 с.-Деп.в ВИНИТИ 10.03.89,№1584-В89.(Реферат//Сиб.мат.журн.-1990.-Т.31,№3.-С.210).

12. Михайличенко Г.Г. Группы движений в геометрии двух множеств/Ред."Сиб.мат.журн."-1989.-18 с.-Деп.в ВИНИТИ 26.09.89,№6016-В89.(Реферат//Сиб.мат.журн.-1990.-Т.31,№5.-С.204).

13. Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия в геометрии двух множеств//Укр.мат.журн.-1989.-Т.41,№11.-С.1501-1506.

14. Михайличенко Г.Г. Групповые свойства произвольных физических структур//Вычислительные системы.-Новосибирск:ИМ, 1990.-Вып.135.-С.27-39.

ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ



Подписано к печати МН
Формат бумаги 60x84,I/I6 Объем
Заказ № Тираж I00 экз.

Отпечатано на ротапринте Института математики
СО АН СССР, 630090, Новосибирск, 90