Известия вузов. Математика
2020, № 6, с. 9–14

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Р.А. БОГДАНОВА, Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО, Р.М. МУРАДОВ

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ПО РАНГУ $(n+1,2)$ ВЛОЖЕНИЕ ДВУМЕТРИЧЕСКИХ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЙ ДВУХ МНОЖЕСТВ

Аннотация. Известна полная классификация двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств (ДФС ГДМ) ранга $(n+1,2)$, где $n = 1,2,\dots$. Из нее видно, что некоторые геометрии более высокого ранга включают в себя геометрии предыдущего ранга. Такое вложение можно установить (или опровергнуть), решая соответствующее функциональное уравнение, выражающее факт вложения геометрий на языке задающих их метрических функций.

Ключевые слова: геометрия двух множеств, метрическая функция, феноменологическая симметрия, вложение геометрий, функциональное уравнение.

УДК: 514.1:517.965

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-6-9-14

Двуметрическая феноменологически симметричная геометрия двух множеств (ДФС ГДМ) ранга $(n+1,2)$, где $n = 1,2,\dots$, задается на двумерном и 2n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ метрической (двухточечной) функцией $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R^2$, сопоставляющей паре точек из разных множеств два действительных числа. Если x, y и $\xi, \eta, \mu, \nu, \dots$ — локальные координаты в многообразиях, то для двухкомпонентной метрической функции $f = (f^1, f^2)$ можно записать ее координатное представление:

$$f = f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu, \dots). \tag{1}$$

Предполагается выполнение следующих трех аксиом.

А1. *Область определения функции f открыта и плотна в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.*

А2. *В области своего определения функция f достаточно гладкая.*

А3. *Координатное представление* (1) *функции f невырождено относительно двух координат x, y и относительно $2n$ координат $\xi, \eta, \mu, \nu, \dots$.*

Невырожденность метрической функции $f = (f^1, f^2)$ в ее координатном представлении (1) означает необращение в нуль некоторых якобианов. Например, невырожденность представления (1) относительно координат x, y записывается условием $\partial(f^1, f^2)/\partial(x, y) \neq 0$.

Основной в определении ДФС ГДМ ранга $(n+1,2)$ является четвертая аксиома.

А4. *Для плотного и открытого в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^2$ множества кортежей $4(n+1)$ значений метрической функции f связаны уравнением*

$$\Phi = 0, \tag{2}$$

Поступила в редакцию 29.05.2019, после доработки 29.05.2019. Принята к публикации 25.09.2019.

где $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ — *двухкомпонентная функция* $4(n+1)$ *переменных с независимыми компонентами* Φ^1 и Φ^2.

В работе [1] и в монографии ([2], §7) проведена классификация ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$ с точностью до замены кординат в многообразиях $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ и преобразования $\chi(f) \to f$:

для $n = 1$:

$$f^1 = x + \xi, \ \ f^2 = y + \eta; \tag{3}$$

$$f^1 = (x + \xi)y, \ \ f^2 = (x + \xi)\eta; \tag{4}$$

для $n = 2$:

$$f^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + \mu, \ \ f^2 = x\eta + y\xi + \nu, \ \ \varepsilon = 0, \pm 1; \tag{5}$$

$$f^1 = x\xi + \mu, \ \ f^2 = x\eta + y\xi^c + \nu, \ \ c \neq 1; \tag{6}$$

$$f^1 = x\xi + \mu, \ \ f^2 = x\eta + y\xi^2 + x^2\xi^2 \ln \xi + \nu; \tag{7}$$

$$f^1 = x\xi + y\mu, \ \ f^2 = x\eta + y\nu; \tag{8}$$

для $n = 3$:

$$f^1 - ef^2 = \frac{(x + ey)(\xi + e\eta) + \mu + e\nu}{x + ey + \rho + e\tau}, \tag{9}$$

где $e^2 = \varepsilon = -1, \ 0, \ +1$ для комплексных, дуальных и двойных чисел соответственно;

$$f^1 = \frac{x\xi + \mu}{x + \rho}, \ \ f^2 = \frac{x\eta + y\nu + \tau}{x + \rho}; \tag{10}$$

$$f^1 = x\xi + y\mu + \rho, \ \ f^2 = x\eta + y\nu + \tau; \tag{11}$$

для $n = 4$:

$$f^1 = \frac{x\xi + y\mu + \rho}{x\varphi + y + \omega}, \ \ f^2 = \frac{x\eta + y\nu + \tau}{x\varphi + y + \omega}. \tag{12}$$

Для $n \geq 5$ невырожденная метрическая функция $f = (f^1, f^2)$ не существует.

