Министерство образования и науки РФ

Горно-Алтайский государственный университет

Г.Г. Михайличенко, Р.М. Мурадов

ФИЗИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ КАК ГЕОМЕТРИИ ДВУХ МНОЖЕСТВ

Приложения
В.А. Кырова и
А.Н. Бородина

Горно-Алтайск
2008

УДК 514.1 + 512.816
ББК 181.15
М 69

Г.Г.Михайличенко, Р.М.Мурадов. Физические структуры как геометрии двух множеств. Горно-Алтайск: издательство Горно-Алтайского государственного университета, 2008, 156 с.

Теория физических структур была предложена в шестидесятых годах прошлого века профессором Новосибирского университета Ю.И.Кулаковым для классификации законов физики. История возникновения и развития этой теории достаточно подробно изложена ее автором в его монографии [1]. Физическая структура представляет собой своеобразную геометрию двух множеств, метрическая функция которой сопоставляет число паре точек, но не из одного множества, как в обычной геометрии, а из двух разных множеств. В новой геометрии проявляются групповая симметрия, задаваемая группой ее движений, и феноменологическая, суть которой состоит в наличии функциональной связи между значениями метрической функции для определенных наборов точек. Обе симметрии оказываются эквивалентными.

Книга адресована преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов как пособие к спецкурсу, который читается автором на физико-математическом факультете Горно-Алтайского государственного университета (ГАГУ).

Р е ц е н з е т ы:

доктор физико-математических наук Е.Д.Родионов
доктор физико-математических наук В.В.Славский
кандидат физико-математических наук К.О.Кизбикенов
кафедра геометрии Барнаульского госпедуниверситета

Содержание

Введение

К основному принципу Теории физических структур – принципу *феноменологической симметрии* – ее автор, профессор Новосибирского университета Юрий Иванович Кулаков, пришел, анализируя строение всем известного второго закона Ньютона в механике. В его обычной записи $F = ma$ функционально связаны три разнородные величины: масса m, характеризующая материальное тело, сила F, характеризующая воздействующий на него ускоритель, и, наконец, ускорение a, характеризующее отношение тела и ускорителя. Отмеченная разнородность выявится особенно наглядно, если ввести множество материальных тел и множество ускорителей. Тогда тело i с массой m_i под воздействием ускорителя α с силой F_α движется с ускорением $a_{i\alpha}$, причем второй закон Ньютона теперь запишется в следующей виде: $F_\alpha = m_i a_{i\alpha}$. Ясно, что ключевую роль в этом законе играет двухиндексное ускорение $a_{i\alpha}$, а не одноиндексные сила F_α и масса m_i. С другой стороны, естественно предположить, что физический закон есть функциональная связь между однородными физическими величинами. Такой связи не может быть только между силами или только между массами, так как ускоритель и материальные тела суть независимые объекты. Но между ускорениями функциональная связь вполне может существовать. Действительно, для любых двух материальных тел i, j и любых двух ускорителей α, β четыре возможных ускорения удовлетворяют уравнению $a_{i\alpha}a_{j\beta} - a_{i\beta}a_{j\alpha} = 0$. По терминологии Кулакова это уравнение задает второй закон Ньютона в феноменологически симметричной форме, не содержащей ни силы, ни массы. Однако и сила и масса могут быть выражены через ускорения, если ввести эталонное тело и эталонный ускоритель, о чем более подробно будет сказано в первом параграфе. Ускорение $a_{i\alpha}$, являясь некоторой функцией пары точек i и α из разных множеств, может рассматриваться как, в некотором смысле, расстояние между ними, задавая тем самым геометрию двух множеств.

Для введения такой геометрии имеются не только физические предпосылки, но и математические. Дело в том, что метрическая функция геометрии двух множеств допускает такую группу движений, которая ее однозначно определяет. Таким образом, "Эрлангенская программа"Ф.Клейна (1872) действует не только в отношении обычных геометрий на одном множестве, но и в отношении геометрий на двух множествах. Кроме того, групповая и феноменологическая симметрии оказываются эквивалентными в любой геометрии. Например, шесть взаимных расстояний для любых четырех точек плоскости Евклида функционально связаны, так как трехмерный объем тетраэдра с вершинами, лежащими на плоскости, всегда равен нулю. Эта связь и выражает феноменологическую симметрию плоскости Евклида. С другой стороны, группа движений плоскости Евклида трехмерна. Два параметра задают параллельный перенос вдоль координатных осей, а третий – вращение вокруг начала координат. Заметим, что группа движений геометрии двух множеств, связанной со вторым законом Ньютона, зависит только от одного параметра.

