

Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО, В.М. МАЛЫШЕВ

## ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть заданы одномерное многообразие  $\mathfrak{M}$  и функция  $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , сопоставляющая каждой паре  $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$  некоторое число  $f(i, j) \in \mathbb{R}$ . Предполагается, что функция  $f$  гладкая и имеет отличные от нуля производные. Каждой тройке  $\langle i, j, k \rangle \in \mathfrak{M}^3$  функция  $f$  естественно сопоставляет точку  $(f(i, j), f(i, k), f(j, k))$  в  $\mathbb{R}^3$ . Говорят, что функция  $f$  задает на множестве  $\mathfrak{M}$  одномерную феноменологически симметричную геометрию (физическую структуру) ранга 3, если все такие точки лежат на некоторой двумерной гиперповерхности, задаваемой уравнением  $\Phi(f(i, j), f(i, k), f(j, k)) = 0$  с  $\text{grad } \Phi \neq 0$ . Представим это уравнение в виде, разрешенном относительно первого аргумента

$$f(i, j) = \varphi(f(i, k), f(j, k)), \quad (1)$$

где  $\varphi(u, v)$  — функция двух переменных, причем  $\varphi_u \neq 0$ ,  $\varphi_v \neq 0$ .

Уравнение (1), выполняющееся для любой тройки  $\langle i, j, k \rangle$ , является математическим выражением принципа феноменологической симметрии — основного постулата теории физических структур, которая была предложена Ю.И. Кулаковым [1] для анализа строения физических законов.

Рассмотрим далее четверку  $\langle i, j, k, l \rangle$  и запишем уравнение (1) для всех троек из нее:  $\langle i, j, k \rangle$ ,  $\langle i, j, l \rangle$ ,  $\langle i, k, l \rangle$ ,  $\langle j, k, l \rangle$ . Из этих четырех уравнений легко получить соотношение

$$\varphi(\varphi(f(i, l), f(k, l)), \varphi(f(j, l), f(k, l))) = \varphi(f(i, l), f(j, l)),$$

в котором, очевидно, независимы все три переменные. Если для них ввести обозначения  $f(i, l) = x$ ,  $f(j, l) = y$ ,  $f(k, l) = z$ , то для функции  $\varphi(u, v)$  приходим к функциональному уравнению

$$\varphi(\varphi(x, z), \varphi(y, z)) = \varphi(x, y). \quad (2)$$

Уравнение (1) является естественным следствием принципа феноменологической симметрии и, как будет показано ниже, имеет решение, содержательное как в физическом, так и в математическом (геометрическом) смыслах.

С математической точки зрения представляет интерес рассмотреть все варианты, получающиеся всевозможными перестановками переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$ , в левой его части. Таких вариантов, включая само уравнение (2), не сводимых друг к другу, будет восемь (сами же перестановки дают двенадцать):

$$\varphi(\varphi(y, z), \varphi(x, z)) = \varphi(x, y), \quad (3)$$

$$\varphi(\varphi(x, z), \varphi(z, y)) = \varphi(x, y), \quad (4)$$

$$\varphi(\varphi(z, y), \varphi(x, z)) = \varphi(x, y), \quad (5)$$

$$\varphi(\varphi(z, x), \varphi(y, z)) = \varphi(x, y), \quad (6)$$

$$\varphi(\varphi(y, z), \varphi(z, x)) = \varphi(x, y), \quad (7)$$

$$\varphi(\varphi(x, y), \varphi(z, z)) = \varphi(x, y), \quad (8)$$

$$\varphi(\varphi(y, x), \varphi(z, z)) = \varphi(x, y). \quad (9)$$

**Теорема.** Из восьми функциональных уравнений (2)–(9) только уравнения (2), (3), (8), (9) имеют решения с  $\varphi_u \neq 0$ ,  $\varphi_v \neq 0$ . Решения этих четырех уравнений задаются соответствующими выражениями

$$\varphi(u, v) = \psi^{-1}(\psi(u) - \psi(v)), \quad (2')$$

$$\varphi(u, v) = \psi^{-1}(-\psi(u) + \psi(v)), \quad (3')$$

где  $\psi$  — произвольная функция одной переменной с  $\psi' \neq 0$ ,  $\psi^{-1}$  — обратная к ней функция;

$$\varphi(u, v) = \psi^{-1}(\lambda(u, v) - \lambda(v, v) + \lambda(c, c)), \quad (8')$$

где  $\lambda(u, v)$  — произвольная функция двух переменных с  $\lambda_u \neq 0$ ,  $c$  — произвольная постоянная,  $\psi^{-1}$  — функция, обратная к  $\psi(s) = \lambda(s, c)$ ;

$$\varphi(u, v) = \psi^{-1}(\sigma(u, v)), \quad (9')$$

где  $\sigma(u, v)$  — произвольная антисимметричная функция двух переменных с  $\sigma_v \neq 0$ ,  $c$  — произвольная постоянная,  $\psi^{-1}$  — функция, обратная к  $\psi(t) = \sigma(c, t)$ .

Доказательством теоремы будет последовательное решение функциональных уравнений (2)–(9), в которых присутствует только искомая функция  $\varphi(u, v)$ . Методы решения таких уравнений в классе дифференцируемых функций были предложены в [2].

По решениям (2'), (3'), (8'), (9') уравнений (2), (3), (8), (9), а также по отсутствию решений уравнений (4)–(7) можно сделать вывод, что из восьми функциональных уравнений (2)–(9) содержательными в математическом смысле являются только уравнения (2), (3), причем первое из них является прямым следствием принципа феноменологической симметрии. В частности, если решение (2') поставить в уравнение (1), то получим соотношение

$$\psi(f(i, j)) - \psi(f(i, k)) + \psi(f(j, k)) = 0. \quad (10)$$

Будем интерпретировать  $f(i, j)$  как квазирасстояние между точками  $i, j$  евклидовой прямой. И тогда для некоторой функции  $\psi$  соотношение (10) задает связь трех истинных расстояний  $L(i, j) = \psi(f(i, j))$ ,  $L(i, k) = \psi(f(i, k))$ ,  $L(j, k) = \psi(f(j, k))$  между любыми ее тремя точками  $i, j, k$ :

$$L(i, j) - L(i, k) + L(j, k) = 0,$$

причем в координатном представлении полагаем  $L(i, j) = x(i) - x(j)$ . Соотношение (10) выражает также структуру одномерного времени, где  $\psi(f(i, j))$  есть истинный временной промежуток  $T(i, j) = t(i) - t(j)$  между событиями  $i, j$  из некоторого их множества

$$T(i, j) - T(i, k) + T(j, k) = 0.$$

Авторы выражают благодарность Ю.И. Кулакову и участникам научного семинара по теории физических структур в Новосибирском университете за обсуждение роли функциональных уравнений в математическом аппарате современной теоретической физики.

## Литература

1. Кулаков Ю.И. *Элементы теории физических структур*. – Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1968. – 226 с.
2. Михайличенко Г.Г. *Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур* / В кн.: Кулаков Ю.И. *Элементы теории физических структур*. – Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1968. – С.175–226.

*Горно-Алтайский  
государственный университет*

*Поступили  
полный текст 05.08.1997  
краткое сообщение 13.11.2000*