Пусть метрическая функция $g = (g^1, g^2)$ задает ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$, где $n = 1, 2, 3$, а метрическая функция $f = (f^1, f^2)$ задает ДФС ГДМ следующего ранга $(n+2, 2)$. Будем говорить, что первая из этих геометрий вложена во вторую, если в пределах точности классификации (3)–(12) имеет место следующее соотношение:

$$f = \chi(g, \ldots), \tag{13}$$

где справа многоточием обозначены две координаты, появляющиеся при переходе от функции g к функции f. Например, в случае $n = 1$ ими, очевидно, будут координаты μ и ν.

Теорема. *Каждая из ДФС ГДМ ранга* $(n+2, 2)$, *где* $n = 1, 2, 3$, *включает в себя, по крайней мере, одну из ДФС ГДМ предыдущего ранга* $(n+1, 2)$.

Доказательство так сформулированной теоремы состоит в предъявлении **восьми вариантов вложения** в виде явной записи соотношения (13) для каждой из восьми ДФС ГДМ ранга $(n+2, 2)$ и хотя бы одной ДФС ГДМ предыдущего ранга $(n+1, 2)$.

Предположим сначала, что $n = 1$. Соотношение (13) становится более определенным:

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}) = \chi(g(x, y, \xi, \eta), \mu, \nu), \tag{14}$$

где $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, \nu)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi, \eta, \mu, \nu)$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\xi, \eta, \mu, \nu)$, $\bar{\nu} = \bar{\nu}(\xi, \eta, \mu, \nu)$. В правой части соотношения (14) функция g берется из списка (3)–(4), а функция f в его левой части — из списка (5)–(8).

Соотношение (14) является функциональным уравнением относительно шести функций $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, которые при соответствующем вложении осуществляют замены координат в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, удовлетворяющие необходимым условиям их обратимости:

$$\Delta = \frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(x,y)} \neq 0, \quad \Delta_1 = \frac{\partial(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\mu},\bar{\nu})}{\partial(\xi,\eta,\mu,\nu)} \neq 0. \tag{15}$$

Заметим, что по уравнению (14) функция χ находится однозначно, если функции $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ известны как некоторое решение этого уравнения. Заметим также, что сам факт вложения устанавливается существованием хотя бы одного решения уравнения (14), удовлетворяющего условиям (15).

1. Функциональное уравнение (14) для вложения ДФС ГДМ ранга (2,2) с метрической функцией (3) в ДФС ГДМ ранга (3,2) с метрической функцией (5) записывается в виде следующей системы двух уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{x}\bar{\xi} + \varepsilon\bar{y}\bar{\eta} + \bar{\mu} &= \chi^1(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu), \\ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi} + \bar{\nu} &= \chi^2(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu). \end{aligned} \tag{14.1}$$

Частное решение системы (14.1): $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{\xi} = \mu$, $\bar{\eta} = \nu$, $\bar{\mu} = \xi\mu + \varepsilon\eta\nu$, $\bar{\nu} = \xi\nu + \eta\mu$, удовлетворяющее условиям (15) $\Delta = 1 \neq 0$, $\Delta_1 = \mu^2 - \varepsilon\nu^2 \neq 0$, доказывает соответствующее вложение, при котором $\chi^1 = (x+\xi)\mu + \varepsilon(y+\eta)\nu$, $\chi^2 = (x+\xi)\nu + (y+\eta)\mu$.

2. Вложение ДФС ГДМ ранга (2,2) с функцией (3) в ДФС ГДМ ранга (3,2) с функцией (6), как и все последующие, запишем кратко без дополнительных пояснений:

$$\begin{aligned} \bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu} &= \chi^1(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu), \\ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi}^c + \bar{\nu} &= \chi^2(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu), \end{aligned} \tag{14.2}$$

$\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$. $\bar{\xi} = \mu$, $\bar{\eta} = \nu$, $\bar{\mu} = \xi\mu$, $\bar{\nu} = \xi\nu + \eta\mu^c$, где $c \neq 1$, $\Delta = 1 \neq 0$, $\Delta_1 = \mu^{c+1} \neq 0$, $\chi^1 = (x+\xi)\mu$, $\chi^2 = (x+\xi)\nu + (y+\eta)\mu^c$.

