Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, №2, с. 48–53 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДВУХ МНОЖЕСТВ РАНГА $(3, 2)$

Аннотация. Определяется и изучается одна из простейших феноменологически симметричных геометрий двух множеств ранга $(3, 2)$, задаваемая на одномерном и двумерном многообразиях метрической функцией.

Ключевые слова: геометрия двух множеств, метрическая функция, феноменологическая симметрия.

УДК: 514.146

Пусть имеются одномерное и двумерное многообразия M и N, точки которых обозначим строчными латинскими и греческими буквами соответственно, а также метрическая функция f, сопоставляющая некоторым парам $\langle i\alpha\rangle \in M \times N$ действительное число $f(i\alpha) \in R$. Заметим, что метрическая функция f сопоставляет число двум точкам из *разных* множеств и поэтому она не может быть обычной метрикой. Предположим, прежде всего, выполнение следующих двух аксиом.

А1. Область определения функции f открыта и плотна в $M \times N$.

А2. Метрическая функция f достаточно гладкая.

Если x и ξ, η — локальные координаты в многообразиях M и N, то для метрической функции f можно записать ее координатное представление

$$f = f(x, \xi, \eta), \tag{1}$$

причем, например, $f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$.

Предположим также выполнение еще одной аксиомы.

А3. Локальные координаты x и ξ, η в представление (1) входят существенным образом.

Математическим выражением аксиомы **А3** будут следующие неравенства:

$$\partial f(x, \xi, \eta)/\partial x \neq 0, \quad \partial(f(x_1, \xi, \eta), f(x_2, \xi, \eta))/\partial(\xi, \eta) \neq 0, \tag{2}$$

если $x_1 \neq x_2$, которые запишем и для некоторых точек многообразий

$$\partial f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha)/\partial x_i \neq 0, \quad \partial(f(x_j, \xi_\alpha, \eta_\alpha), f(x_k, \xi_\alpha, \eta_\alpha))/\partial(\xi_\alpha, \eta_\alpha) \neq 0, \tag{2$'$}$$

если $j \neq k$.

Построим функцию F, сопоставляя кортежу $\langle ijk, \alpha\beta\rangle \in M^3 \times N^2$ точку $(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta)) \in R^6$, и введем последнюю аксиому.

А4. Множество значений функции F лежит в R^6 на гладкой невырожденной гиперповерхности

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta)) = 0. \tag{3}$$

Поступила 17.07.2014

Определение. Будем говорить, что метрическая функция f задает на одномерном и двумерном многообразиях M и N *феноменологически симметричную геометрию двух множеств* (ФС ГДМ) ранга (3,2), если выполнены аксиомы **А1–А4**.

Уравнение (3) устанавливает нетривиальную связь шести функций: $f(i\alpha)$, $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$, $f(k\alpha)$, $f(k\beta)$ от семи переменных x_i, x_j, x_k, ξ_α, η_α, ξ_β, η_β, для существования которой необходимо и достаточно, чтобы ранг соответствующей функциональной матрицы

$$\left\|\begin{matrix} f_x(i\alpha) & f_x(i\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x(j\alpha) & f_x(j\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_x(k\alpha) & f_x(k\beta) \\ f_\xi(i\alpha) & 0 & f_\xi(j\alpha) & 0 & f_\xi(k\alpha) & 0 \\ f_\eta(i\alpha) & 0 & f_\eta(j\alpha) & 0 & f_\eta(k\alpha) & 0 \\ 0 & f_\xi(i\beta) & 0 & f_\xi(j\beta) & 0 & f_\xi(k\beta) \\ 0 & f_\eta(i\beta) & 0 & f_\eta(j\beta) & 0 & f_\eta(k\beta) \end{matrix}\right\| \tag{4}$$

размера 7×6 был меньше шести.

