Доклады Академии наук СССР
1991. Том 321, № 4

УДК 512.816 МАТЕМАТИКА

© Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

# ДВУМЕТРИЧЕСКИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

*(Представлено академиком Ю.Г. Решетняком 1 VII 1991)*

Следуя [1], дадим краткое определение двуметрических физических структур. Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, представляющие собой гладкие многообразия четной размерности $2m$ и $2n$, где $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$, а также двухкомпонентная функция $f = (f^1, f^2)$, сопоставляющая паре $\langle i\alpha\rangle \in \mathfrak{S}_f$, где $\mathfrak{S}_f \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, два вещественных числа $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), f^2(i\alpha)) \in R^2$. Предполагается, что функция $f$ гладкая, невырожденная (см. ниже) и область ее определения $\mathfrak{S}_f$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ множество. Невырожденность функции $f$, по определению, означает, что для плотных в $\mathfrak{N}^m$ и $\mathfrak{M}^n$ множеств кортежей $\langle \gamma_1 \ldots \gamma_m\rangle$ и $\langle k_1 \ldots k_n\rangle$ длины $m$ и $n$ функциональные соответствия $i \mapsto (f(i\gamma_1), \ldots, f(i\gamma_m)) \in R^{2m}$ и $\alpha \to (f(k_1\alpha), \ldots, f(k_n\alpha)) \in R^{2n}$ имеют максимальные ранги $2m$ и $2n$ для плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множеств точек $i$ и $\alpha$ соответственно. В определяемой геометрии двух множеств (физической структуре) функцию $f = (f^1, f^2)$ назовем *двуметрикой*.

Обозначим: $\{x^1, \ldots, x^{2m}\}$ и $\{\xi^1, \ldots, \xi^{2n}\}$ – локальные координаты в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно. Тогда в некоторой окрестности пары $\langle i\alpha\rangle \in \mathfrak{S}_f$ для исходной функции можно записать ее координатное выражение

$$(1)\qquad f(i\alpha) = f(x^1(i), \ldots, x^{2m}(i),\ \xi^1(\alpha), \ldots, \xi^{2n}(\alpha)).$$

Построим, далее, функцию $F$ с естественной в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ областью определения $\mathfrak{S}_F$, сопоставляя кортежу $\langle ijk \ldots v,\ \alpha\beta\gamma \ldots \tau\rangle$ длины $n + m + 2$ точку $(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots, f(v\tau)) \in R^{2(n+1)(m+1)}$.

Определение 1. Будем говорить, что *функция* $f = (f^1, f^2)$ *задает на множествах* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *двуметрическую физическую структуру ранга* $(n + 1, m + 1)$, если существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждого кортежа $\langle ijk \ldots v,\ \alpha\beta\gamma \ldots \tau\rangle$ длины $n + m + 2$ которого и некоторой его окрестности $U(\langle i \ldots \tau\rangle)$ найдется такая гладкая ранга 2 функция $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, определенная в некоторой области из $R^{2(n+1)(m+1)}$, содержащей точку $F(\langle i \ldots \tau\rangle)$, что множество значений $F(U(\langle i \ldots \tau\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции $\Phi$, т.е.

$$(2)\qquad \Phi(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots, f(v\tau)) = 0$$

для всех кортежей из $U(\langle i \ldots \tau\rangle)$.

Таким образом, локально множество $F(\mathfrak{S}_F)$ принадлежит некоторой регулярной поверхности коразмерности 2 в $R^{2(n+1)(m+1)}$, не обязательно совпадая с ней. Будем также говорить, что функция $f$ задает на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ двуметрическую феноменологически симметричную геометрию, так как уравнение (2) по терминологии работы [2] выражает принцип феноменологической симметрии.

Заметим, что не всякие функции $f$ могут задавать физическую структуру, и потому одной из основных задач теории является их полная классификация. В случае однометрических структур такая классификация была проведена для всех $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ [3], а в случае двуметрических – только для $m = 1$, $n \geqslant 1$ (см. ниже теорему).

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что д в е ф и з и ч е с к и е с т р у к т у р ы, задаваемые на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ функциями $f$ и $g$, э к в и в а л е н т н ы, если существуют такие локальные диффеоморфизмы $\lambda$: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $\sigma$: $\mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, $\psi$: $R^2 \to R^2$, что для плотного и открытого в $\mathfrak{S}_f$ множества пар $\langle i\alpha \rangle$ пара $\langle \lambda(i), \sigma(\alpha) \rangle \in \in \mathfrak{S}_g$ и имеет место соотношение $f(i\alpha) = \psi(g(\lambda(i), \sigma(\alpha)))$.