3. Вложение ДФС ГДМ ранга (2,2) с функцией (3) в ГДМ ранга (3,2) с функцией (7):

$$\begin{aligned} \bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu} &= \chi^1(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu), \\ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi}^2 + \bar{x}^2\bar{\xi}^2\ln\bar{\xi} + \bar{\nu} &= \chi^2(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu), \end{aligned} \tag{14.3}$$

$\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{\xi} = \mu$, $\bar{\eta} = 2\mu^2\xi\ln\mu + \nu$, $\bar{\mu} = \xi\mu$, $\bar{\nu} = \xi\nu + \eta\mu^2 + \xi^2\mu^2\ln\mu$, $\Delta = 1 \neq 0$, $\Delta_1 = \mu^3 \neq 0$, $\chi^1 = (x+\xi)\mu$, $\chi^2 = (x+\xi)^2\mu^2\ln\mu + (x+\xi)\nu + (y+\eta)\mu^2$.

4. Вложение ДФС ГДМ ранга (2,2) с функцией (3) в ГДМ ранга (3,2) с функцией (8):

$$\begin{aligned} \bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} &= \chi^1(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu), \\ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} &= \chi^2(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu), \end{aligned} \tag{14.4}$$

$\bar{x} = \exp x$, $\bar{y} = \exp y$, $\bar{\xi} = \mu\exp\xi$, $\bar{\eta} = \mu^2\exp\xi$, $\bar{\mu} = \nu\exp\eta$, $\bar{\nu} = \nu^2\exp\eta$, $\Delta = \exp(x+y) \neq 0$, $\Delta_1 = -\mu^2\nu^2\exp 2(\xi+\eta) \neq 0$, $\chi^1 = \mu\exp(x+\xi) + \nu\exp(y+\eta)$, $\chi^2 = \mu^2\exp(x+\xi) + \nu^2\exp(y+\eta)$.

Таким образом, ДФС ГДМ ранга (2,2), задаваемая аддитивной метрической функцией (3), вложима во все ДФС ГДМ ранга (3,2), задаваемые метрическими функциями (5)–(8).

Перейдем к случаю $n = 2$, для которого общее соотношение (13) записывается в следующем виде:

$$f(\bar{x},\bar{y},\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\mu},\bar{\nu},\bar{\rho},\bar{\tau}) = \chi(g(x,y,\xi,\eta,\mu,\nu),\rho,\tau). \tag{16}$$

Соотношение (16) представляет собой функциональное уравнение относительно восьми функций: $\bar{x} = \bar{x}(x,y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x,y)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\ldots)$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\ldots)$, $\bar{\nu} = \bar{\nu}(\ldots)$,

$\bar{\rho} = \bar{\rho}(\ldots)$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\ldots)$, удовлетворяющих условиям

$$\Delta = \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} \neq 0, \ \ \Delta_2 = \frac{\partial(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\rho}, \bar{\tau})}{\partial(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)} \neq 0. \tag{17}$$

В левой части уравнения (16) представлена одна из трех функций, задающих ДФС ГДМ ранга (4,2), а в правой — какая-то из четырех функций (5)–(8), задающих ДФС ГДМ ранга (3,2). Для доказательства теоремы в случае $n = 2$ достаточно рассмотреть только три варианта вложения с функциями (9)–(11) в левой части уравнения (16).

5. Вложение ДФС ГДМ ранга (3,2) с функцией (5) в ГДМ ранга (4,2) с функцией (9):

$$\begin{gathered}((\bar{x} + e\bar{y})(\bar{\xi} + e\bar{\eta}) + \bar{\mu} + e\bar{\nu})/(\bar{x} + e\bar{y} + \bar{\rho} + e\bar{\tau}) = \\ = \chi^1(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu, x\eta + y\xi + \nu, \rho, \tau) - e\chi^2(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu, x\eta + y\xi + \nu, \rho, \tau),\end{gathered} \tag{16.1}$$