Теорема. *Если метрическая функция f задает на одномерном и двумерном многообразиях M и N феноменологически симметричную геометрию двух множеств* (*ФС ГДМ*) *ранга* $(3,2)$, *то с точностью до замены координат в многообразиях и ее масштабного преобразования представление* (1) *может быть записано в канонической форме*

$$f = x\xi + \eta. \tag{5}$$

Доказательство. Возьмем два обращающихся в нуль якобиана порядка 6, полученные из матрицы (4) вычеркиванием седьмой и шестой строк, и разложим их по элементам первого столбца

$$\begin{gathered} -f_x(i\alpha)f_\xi(i\beta)f_x(j\beta)f_x(k\beta)A(jk,\alpha) - f_\xi(i\alpha)f_x(i\beta)B_1(jk,\alpha\beta)+ \\ +f_\eta(i\alpha)f_x(i\beta)C_1(jk,\alpha\beta) = 0, \\ -f_x(i\alpha)f_\eta(i\beta)f_x(j\beta)f_x(k\beta)A(jk,\alpha) - f_\xi(i\alpha)f_x(i\beta)B_2(jk,\alpha\beta)+ \\ +f_\eta(i\alpha)f_x(i\beta)C_2(jk,\alpha\beta) = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$A(jk,\alpha\beta) = \begin{vmatrix} f_\xi(j\alpha) & f_\xi(k\alpha) \\ f_\eta(j\alpha) & f_\eta(k\alpha) \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$B_1(jk,\alpha\beta) = \begin{vmatrix} f_x(j\alpha) & f_x(j\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x(k\alpha) & f_x(k\beta) \\ f_\eta(j\alpha) & 0 & f_\eta(k\alpha) & 0 \\ 0 & f_\xi(j\beta) & 0 & f_\xi(k\beta) \end{vmatrix},$$

$$C_1(jk,\alpha\beta) = \begin{vmatrix} f_x(j\alpha) & f_x(j\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x(k\alpha) & f_x(k\beta) \\ f_\xi(j\alpha) & 0 & f_\xi(k\alpha) & 0 \\ 0 & f_\xi(j\beta) & 0 & f_\xi(k\beta) \end{vmatrix},$$

а миноры $B_2(jk,\alpha\beta)$ и $C_2(jk,\alpha\beta)$ получаются из миноров $B_1(jk,\alpha\beta)$ и $C_1(jk,\alpha\beta)$ соответственно заменой $f_\xi(j\beta) \to f_\eta(j\beta)$, $f_\xi(k\beta) \to f_\eta(k\beta)$.

В результате получена система двух дифференциально-функциональных соотношений (6), ранг матрицы коэффициентов которой при производных $f_x(i\alpha)$, $f_\xi(i\alpha)$, $f_\eta(i\alpha)$ равен двум, так как, например,

$$\begin{vmatrix} B_1(jk,\alpha\beta) & C_1(jk,\alpha\beta) \\ B_2(jk,\alpha\beta) & C_2(jk,\alpha\beta) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Действительно, при раскрытии этого определителя получаем произведение

$$f_x(j\alpha)f_x(j\beta)f_x(k\alpha)f_x(k\beta)\begin{vmatrix} f_\xi(j\alpha) & f_\xi(k\alpha) \\ f_\eta(j\alpha) & f_\eta(k\alpha) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f_\xi(j\beta) & f_\xi(k\beta) \\ f_\eta(j\beta) & f_\eta(k\beta) \end{vmatrix} \neq 0,$$

в котором каждый из сомножителей отличен от нуля согласно неравенствам (2).

Каждое из соотношений (6) разделим на $f_x(i\beta)A(jk,\alpha)$, после чего зафиксируем точки j, k и β. Тогда в отношении функции $f(i\alpha)$ получается система двух линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, ранг которой равен двум. Запишем ее, введя удобные обозначения коэффициентов и опуская у переменных (координат) точечные индексы i и α,

$$\begin{gathered} \lambda_1 f_x + \sigma_1 f_\xi + \tau_1 f_\eta = 0, \\ \lambda_2 f_x + \sigma_2 f_\xi + \tau_2 f_\eta = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где $f = f(x,\xi,\eta)$, $\lambda = \lambda(x)$, $\sigma = \sigma(\xi,\eta)$, $\tau = \tau(\xi,\eta)$, причем $\lambda \neq 0$, $\sigma^2 + \tau^2 \neq 0$.