В **первой главе** на основе анализа второго закона Ньютона в механике и закона Ома в электродинамике вводятся простейшие геометрии двух множеств как физические структуры минимальных рангов (2,2) и (3,2). Показывается, что имеются и другие их физические интерпретации. При достаточно строгом математическом определении этих структур можно доказать соответствующие теоремы существования и единственности. Группы движений и их инварианты находятся как решения функциональных уравнений, рассмотрение которых представляет самостоятельный интерес.

Во **второй главе** вводятся физические структуры произвольного ранга и приводится их полная классификация. Физические интерпретации структур более высокого ранга не столь очевидны и впечатляющи, как для структур ранга (2,2) и (3,2) из первой главы, но в математическом отношении связанные с ними геометрии двух множеств, наделенные феноменологической и групповой симметриями, оказываются очень содержательными, приводя к интересным и нестандартным задачам, которые могут составить темы курсовых и дипломных работ.

В **третьей главе** использована еще одна возможность расширения представления о геометрии двух множеств, когда метрическая функция сопостовляет паре точек не одно число, а несколько. Приводятся полные классификации двуметрических и триметрических физических структур, устанавливается феноменологическая симметрия некоторых из них.

В **четвертой главе** показано, что полиметрические физические структуры тесно связаны с гиперкомплексными числами. В частности, полная классификация двуметрических физических структур дает независимый выход на комплексные, двойные и дуальные числа, хотя только по ним, конечно, полную классификацию этих структур построить нельзя. Аналогичный результат имеет место и для гиперкомплексных чисел большей размерности. Заметим, что при написания этой главы был использован материал кандидатской диссертации Р.М.Мурадова, являющегося соавтором данного пособия. Именно им установлена феноменологическая симметрия всех двуметрических и триметрических геометрий двух множеств, метрические функции которых оказываются изотопны квазигрупповым операциям.

Во последних параграфах каждой из четырех глав рассматриваются типичные примеры и предлагаются задачи с описанием методов их решения и краткими указаниями к нему, а после **Заключения** помещены *варианты контрольных заданий*, среди которых имеются и еще не решенные задачи. На их решении каждый студент и будущий аспирант мог бы проверить свои способности к научным исследованиям на уровне дипломной работы и, возможно, кандидатской диссертации.

В *Приложении* В.А.Кырова, проведена полная классификация четыреметрических физических структур ранга (2,2), а в *Приложении* А.Н.Бородина изучаются груды как алгебраические следствия Теории физических структур.

ГЛАВА I. Простейшие физические структуры

§1. Второй закон Ньютона в механике и физическая структура ранга (2,2)

Второй закон Ньютона в механике, как известно, устанавливает связь трех величин – силы, массы и ускорения. Его обычная формула для одномерного движения

$$F = ma \tag{1.1}$$

прочитывется следующим образом: *сила F, действующая на тело, прямо пропорциональна произведению его массы m на сообщаемое ему ускорение a.* Однако при более глубоком анализе закона замечаем, что природа трех величин, в него входящих, совершенно различная. Действительно, масса m характеризует только то материальное тело, движение которого мы изучаем. Сила F характеризует только действие какого-то другого тела на данное. Это другое тело сбычно называют ускорителем или акселератором. Ускорение же a характеризует не движущееся тело только, а результат воздействия ускорителя на него, так как без этого воздействия тело будет двигаться с постоянной скоростью, то есть без ускорения согласно первому закону Ньютона. Таким образом, второй закон Ньютона связывает между собой три разнородные физические величины. Данное обстоятельсво привело к тому, что физическое содержание самого закона стало не совсем ясным. Одни авторы говорят, что второй закон Ньютона определяет силу через массу и ускорение, другие – что этим законом масса определяется через силу и ускорение, третьи – что ускорение определяется через силу и массу. В действительности же законом устанавливается связь трех разнородных физических величин, для определения численного значения которых используются различные приборы – акселерометр, динамометр и весы.