Т е о р е м а. *Двуметрические физические структуры ранга* $(n+1, 2)$ *существуют только для* $n = 1, 2, 3, 4$ *и не существуют для* $n \geqslant 5$. *С точностью до эквивалентности функция* $f = (f^1, f^2)$, *задающая на двумерном и* $2n$-*мерном многообразиях* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *двуметрическую физическую структуру ранга* $(n+1, 2)$, *в надлежаще выбранной системе локальных координат* $\{x^1, x^2\} = \{x, y\}$ *и* $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \ldots\} = \{\xi, \eta, \mu, \nu, \ldots\}$ *определяется следующими выражениями: для* $n = 1$

(3) $f^1 = x + \xi, \quad f^2 = y + \eta;$

(4) $f^1 = x\xi, \quad f^2 = y\xi + \eta;$

*для* $n = 2$

(5) $f^1 = x\xi + \epsilon y\eta + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi + \nu, \quad \epsilon = 0, \pm 1;$

(6) $f^1 = x\xi + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi^c + \nu, \quad c \neq 1;$

(7) $f^1 = x\xi + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi^2 + x^2\xi^2 \ln \xi;$

(8) $f^1 = x\xi + y\mu, \quad f^2 = x\eta + y\nu;$

*для* $n = 3$

$$f^1 = \frac{(x\xi + \epsilon y\eta + \mu)(x + \rho) - \epsilon(x\eta + y\xi + \nu)(y + \tau)}{(x + \rho)^2 - \epsilon(y + \tau)^2},$$

(9) $$f^2 = \frac{(x\xi + \epsilon y\eta + \mu)(y + \tau) - (x\eta + y\xi + \nu)(x + \rho)}{(x + \rho)^2 - \epsilon(y + \tau)^2},$$

*где* $\epsilon = 0, \pm 1;$

(10) $$f^1 = (x\xi + \mu)/(x + \rho), \quad f^2 = (x\eta + y\nu + \tau)/(x + \rho);$$

(11) $f^1 = x\xi + y\mu + \rho, \quad f^2 = x\eta + y\nu + \tau;$

*для* $n = 4$

(12) $$f^1 = (x\xi + y\mu + \rho)/(x\varphi + y + \omega), \quad f^2 = (x\eta + y\nu + \tau)/(x\varphi + y + \omega).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы существенно опирается на групповые свойства физических структур, установленные в [4]: функция $f = (f^1, f^2)$ будет задавать на двумерном и $2n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ двуметрическую физическую структуру ранга $(n + 1, 2)$ тогда и только тогда, когда она допускает $2n$-мерную локальную группу локальных движений. Под движением в геометрии двух множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ понимаются такие их преобразования $\lambda$ и $\sigma$, при которых сохраняются компоненты функции $f$, т.е. имеет место равенство

(13) $f(i\alpha) = f(\lambda(i), \sigma(\alpha)),$

если пары $\langle i\alpha\rangle$ и $\langle\lambda(i),\ \sigma(\alpha)\rangle$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Множество всех движений есть $2n$-мерная группа, для которой функция $f$, согласно равенству (13), является двухточечным инвариантом. Множества всех преобразований $\lambda$ и $\sigma$ в группе движений являются эффективными гладкими локальными действиями некоторой $2n$-мерной локальной группы Ли $G^{2n}$ в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, причем ее действие в $\mathfrak{N}$ оказывается просто транзитивным. Известно, что все просто транзитивные действия группы Ли подобны любому ее эффективному действию в себе, вследствие чего действие группы $G^{2n}$ в двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ является двухточечным инвариантом некоторого ее действия на прямом произведении $\mathfrak{M}\times G^{2n}$. С. Ли [5] дал полную классификацию локальных действий всех конечномерных групп в плоскости. Эта классификация, воспроизведенная также в монографии [6], была существенно использована при доказательстве теоремы.

Ранее методом, аналогичным только что изложенному, автор исследовал вещественные однометрические физические структуры ранга $(n+1,\ 2)$, задаваемые функцией $f$ на одномерном и $n$-мерном многообразиях [7]. Было установлено, что эти структуры существуют только для $n = 1, 2, 3$ и соответствующая функция $f$ с точностью до эквивалентности определяется следующими выражениями: для $n = 1$

(14) $f = x + \xi$;

для $n = 2$

(15) $f = x\xi + \mu$;

для $n = 3$

(16) $f = (x\xi + \mu)/(x + \rho)$.

Сопоставляя обе приведенные выше классификации, замечаем, что двуметрические физические структуры, в отличие от однометрических, не единственны, за исключением случая $n = 4$. Двуметрики (5) и (9) могут быть получены комплексификацией соответствующих по рангу структуры однометрических выражений (15) и (16). Комплексификация в данном случае состоит из следующих двух этапов: а) замены вещественных функций и координат на комплексные по схеме $f\to$ $\to(f^1, f^2) = f^1 + ef^2$, $x\to(x, y) = x + ey$, $\xi\to(\xi,\eta) = \xi + e\eta$, $\mu\to(\mu,\nu) = \mu + e\nu$, $\rho\to(\rho,\tau) = \rho + e\tau$, где $e$ – мнимая $(e^2 = -1)$, дуальная $(e^2 = 0)$ или двойная $(e^2 =$ $= +1)$ единицы в зависимости от типа комплексного числа; б) выделения вещественной (реальной) и невещественной (мнимой, дуальной или двойной) частей из получающихся комплексных выражений. Дополнительно заметим, что двуметрики (5) и (9) для случая $\epsilon = +1$ является еще и прямой композицией соответствующих однометрических выражений, так как с точностью до эквивалентности они могут быть записаны в виде

(5′) $f^1 = x\xi + \mu,\quad f^2 = y\eta + \nu$;

(9′) $f^1 = (x\xi + \mu)/(x + \rho),\quad f^2 = (y\eta + \nu)/(y + \tau)$.