В системе (7) произведем замену переменных

$$y = \omega(x), \quad \mu = \varphi(\xi,\eta), \quad \nu = \psi(\xi,\eta),$$

при которой первое ее уравнение запишется в виде

$$\lambda_1\omega_x f_y + (\sigma_1\varphi_\xi + \tau_1\varphi_\eta)f\mu + (\sigma_1\psi_\xi + \tau_1\psi_\eta)f_\nu = 0,$$

а функции этой замены возьмем из решений интегрируемых уравнений

$$\lambda_1\omega_x = 1, \quad \sigma_1\varphi_\xi + \tau_1\varphi_\eta = 1, \quad \sigma_1\psi_\xi + \tau_1\psi_\eta = 0.$$

Если в системе (7) вернуться к прежним обозначениям коэффициентов и новых переменных, т. е. новых координат в многообразиях M и N, то ее уравнения запишутся в более простом виде

$$f_x + f_\xi = 0, \quad \lambda f_x + \sigma f_\xi + \tau f_\eta = 0, \tag{7$'$}$$

причем во втором уравнении за ненадобностью опущен нижний индекс 2.

Покажем, что в системе (7$'$) $\tau \neq 0$ и $\lambda \neq \mathrm{const}$. Если $\tau = 0$, то из системы (7$'$), имеющей ранг, равный двум, получим $f_x = 0$, $f_\xi = 0$, что, очевидно, противоречит условиям (2). Если же $\lambda = c = \mathrm{const}$, то из системы (7$'$) возникает связь производных $(\sigma - c)f_\xi + \tau f_\eta = 0$, которая также противоречит условиям (2).

Продифференцируем второе уравнение системы (7$'$) по переменным x и ξ, после чего сложим результаты с учетом первого уравнения:

$$\lambda_x f_x + \sigma_\xi f_\xi + \tau_\xi f_\eta = 0. \tag{8}$$

Если ранг расширенной системы (7$'$)–(8) из трех уравнений равен трем, то получим вырождение метрической функции по всем координатам, так как $f_x = 0$, $f_\xi = 0$, $f_\eta = 0$. Поэтому

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & \sigma & \tau \\ \lambda_x & \sigma_\xi & \tau_\xi \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, раскрывая определитель, устанавливаем

$$\lambda_x = \lambda\frac{\tau_\xi}{\tau} - \frac{\sigma\tau_\xi - \tau\sigma_\xi}{\tau}. \tag{9}$$

Соотношение (9) продифференцируем по переменной x, разделяя переменные,

$$\frac{\lambda_{xx}}{\lambda_x} = \frac{\tau_\xi}{\tau} = a = \mathrm{const},$$

откуда после частичного интегрирования этого результата получаем уравнения для коэффициентов системы $(7')$:

$$\lambda_x = a\lambda + b, \quad \sigma_\xi = a\sigma + b, \quad \tau_\xi = a\tau, \tag{10}$$

причем $a^2 + b^2 \neq 0$, так как $\lambda \neq \mathrm{const}$.

При интегрировании уравнений (10) отдельно рассмотрим следующие два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$. В *первом случае*

$$a = 0, \tag{11}$$

и уравнения (10) становятся более простыми

$$\lambda_x = b, \quad \sigma_\xi = b, \quad \tau_\xi = 0,$$

а их решения можно записать в виде

$$\lambda(x) = bx + c, \quad \sigma(\xi, \eta) = b\xi + b\sigma(\eta), \quad \tau(\xi, \eta) = b\tau(\eta),$$

где, очевидно, $b \neq 0$ и $\tau(\eta) \neq 0$.

Запишем систему $(7')$ для метрической функции при найденных в случае (11) ее коэффициентах

$$f_x + f_\xi = 0, \quad xf_x + (\xi + \sigma(\eta))f_\xi + \tau(\eta)f_\eta = 0. \tag{12}$$

В системе (12) произведем замену переменных

$$\mu = \xi + \varphi(\eta), \quad \nu = \psi(\eta), \tag{13}$$

причем $\psi' \neq 0$, учитывая, что при такой замене

$$f_\xi = f_\mu, \quad f_\eta = \varphi'(\eta)f_\mu + \psi'(\eta)f_\nu.$$

Первое уравнение системы (12) сохранит свою простейшую форму, а второе изменится

$$f_x + f_\mu = 0, \quad xf_x + (\xi + \sigma(\eta) + \tau(\eta)\varphi'(\eta))f_\mu + \tau(\eta)\psi'(\eta)f_\nu = 0.$$