Запишем теперь формулу закона Ньютона в таком виде, чтобы подчеркнуть разнородность физических величин, в него входящих. Для этого введем множество материальных тел $\mathfrak{M} = \{i, j, k, ...\}$, движение которых мы изучаем, и множество ускорителей $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$, под действием которых происходит изменение движения тел. Ускоритель α, действуя с силой F_α на тело i массы m_i, сообщает ему ускорение $a_{i\alpha}$, и по второму закону Ньютона согласно формуле (1.1) имеем связь

$$F_\alpha = m_i a_{i\alpha}. \tag{1.2}$$

Теперь ясно видно, что сила F_α и масса m_i являются значениями двух числовых функций $F : \mathfrak{N} \to R$ и $m : \mathfrak{M} \to R$ для нечисловых переменных $\alpha \in \mathfrak{N}$

и $i \in \mathfrak{M}$ соответственно, в то время как ускорение $a_{i\alpha}$ является значением одной числовой функции $a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ для пары $<i\alpha> \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. То есть сила и масса являются одноиндексными величинами, а ускорение двухиндексной величиной. Очевидно также, что в уравнении (1.2) закона Ньютона ключевой величиной является ускорение $a_{i\alpha}$. Действительно, ни для какого набора материалных тел из $\mathfrak{M}$ нельзя установить связь только между соответствующими массами. Аналогично ни для какого набора ускорителей из $\mathfrak{N}$ нет связи только между соответствующими силами. Однако строение формулы (1.2) таково, что для дюбых двух тел $i, j \in \mathfrak{M}$ и любых двух ускорителей $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ из нее легко получается связь четырех ускорений $a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{æ\beta}$, задаваемая уравнением

$$a_{i\alpha}a_{j\beta} - a_{i\beta}a_{j\alpha} = 0. \tag{1.3}$$

В терминах Ю.И.Кулакова [1] уравнение (1.3) задает второй закон Ньютона в так называемой феноменологически симметричной форме. Особенностью этой формы закона по сравненнию с обычной является, во-первых, то, что он теперь задает связь только между измеряемыми в опыте ускорениями как однородными физическими величинами, а во-вторых, из нее следует обычная форма (1.1), причем одновременно определяются сила ускорителя и масса тела.

Выделим в множестве материальных тел $\mathfrak{M}$ некоторое тело k, а в множестве ускорителей $\mathfrak{N}$ некоторый ускоритель γ, и назовем их эталонами в соответствующих множествах. Например, в качестве эталонного тела можно взять тот платиноиридиевый цилиндр, который хранится в Севре под Парижем. За эталон ускорителя удобно взять такой, который, действуя на эталонное тело, сообщает ему единичное ускорение в системе СИ, то есть один метр на секунду в квадрате. Запишем, далее, уравнение (1.3) для произвольных тела $i \in \mathfrak{M}$ и ускорителя $\alpha \in \mathfrak{N}$ вместе с эталонами k и γ:

$$a_{i\alpha}a_{k\gamma} - a_{i\gamma}a_{k\alpha} = 0. \tag{1.4}$$

По условию выбора эталонов k и γ в системе СИ $a_{k\gamma} = 1$. Ускорение $a_{k\alpha}$ эталонного тела k под действием ускорителя α, назовем силой F_α этого ускорителя, причем численное значение ускорения $a_{k\alpha}$, измеренное в метрах на секунду в квадрате, будем считать равной численному значению силы F_α, выраженной в ньютонах. Величину же $1/a_{i\gamma}$, обратную ускорению тела i под действием эталонного ускорителя γ, назовем массой m_i этого тела, причем численное значение величины $1/a_{i\gamma}$, измеренной в системе СИ, будем считать равной численному значению массы m_i, выраженной в килограммах. Поскольку $a_{k\gamma} = 1$, выбранное эталонное тело k имеет массу m_k, равную одному килограмму, а выбранный эталонный ускоритель имеет силу F_γ, равную одному ньютону. Вводя в уравнение (1.4) соответствующие обозначения силы F_α и массы m_i, получаем уравнение (1.2) для произвольного тела $i \in \mathfrak{M}$ и произвольного ускорителя $\alpha \in \mathfrak{N}$, то есть приходим к обычной записи (1.1) второго закона Ньютона.