$\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{\xi} = \rho$, $\bar{\eta} = \tau$, $\bar{\mu} = ((1 + \mu\rho + \varepsilon\nu\tau)\xi - \varepsilon(\mu\tau + \nu\rho)\eta)/(\xi^2 - \varepsilon\eta^2)$, $\bar{\nu} = (-(1+\mu\rho+\varepsilon\nu\tau)\eta+(\mu\tau+\nu\rho)\xi)/(\xi^2-\varepsilon\eta^2)$, $\bar{\rho} = (\mu\xi-\varepsilon\nu\eta)/(\xi^2-\varepsilon\eta^2)$, $\bar{\tau} = (-\mu\eta+\nu\xi)/(\xi^2-\varepsilon\eta^2)$, $\Delta = 1 \neq 0$, $\Delta_2 = 1/(\xi^2-\varepsilon\eta^2)^3 \neq 0$, $\chi^1 = \rho + (x\xi+\varepsilon y\eta+\mu)/((x\xi+\varepsilon y\eta+\mu)^2 - \varepsilon(x\eta+y\xi+\nu)^2)$, $\chi^2 = -\tau + (x\eta + y\xi + \nu)/((x\xi + \varepsilon y\eta + \mu)^2 - \varepsilon(x\eta + y\xi + \nu)^2)$.

6. Вложение ДФС ГДМ ранга (3,2) с функцией (8) в ГДМ ранга (4,2) с функцией (10):

$$\begin{gathered}(\bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu})/(\bar{x} + \bar{\rho}) = \chi^1(x\xi + y\mu, x\eta + y\nu, \rho, \tau), \\ (\bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} + \bar{\tau})/(\bar{x} + \bar{\rho}) = \chi^2(x\xi + y\mu, x\eta + y\nu, \rho, \tau),\end{gathered} \tag{16.2}$$

$\bar{x} = x/y$, $\bar{y} = 1/y$, $\bar{\xi} = \xi/\eta$, $\bar{\eta} = (\xi\rho + \eta\tau)/\eta$, $\bar{\mu} = \mu/\eta$, $\bar{\nu} = 1/\eta$, $\bar{\rho} = \nu/\eta$, $\bar{\tau} = (\mu\rho + \nu\tau)/\eta$, $\Delta = -1/y^3 \neq 0$, $\Delta_2 = (\mu\eta - \nu\xi)/\eta^7 \neq 0$, $\chi^1 = (x\xi + y\mu)/(x\eta + y\nu)$, $\chi^2 = (1 + (x\xi + y\mu)\rho + (x\eta + y\nu)\tau)/(x\eta + y\nu)$.

7. Вложение ДФС ГДМ ранга (3,2) с функцией (8) в ГДМ ранга (4,2) с функцией (11):

$$\begin{gathered}\bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} + \bar{\rho} = \chi^1(x\xi + y\mu, x\eta + y\nu, \rho, \tau), \\ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} + \bar{\tau} = \chi^2(x\xi + y\mu, x\eta + y\nu, \rho, \tau),\end{gathered} \tag{16.3}$$

$\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{\xi} = \xi$, $\bar{\eta} = \eta$, $\bar{\mu} = \mu$, $\bar{\nu} = \nu$, $\bar{\rho} = \rho$, $\bar{\tau} = \tau$, $\Delta = 1 \neq 0$, $\Delta_2 = 1 \neq 0$, $\chi^1 = x\xi + y\mu + \rho$, $\chi^2 = x\eta + y\nu + \tau$.

Перейдем к последнему случаю $n = 3$. Соответствующее функциональное уравнение, вытекающее из общего соотношения (13), будет следующим:

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\rho}, \bar{\tau}, \bar{\varphi}, \bar{\omega}) = \chi(g(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau), \varphi, \omega), \tag{18}$$

где в левой части представлена метрическая функция (12), задающая единственную ДФС ГДМ ранга (5,2), а в правой — какая-то из трех метрических функций (9)–(11), задающих ДФС ГДМ ранга(4,2). Неизвестными в уравнении (18) являются десять функций: $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau, \varphi, \omega)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\ldots)$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\ldots)$, $\bar{\nu} = \bar{\nu}(\ldots)$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\ldots)$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\ldots)$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\ldots)$, $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\ldots)$, удовлетворяющих условиям

$$\Delta = \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} \neq 0, \ \ \Delta_3 = \frac{\partial(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\rho}, \bar{\tau}, \bar{\varphi}, \bar{\omega})}{\partial(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau, \varphi, \omega)} \neq 0. \tag{19}$$

8. Вложение ДФС ГДМ ранга (4,2) с функцией (11) в ГДМ ранга (5,2) с функцией (12):

$$\begin{gathered}(\bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} + \bar{\rho})/(\bar{x}\bar{\varphi} + \bar{y} + \bar{\omega}) = \chi^1(x\xi + y\mu + \rho, x\eta + y\nu + \tau, \varphi, \omega), \\ (\bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} + \bar{\tau})/(\bar{x}\bar{\varphi} + \bar{y} + \bar{\omega}) = \chi^2(x\xi + y\mu + \rho, x\eta + y\nu + \tau, \varphi, \omega),\end{gathered} \tag{18.1}$$

