Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 5

УДК 517.948 *МАТЕМАТИКА*

Г. Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

(Представлено академиком А. Д. Александровым 23 IX 1970)

В работе ([1]) Ю. И. Кулаковым была дана математическая формулировка теории физических структур. Там же рассмотрен простейший случай с использованием метода параметризации. В настоящей работе дается более естественная формулировка аксиом физической структуры и приводится решение функциональных уравнений, возникающих в данной теории.

Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, элементы которых обозначаются латинскими и греческими буквами соответственно, и вещественная функция a: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to R$, сопоставляющая каждой паре $\langle i, \alpha\rangle \in \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ некоторое число $a_{i\alpha} = (i, \alpha) \in R$. Два элемента $i, j \in \mathfrak{M}$ будем считать различными, $i \neq j$, если во множестве $\mathfrak{N}$ найдется хотя бы один такой элемент α, что $(i, \alpha) \neq (j, \alpha)$. Если же для любого $\alpha \in \mathfrak{N}$ имеет место $(i, \alpha) = (j, \alpha)$, то элементы i, j будем считать совпадающими, $i = j$. Аналогично определяется различие или совпадение элементов α, β из множества $\mathfrak{N}$. Будем предполагать, что в обоих множествах отождествлены все совпадающие элементы.

На множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ введем топологию, определив фундаментальные системы окрестностей. Пусть $i_0 \in \mathfrak{M}$ — некоторый фиксированный элемент и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $A\{i_0, \varepsilon\}$ совокупность всех тех элементов $i \in \mathfrak{M}$, для которых выполняется неравенство $|(i, \alpha) - (i_0, \alpha)| < \varepsilon$. Семейство всех множеств $A\{i_0, \varepsilon\}$ для всевозможных значений положительного числа ε образует фундаментальную систему окрестностей точки i_0. Аналогично определяется окрестность $A\{\alpha_0, \delta\}$ и фундаментальная система окрестностей точки $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$. Топология на прямом произведении $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ вводится через топологии сомножителей обычным образом.

Пусть $m \geqslant n \geqslant 2$ и $\mathfrak{M}^m$ и $\mathfrak{N}^n$ соответственно m-кратное и n-кратное прямое произведение множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ на себя. С помощью функции a: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to R$, построим отображение $\mathfrak{M}^m\times\mathfrak{N}^n \to R^{mn}$, сопоставляя каждому кортежу $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle \in \mathfrak{M}^m\times\mathfrak{N}^n$ длины $m+n$ числовую матрицу размера $m\times n$

$$(ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau) = \begin{Vmatrix} (i, \alpha) & (j, \alpha) \ldots (v, \alpha) \\ (i, \beta) & (j, \beta) \ldots (v, \beta) \\ \ldots & \ldots \\ (i, \tau) & (j, \tau) \ldots (v, \tau) \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

которую можно рассматривать как точку пространства R^{mn}.

Множество значений функции $\mathfrak{M}^m\times\mathfrak{N}^n \to R^{mn}$ обозначим через N.

Говорят, что на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задана бинарная физическая структура ранга (m, n), если выполнены следующие условия:

А) Отображение $a[\beta\gamma\ldots\tau]$: $\mathfrak{M}\to R^{n-1}$, задаваемое функцией $i \to (i, \beta\gamma\ldots\tau)$, открыто для любого недиагонального кортежа $\langle\beta\gamma\ldots\tau\rangle \in \mathfrak{N}^{n-1}$, где $\beta\neq\gamma\neq\ldots\neq\tau$; отображение $a[jk\ldots v]$: $\mathfrak{N}\to R^{m-1}$, задаваемое функцией $\alpha \to (jk\ldots v, \alpha)$, открыто для любого недиагонального кортежа $\langle jk\ldots v\rangle \in \mathfrak{M}^{m-1}$, где $j\neq k\neq\ldots\neq v$.

Б) Существует аналитическая функция $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{mn})$, определенная в области $\mathscr{E} \subset R^{mn}$, такая, что множество $M \subset \mathscr{E}$, определяемое уравнением $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{mn}) = 0$, есть непустое связное множество.

В) Градиент Φ отличен от нуля всюду на M, за исключением, может быть, множества поверхностной меры нуль.

Г) Совокупность N всех точек $(ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau) \in R^{mn}$ образует открытое относительно M подмножество множества M, так что

$$\Phi[(ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)] = 0 \tag{2}$$

для любого кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n$.