Замечательным свойством феноменологически симметричной формы (1.3) закона Ньютона является то, что она не случайна, а является следствием принципа феноменологической симметрии, который в данном случае требует, чтобы для любых двух тел $i, j \in \mathfrak{M}$ и любых двух ускорителей $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ четыре возможных значения ускорения были функционально связаны уравнением

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta}) = 0. \tag{1.5}$$

Действительно, предположим, что мы бы не знали уравнения (1.1), тривиальным следствием которого была феноменологически симметричная форма (1.3) второго закона Ньютона, но имели информацию о том, что какая-то из таких форм вида (1.5) имеет место. Проверим одну из них, незначительно отличающуюся от уравнения (1.3):

$$a_{i\alpha}a_{j\beta} + a_{i\beta}a_{j\alpha} = 0.$$

Если в этом уравнении положить $i = j$ и $\alpha = \beta$, то мы получим странное следствие: $a_{i\alpha} = 0$, то есть произвольному телу i никакой ускоритель α не может сообщить отличного от нуля ускорения. Ясно, что физического содержания такой закон в механике иметь не может. Таким образом, феноменологически симметричная форма закона не может быть произвольной, а все возможные такие формы должны быть найдены как решения уравнения (1.5), представляющего собой особого рода функциональное уравнение.

Второй закон Ньютона, задаваемый уравнениями (1.1) и (1.3), запишем в мультипликативной канонической форме:

$$f = x\xi, \quad f(i\alpha)f(j\beta) - f(i\beta)f(j\alpha) = 0, \tag{1.6}$$

где, например, $f(i\alpha) = x_i\xi_\alpha$, введя следующие единые обозначения функций и координат:

$$f = a, \quad x = 1/m, \quad \xi = F. \tag{1.7}$$

Уравнения канонической формы (1.6) представляют собой чисто математические соотношения, которые можно наполнить разным физическим содержанием. Для второго закона Ньютона согласно обозначениям (1.7) функция f есть измеряемое в опыте ускорение a тела под действием ускорителя, координата x задает величину обратную массе m тела, а координата ξ совпадает с силой F ускорителя.

Такой подход к канонической форме (1.6) оправдан тем, что она может быть наполнена и другим физическим содержанием, то есть к ней приводится не только второй закон Ньютона в механике, но и многие другие физические законы.

Рассмотрим, например, еще закон преломления в оптике для того случая, когда луч света падает из вакуума в среду, известная формула которого

$$\sin\varphi/\sin\psi = n \tag{1.8}$$

прочитывается следующим образом: *отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно показателю преломления среды.*

Легко понять, что в законе преломления (1.8), также как и во втором законе Ньютона (1.1), между собой связаны разные по своей природе физические величины. В самом деле, угол падения φ характеризует только падающий луч света. а показатель преломления n в рассматриваемом случае только среду. Но угол преломления ψ, непосредственно измеряемый в опыте, характеризует одновременно и падающий луч и среду, определяя их взаимное отношение.

Подчеркнем отмеченное обстоятельство, введя множество падающих лучей света $\mathfrak{M} = \{i, j, k, ...\}$ и множество оптических сред $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$. Тогда для произвольного луча $i \in \mathfrak{M}$ с углом падения φ_i и произвольной среды $\alpha \in \mathfrak{N}$ с показателем преломления n_α формула (1.8) закона преломления примет следующий вид:

$$\sin\varphi_i / \sin\psi_{i\alpha} = n_\alpha, \tag{1.9}$$

откуда видим, что величины φ, n и ψ имеют еще и различную математическую природу, так как первые две величины одноиндексные и характеризуют только падающий луч и оптическую среду, а третья – двухиндексная и характеризует уже отношение падающего луча и среды.