$\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{\xi} = \xi/\nu$, $\bar{\eta} = (\xi\varphi + \eta\omega)/\nu$, $\bar{\mu} = \mu/\nu$, $\bar{\nu} = (\mu\varphi + \nu\omega)/\nu$, $\bar{\rho} = \rho/\nu$, $\bar{\tau} = (\rho\varphi + \tau\omega + 1)/\nu$, $\bar{\varphi} = \eta/\nu$, $\bar{\omega} = \tau/\nu$, $\Delta = 1 \neq 0$, $\Delta_3 = (\xi\nu - \eta\mu)/\nu^9 \neq 0$, $\chi^1 = (x\xi + y\mu + \rho)/(x\eta + y\nu + \tau)$, $\chi^2 = (1 + (x\xi + y\mu + \rho)\varphi + (x\eta + y\nu + \tau)\omega)/(x\eta + y\nu + \tau)$, что и завершает доказательство теоремы.

В проведенном доказательстве теоремы были использованы частные решения восьми систем двух функциональных уравнений (14.1–14.4), (16.1–16.3), (18.1) из двадцати трех возможных систем. Рассмотрение же всех систем позволило бы установить, какие ДФС ГДМ могут быть вложены, а какие — нет по наличию или отсутствию решений, удовлетворяющих необходимым условиям (15), (17), (19), у соответствующих систем функциональных уравнений. Например, для случая $n=1$ в работе [3] было установлено, что ДФС ГДМ ранга (2,2), задаваемая неаддитивной метрической функцией (4), тоже вложима во все ДФС ГДМ ранга (3,2) как и ДФС ГДМ ранга (2,2), задаваемая аддитивной метрической функцией (3).

Опишем кратко метод решения систем (14.1–14.4), (16.1–16.3), (18.1) функциональных уравнений. На первом этапе дифференцирование уравнений по некоторым независимым переменным приводит к системе функционально-дифференциальных соотношений. На втором этапе фиксирование в них определенных переменных превращает их в систему дифференциальных уравнений в частных производных. Ограничения на решения последних определяются их подстановкой в исходную систему функциональных уравнений с учетом необходимых условий обратимости (15), (17), (19). Существование таких решений устанавливает факт соответствующего вложения, а их отсутствие доказывает его невозможность.

Заметим, что классификационная задача вложения для однометрических ФС ГДМ ранга $(n+1,2)$ была решена В.А. Кыровым в работе [4].

В данной работе случаи невозможности вложения не были рассмотрены. Но они важны как в плане установления всех возможных вложений, так и в плане развития методов решения систем функциональных уравнений с несколькими неизвестными функциями, зависящими, в свою очередь, от нескольких переменных. Авторы планируют осуществить это в расширенном варианте настоящего исследования.

В заключение приведем **общее решение** системы

$$\begin{aligned} \bar{x}\bar{\xi}+\bar{\mu} &= \chi^1(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu), \\ \bar{x}\bar{\eta}+\bar{y}\bar{\xi}+\bar{\nu} &= \chi^2(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu), \end{aligned}$$

двух функциональных уравнений (14.1) для случая $\varepsilon=0$:

решение первого типа (без экспоненты): $\bar{x}=ax+by+g$, $\bar{y}=acx^2/2+bcxy+b\gamma y^2/2+$ $+(h+gc)x+(\beta+g\gamma)y+\alpha$, $\bar{\xi}=\bar{\xi}(\mu,\nu)$, $\bar{\eta}=(c\xi+\gamma\eta)\bar{\xi}(\mu,\nu)+\bar{\eta}(\mu,\nu)$, $\bar{\mu}=(a\xi+b\eta)\bar{\xi}(\mu,\nu)+$ $+\bar{\mu}(\mu,\nu)$, $\bar{\nu}=(ac\xi^2/2+bc\xi\eta+b\gamma\eta^2/2+h\xi+\beta\eta)\bar{\xi}(\mu,\nu)+(a\xi+b\eta)\bar{\eta}(\mu,\nu)+\bar{\nu}(\mu,\nu)$, где $a\gamma-bc=0$;