Теорема. *Если тройка $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, a\colon \mathfrak{M}\times\mathfrak{N} \to R\rangle$ образует бинарную физическую структуру ранга (m, n), то в любых окрестностях $A\{i_0, \varepsilon\}$ и $A\{\alpha_0, \delta\}$ произвольных точек $i_0 \in \mathfrak{M}$ и $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$ найдутся элементы $i_1 \in A\{i_0, \varepsilon\}$ и $\alpha_1 \in A\{\alpha_0, \delta\}$, в некоторых окрестностях $P \subset A\{i_0, \varepsilon\}$ и $Q \subset A\{\alpha_0, \delta\}$ которых функция $a\colon P\times Q \to R$ и аналитическое множество $N_1 \subset N$ значений функции $P^m \times Q^n \to R^{mn}$ могут быть представлены в виде:*

а) *для $m = n = 2$*

$$(i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i + \xi_\alpha),$$

$$\Psi[(i, \alpha)] - \Psi[(i, \beta)] - \Psi[(j, \alpha)] + \Psi[(j, \beta)] = 0; \tag{3}$$

б) *для $m = 4$, $n = 2$*

$$(i, \alpha) = \Psi^{-1}[(x_i\xi_\alpha^1 + \xi_\alpha^2) / (x_i + \xi_\alpha^3)],$$

$$\begin{vmatrix} \Psi[(i,\alpha)] & \Psi[(i,\beta)] & \Psi[(i,\alpha)] & \Psi[(i,\beta)] & 1 \\ \Psi[(j,\alpha)] & \Psi[(j,\beta)] & \Psi[(j,\alpha)] & \Psi[(j,\beta)] & 1 \\ \Psi[(k,\alpha)] & \Psi[(k,\beta)] & \Psi[(k,\alpha)] & \Psi[(k,\beta)] & 1 \\ \Psi[(l,\alpha)] & \Psi[(l,\beta)] & \Psi[(l,\alpha)] & \Psi[(l,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0; \tag{4}$$

в) *для $m = n \geqslant 3$*

$$(i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i^1\xi_\alpha^1 + \ldots + x_i^{m-2}\xi_\alpha^{m-2} + x_i^{m-1}\xi_\alpha^{m-1}),$$

$$\begin{vmatrix} \Psi[(i,\alpha)] & \Psi[(i,\beta)] & \ldots & \Psi[(i,\tau)] \\ \Psi[(j,\alpha)] & \Psi[(j,\beta)] & \ldots & \Psi[(j,\tau)] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Psi[(v,\alpha)] & \Psi[(v,\beta)] & \ldots & \Psi[(v,\tau)] \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

а также

$$(i,\alpha) = \Psi^{-1}(x_i^1\xi_\alpha^1 + \ldots + x_i^{m-2}\xi_\alpha^{m-2} + x_i^{m-1} + \xi_\alpha^{m-1}),$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \Psi[(i,\alpha)] & \Psi[(i,\beta)] & \ldots & \Psi[(i,\tau)] \\ 1 & \Psi[(j,\alpha)] & \Psi[(j,\beta)] & \ldots & \Psi[(j,\tau)] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \Psi[(v,\alpha)] & \Psi[(v,\beta)] & \ldots & \Psi[(v,\tau)] \end{vmatrix} = 0; \tag{6}$$

г) *для $m = n + 1 \geqslant 3$*

$$(i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i^1\xi_\alpha^1 + \ldots + x_i^{m-2}\xi_\alpha^{m-2} + \xi_\alpha^{m-1}),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \Psi[(i,\alpha)] & \Psi[(i,\beta)] & \ldots & \Psi[(i,\tau)] \\ 1 & \Psi[(j,\alpha)] & \Psi[(j,\beta)] & \ldots & \Psi[(j,\tau)] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \Psi[(v,\alpha)] & \Psi[(v,\beta)] & \ldots & \Psi[(v,\tau)] \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

где Ψ — строго монотонная, аналитическая в окрестности точки $(i_1, \alpha_1) \in R$ функция одной переменной, Ψ^{-1} — обратная функция, x_i, ξ_α — независимые параметры;

д) *для $m - n \geqslant 2$, кроме случая $m = 4$, $n = 2$, бинарные физические структуры не существуют.*

Заметим, что полученный результат сформулирован в локальном смысле. Возможности аналитического продолжения результата на все множество N еще не выяснены. Ограничение $m \geqslant n$, очевидно, несущественно. Легко переписать теорему для случая $m \leqslant n$. Существование решений (5), (7) предположил Ю. И. Кулаков ([2]). Решения (4) и (6) впервые были обнаружены автором ([3]).

По аналогичной схеме можно ввести тернарные физические структуры ранга (m, n, p) на трех множествах $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$. Однако предварительные исследования показывают, что тернарные структуры существуют только в простейшем случае $m = n = p = 2$, в отличие от бинарных структур, рассмотренных в данной работе. Возможно, в этом состоит причина несодержательности теории трехмерных определителей. С другой стороны, заметим, что определители (5) и (6) имеют строение определителей Кэли — Менгера и Грама.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. Г. Решетняку за многочисленные полезные замечания и обсуждения, способствовавшие более четкой формулировке исходных аксиом физической структуры.

Новосибирский государственный университет

Поступило
11 IX 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. И. Кулаков, Сиб. матем. журн., **12**, № 5, 1142 (1971). [2] Ю. И. Кулаков, Элементы теории физических структур, Новосибирск, 1968. [3] Г. Г. Михайличенко, Математическое дополнение к ([2]).