Двуметрики (8), (11), (12), а также двуметрика $f^1 = x\xi + y + \mu$, $f^2 =$ $= x\eta + y + \nu$, эквивалентная двуметрике (6) с $c = 0$, независимо от автора, найдены также Е.Л. Лозицким (частное сообщение). Сформулированная выше теорема утверждает полноту приведенной в ней классификации двуметрик.

Выражения (3) и (4) можно использовать для одновременного задания в $R^2$ двух бинарных операций – сложения $\oplus$ и умножения $\odot$ :

(17) $(x, y)\oplus(\xi,\eta) = (x + \xi,\ y + \eta)$;

(18) $(x, y)\odot(\xi,\eta) = (x\xi,\ y\xi + \eta)$.

Сложение (17) обычное, а умножение (18) обладает некоторыми особенностями: оно некоммутативно, ассоциативно, дистрибутивно слева, но не дистрибутивно справа. Возможно деление на $(x, y)$, если $x \neq 0$, хотя левое и правое частные не совпадают. Единица равна $(1, 0)$, левое и правое обратные к $(x, y)$ совпадают.

Сохраняя сложение (17), умножение в $R^2$ определим с помощью двуметрик (5), (6), (7) для физической структуры ранга (3, 2):

(19) $(x, y) \odot (\xi, \eta) = (x\xi + \epsilon y\eta,\ x\eta + y\xi),\quad \epsilon = 0, \pm 1,$

(20) $(x, y) \odot (\xi, \eta) = (x\xi, x\eta + y\xi^c),\quad c \neq 1,$

(21) $(x, y) \odot (\xi, \eta) = (x\xi, x\eta + y\xi^2 + x^2\xi^2 \ln \xi).$

Умножение (19) коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно. Единица умножения равна $(1, 0)$. Деление на $(x, y)$ возможно, если $x^2 - \epsilon y^2 \neq 0$. Ясно, что элементы плоскости $R^2$ с операциями (17) и (19) оказываются комплексными числами трех типов, а именно, обычными комплексными числами ($\epsilon = -1$), дуальными ($\epsilon = 0$) или двойными числами ($\epsilon = +1$). Умножение (20) некоммутативно, ассоциативно, дистрибутивно справа, но не дистрибутивно слева. Деление на $(x, y)$ возможно, если $x \neq 0$, единица равна $(1, 0)$. Умножение (21) некоммутативно, неассоциативно и недистрибутивно. Деление на $(x, y)$ возможно, если $x \neq 0$, левая единица равна $(1, 0)$, а правая отсутствует.

Таким образом, из четырех бинарных операций (18), (19), (20), (21), интерпретируемых как умножение, только операция (19) позволяет задать в $R^2$ структуру кольца, так как только она дистрибутивна справа и слева по отношению к сложению (17). Операция (19) является также единственной бинарной операцией, которую можно определить при сложении (17) с помощью двуметрики (9) физической структуры ранга (4, 2). Двуметрики (10), (11) этой же структуры, а также двуметрики (8) и (12) структур ранга (3, 2) и (5, 2) не определяют бинарных операций. Отмеченное обстоятельство можно рассматривать как своего рода обоснование трех типов комплексных чисел. Содержательный смысл бинарных операций (18), (20), (21) пока остается неясным, поэтому полезно было бы более детально исследовать алгебры с этими операциями, а также и со всеми другими, которые можно определить с помощью двуметрик $f = (f^1, f^2)$, задающих физические структуры разных рангов.

В заключение отметим, что гиперкомплексные числа размерности $s \geqslant 1$ естественным образом появляются при рассмотрении $s$-метрических физических структур, определенных в [4].

Автор выражает благодарность А.И. Фету, высказавшему ряд полезных замечаний в ходе обсуждения основных положений и результатов данной работы.

Новосибирский государственный
педагогический институт

Поступило
11 IX 1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайличенко Г.Г.* – ДАН, 1985, т. 284, № 1, с. 39–41. 2. *Кулаков Ю.И.* – ДАН, 1971, т. 201, № 3, с. 570–572. 3. *Михайличенко Г.Г.* – ДАН, 1972, т. 206, № 5, с. 1056–1058. 4. *Михайличенко Г.Г.* – Сиб. мат. журн., 1989. 35 с. Деп. ВИНИТИ, № 1584–В89, 1989. 5. *Lie S.*, *Engel F.* Teorie der Transformationsgruppen. Leipzig: Teubner, 1893, Bd. 3. 6. *Владимиров С.А.* Группы симметрии дифференциальных уравнений и релятивистские поля. М.: Атомиздат, 1979. 167 с. 7. *Михайличенко Г.Г.* – Укр. мат. журн., 1989, т. 41, № 11, с. 1501–1506.