решение второго типа (с экспонентой): $\bar{x}=h\exp(ax+by)+g$, $\bar{y}=(h(cx+\gamma y)+$ $+\beta)\exp(ax+by)+\alpha$, $\bar{\xi}=\bar{\xi}(\mu,\nu)\exp(a\xi+b\eta)$, $\bar{\eta}=((c\xi+\gamma\eta)\bar{\xi}(\mu,\nu)+\bar{\eta}(\mu,\nu))\exp(a\xi+b\eta)$, $\bar{\mu}=$ $-g\bar{\xi}(\mu,\nu)\exp(a\xi+b\eta)+\bar{\mu}(\mu,\nu)$, $\bar{\nu}=-((g(c\xi+\gamma\eta)+\alpha)\bar{\xi}(\mu,\nu)+g\bar{\eta}(\mu,\nu))\exp(a\xi+b\eta)+\bar{\nu}(\mu,\nu)$.

Ограничения на константы $a,b,c,g,h,\alpha,\beta,\gamma$ и коэффициенты $\bar{\xi}(\mu,\nu)$, $\bar{\eta}(\mu,\nu)$, $\bar{\mu}(\mu,\nu)$, $\bar{\nu}(\mu,\nu)$ этих решений определяются из условий (15). Частное решение $\bar{x}=x$, $\bar{y}=y$, $\bar{\xi}=\mu$, $\bar{\eta}=\nu$, $\bar{\mu}=\xi\mu$, $\bar{\nu}=\xi\nu+\eta\mu$, использованное в доказательстве теоремы, получается из решения первого типа при следующих значениях констант и коэффициентов: $a=1$, $b=0$, $c=0$, $g=0$, $h=0$, $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=0$, $\bar{\xi}(\mu,\nu)=\mu$, $\bar{\eta}(\mu,\nu)=\nu$, $\bar{\mu}(\mu,\nu)=0$, $\bar{\nu}(\mu,\nu)=0$.

Литература

[1] Михайличенко Г.Г. *Двуметрические физические структуры ранга* $(n+1,2)$, Сиб. матем. журн. **34** (3), 132-143 (1993).

[2] Михайличенко Г.Г. *Групповая симметрия физических структур* (Барнаул, БГПУ, Горно-Алтайск, ГАГУ, 2003).

[3] Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. *К вопросу о вложении ДФС ГДМ ранга* $(2,2)$ *в ДФС ГДМ ранга* $(3,2)$ (Матер. междунар. конф. "Ломоносовские чтения на Алтае", 299-304, 14–17 ноября 2017).

[4] Кыров В.А. *О вложении двуметрических феноменологически симетричных геометрий*, Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и механ. (56), 5-16 (2018). DOI: 10.17223/19988621/56/1

Рада Александровна Богданова

Горно-Алтайский государственный университет,
ул. Ленкина, д. 1, г. Горно-Алтайск, 649000, Россия,

e-mail: bog-rada@yandex.ru

Геннадий Григорьевич Михайличенко

Горно-Алтайский государственный университет,
ул. Ленкина, д. 1, г. Горно-Алтайск, 649000, Россия,

e-mail: mikhailichenko@gasu.ru

Роман Мохуббатович Мурадов

Горно-Алтайский государственный университет,
ул. Ленкина, д. 1, г. Горно-Алтайск, 649000, Россия,

e-mail: rm200980@mail.ru

R.A. Bogdanova, G.G. Mikhailichenko, and R.M. Muradov

Successive in rank $(n+1,2)$ embedding of dimetric phenomenologically symmetric geometries of two sets

Abstract. Is known complete classification of dimetric phenomenologically symmetrical geometries of two sets of rank $(n+1,2)$, where $n = 1,2,\dots$. From that classification it can be seen that some geometries of higher rank include in it geometries of previous rank. Such embedding can be proved (or disproved) by solving corresponding functional equation in which fact of embedding of geometries is expressed on language of metric functions that define them.

Keywords: geometry of two sets, metric function, phenomenological symmetry, embedding of geometries, functional equation.

Rada Aleksandrovna Bogdanova

Gorno-Altaisk State University,
1 Lenkina str., Gorno-Altaisk, 649000, Russia,

e-mail: bog-rada@yandex.ru

Gennady Grigoryevich Mikhailichenko

Gorno-Altaisk State University,
1 Lenkina str., Gorno-Altaisk, 649000, Russia,

e-mail: mikhailichenko@gasu.ru

Roman Mokhubbatovich Muradov

Gorno-Altaisk State University,
1 Lenkina str., Gorno-Altaisk, 649000, Russia,

e-mail: rm200980@mail.ru