Функции φ и ψ в замене переменных (13) возьмем из решений уравнений

$$\sigma(\eta) + \tau(\eta)\varphi'(\eta) = \varphi(\eta), \quad \tau(\eta)\psi'(\eta) = 1.$$

После возвращения к прежним обозначениям переменных система (12) записывается в следующем максимально простом для случая (11) виде:

$$f_x + f_\xi = 0, \; xf_x + \xi f_\xi + f_\eta = 0. \tag{12'}$$

Решение $f = \theta(x + \xi, \eta)$ первого уравнения системы $(12')$, где $\theta = \theta(u, v)$ — функция двух переменных $u = x + \xi$ и $v = \eta$, подставим в ее второе уравнение: $u\theta_u + \theta_v = 0$. Интегрируя полученное уравнение, находим $\theta(u, v) = \chi(u \exp{(-v)})$, где χ — произвольная функция одной переменной с отличной от нуля производной. В результате для метрической функции получаем выражение $f = \chi((x - \xi)\exp{(-\eta)})$, которое перепишем в виде $\chi^{-1}(f) = x\exp{(-\eta)} - \xi\exp{(-\eta)}$, где χ^{-1} — обратная к χ функция. Из него видно, что с точностью до замены переменных $\exp{(-\eta)} \to \xi$, $-\xi\exp{(-\eta)} \to \eta$ и масштабного преобразования $\chi^{-1}(f) \to f$ оно совпадает с каноническим выражением (5), приведенным в доказываемой теореме. Заметим, что все использованные выше при решении исходной системы (7) замены переменных суть замены координат в многообразиях M и N.

Во *втором случае*, когда

$$a \neq 0, \tag{14}$$

решения дифференциальных уравнений (10) для коэффициентов системы $(7')$ можно записать в виде

$$\lambda(x) = c\exp ax - b/a, \quad \sigma(\xi, \eta) = c\sigma(\eta)\exp a\xi - b/a, \quad \tau(\xi, \eta) = ac\tau(\eta)\exp a\xi,$$

где $c \neq 0$, $\tau(\eta) \neq 0$, так как $\lambda_x \neq 0$ и $\tau(\xi, \eta) \neq 0$.

Введем найденные коэффициенты в систему $(7')$, произведя дополнительно замену переменных $ax \to x$, $a\xi \to \xi$,

$$f_x + f_\xi = 0, \quad \exp(x-\xi) f_x + \sigma(\eta) f_\xi + \tau(\eta) f_\eta = 0. \tag{15}$$

Решение $f = \theta(x-\xi, \eta)$ первого уравнения системы (15) подставим в ее второе уравнение $(\exp u - \sigma(v))\theta_u + \tau(v)\theta_v = 0$, где, как и при рассмотрении первого случая, $u = x - \xi$, $v = \eta$. Это уравнение решается методом характеристик

$$\theta(u, v) = \chi(\varphi(v)\exp(-u) + \psi(v)),$$

где функции $\varphi(v)$ и $\psi(v)$ являются решениями других уравнений

$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} = -\frac{\sigma(v)}{\tau(v)}, \quad \frac{\psi'(v)}{\varphi(v)} = \frac{1}{\tau(v)}.$$

Для метрической функции (1) получаем тогда выражение

$$f = \chi(\varphi(\eta)\exp(-x+\xi) + \psi(\eta)),$$

которое, очевидно, с точностью до его масштабного преобразования $\chi^{-1}(f) \to f$ и замены переменных $\exp(-x) \to x$ и $\varphi(\eta)\exp\xi \to \xi$, $\psi(\eta) \to \eta$ (замены координат в многообразиях M и N) может быть записано в канонической форме (5).

Убедимся в том, что для метрической функции (5), удовлетворяющей, очевидно, неравенствам (2) аксиомы **A3**, ранг функциональной матрицы (4) равен пяти. Другими словами, для этой функции существует единственное независимое уравнение (3), выражающее феноменологическую симметрию ранга $(3, 2)$ задаваемой ею (на одномерном и двумерном многообразиях) геометрии двух множеств.

Подставим метрическую функцию (5) в функциональную матрицу (4):

$$\left\| \begin{matrix} \xi_\alpha & \xi_\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_\alpha & \xi_\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_\alpha & \xi_\beta \\ x_i & 0 & x_j & 0 & x_k & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_i & 0 & x_j & 0 & x_k \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{16}$$

Поскольку у матрицы (16) якобиан пятого порядка, полученный вычеркиванием последних ее двух строк и последнего столбца, равный $-\xi_\alpha\xi_\beta^2(x_i - x_j)$, отличен от нуля, а любой якобиан шестого порядка равен нулю, ее ранг действительно равен пяти.

Для шести функций

$$\begin{aligned} f(i\alpha) &= x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha, & f(i\beta) &= x_i\xi_\beta + \eta_\beta, \\ f(j\alpha) &= x_j\xi_\alpha + \eta_\alpha, & f(j\beta) &= x_j\xi_\beta + \eta_\beta, \\ f(k\alpha) &= x_k\xi_\alpha + \eta_\alpha, & f(k\beta) &= x_k\xi_\beta + \eta_\beta \end{aligned}$$

уравнение (3) находится исключением всех семи координат x_i, x_j, x_k, ξ_α, η_α, ξ_β, η_β точек кортежа $\langle ijk, \alpha\beta \rangle$:

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad \square$$

Заметим, что ФС ГДМ ранга (3,2) наделена групповой симметрией степени 2, так как множество ее движений, сохраняющих метрическую функцию (5), состоит из *двупараметрических* групп преобразований многообразий M и N

$$x' = ax + b, \;\; \xi' = \xi/a, \; \eta' = \eta - b\xi/a,$$

которые находятся ([1], § 5) как решения функционального уравнения

$$x'\xi' + \eta' = x\xi + \eta.$$

Таким образом, Эрлангенская программа Ф. Клейна (1872), сформулированная им для обычных геометрий на одном множестве, справедлива и в отношении данной феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга $(3, 2)$.

ФС ГДМ ранга $(3, 2)$ естественно возникает при анализе строения закона Ома ([2], с. 121–123) и потому называется еще физической структурой. Впервые строгое ее математическое определение было дано в работе автора [3], но соответствующая теорема существования и единственности для нее была доказана там более сложным и громоздким методом. В работе [4] сделан естественный переход к аналогичным ФС ГДМ более высокого ранга $(n + 3, 2)$, задаваемым на n-мерном и $n(n + 2)$-мерном многообразиях M и N метрической функцией $f : M \times N \to R^n$. Оказалось, что с точностью до замены координат в многообразиях и ее масштабного преобразования функция f локально изоморфна группе проективных преобразований пространства R^n, определяя на нем n-мерную проективную геометрию.

Литература

[1] Mihailichenko G.G., Muradov R.M. *The geometry of two sets* (LAP LAMBERT Academic Publ., Saarbrucken, 2013).

[2] Кулаков Ю.И. *Теория физических структур* (Доминико, М., 2004).

[3] Михайличенко Г.Г. *Бинарная физическая структура ранга* $(3, 2)$, Сиб. матем. журн. **14** (5), 1057–1064 (1973).

[4] Кыров В.А. *Проективная геометрия и теория физических структур*, Изв. вузов. Матем., № 11, 48–59 (2008).

Г.Г. Михайличенко

профессор, кафедра физики,
Горно-Алтайский государственный университет,
ул. Ленкина, д. 1, г. Горно-Алтайск, 649000, Россия,

`e-mail:` mikhailichenko@gasu.ru

G.G. Mikhailichenko

Phenomenologically symmetric geometry of two sets of rank $(3, 2)$

Abstract. We determine and study one of the simplest phenomenologically symmetric geometry of two sets of rank $(3, 2)$, given on one- and two-dimensional manifolds by metric function.

Keywords: geometry of two sets, metric function, phenomenological symmetry.

G.G. Mihailichenko

Professor, Chair of Physics,
Gorny Altai State University,
1 Lenkin str., Gorno-Altaisk, 649000 Russia,

`e-mail:` mikhailichenko@gasu.ru