Ключевую роль в законе преломления (1.9) играет, очевидно, угол преломления и потому естествено переписать этот закон в феноменологически симметричной форме, содержащей только измеряемые в опыте углы преломления. Для этого, как и в случае второго закона Ньютона (1.2), необходимо взять по два элемента из каждого множества, то есть два луча i, j из множества падающих лучей $\mathfrak{M}$ и две среды α, β из множества оптических сред $\mathfrak{N}$. Между четырьмя возможными углами преломления $\psi_{i\alpha}, \psi_{i\beta}, \psi_{j\alpha}, \psi_{j\beta}$, используя формулу (1.9), легко находим связь

$$\sin\psi_{i\alpha}\sin\psi_{j\beta} - \sin\psi_{i\beta}\sin\psi_{j\alpha} = 0, \tag{1.10}$$

уравнение которой задает закон преломления в феноменологически симметричной форме. Заметим, что два уравнения (1.8) и (1.10) закона преломления приводятся к мультипликативной канонической форме (1.6), если положить

$$f = \sin\psi, \quad x = \sin\varphi, \quad \xi = 1/n. \tag{1.11}$$

Таким образом, каноническая форма (1.6) может быть наполнена различным физическим содержанием, если точно указать, из каких физических объектов состоят множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, а так же какой измерительной процедурой двум объектам из этих множеств сопоставляется число. Будем называть математический объект, для которого выполняются уравнения (1.6) *физической структурой,* так как он имеет, как было показано выше, различные физические интерпретации. Будем также говорить, что функция f задает на двух одномерных множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *физическую структуру ранга (2,2),* поскольку вторым уравнением (1.6) задается функциональная связь значений этой функции для любых двух элементов i, j из первого множества и любых двух элементов α, β из второго.

§2. Физическая структура ранга (2,2) как геометрия двух множеств

Физическая структура ранга (2,2), возникшая из анализа, проведенного в §1, строения второго закона Ньютона в механике и закона преломления в оптике, может быть определена и исследована как чисто математический объект, в отношении которого естественно поставить вопрос о его существовании и единственности. В его определении мы будем опираться на монографию [2], где дано общее определение физической структуры произвольного ранга.

Пусть имеются два можества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, являющиеся одномерными многообразиями, точки которых будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами соответственно, а также функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, сопоставляющая паре $< i\alpha > \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ некоторое число $f(i\alpha) \in R$. Если в одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ локальные координаты обозначить через x и ξ соответственно, то для исходной функции f можно записать следующее координатное представление:

$$f = f(x, \xi), \tag{2.1}$$

причем, например,

$$f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha). \tag{2.1$'$}$$

В отношении функции (2.1) предположим выполнение следующих трех аксиом:

I. Область определения функции $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ множество.

II. Функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ достаточно гладкая.

III. В координатном представлении (2.1) обе частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial \xi$ отличны от нуля.

Достаточная гладкость означает, что в области своего определения непрерывна как сама функция f, так и все ее призводные достаточно высокого порядка. Гладкую функцию f, для которой выполняется условие III, будем называть невырожденной, так как координаты x и ξ согласно этому условию входят в нее существенным образом (не выпадают).

Определение 1. Будем говорить, что функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, удовлетворяющая условиям аксиом I, II, III, задает на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *геометрию двух множеств.*

Такое определение оправдано тем, что функция f, подобно метрике в обычной геометрии, сопоставляет число паре точек, но не из одного множества, а из двух разных – $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Поэтому ниже функцию f будем называть *метрической,* а ее значение $f(i\alpha)$ для пары $< i\alpha >$ *расстоянием* (в некотором обобщенном смысле) между точками $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ этой пары. Ясно, что обычные аксиомы метрики в отношении метрической функции f не имеют смысла.

Введем еще функцию $F : \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2 \to R^4$, сопоставляющую кортежу $< ij, \alpha\beta >$ из $\mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2$ точку $(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) \in R^4$, координаты которой в R^4 определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью значений функции f для четырех пар его элементов ($< i\alpha >, < i\beta >, < j\alpha >, < j\beta >$), если эти пары принадлежат области определения метрической функции f. Область же определения функции F есть, очевидно, открытое и плотное в $\mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2$ множество.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, удовлетворяющая условиям аксиом I, II, III, задает на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (2,2)*, если дополнительно выполняется следующая аксиома:

IY. Множество значений функции $F : \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2 \to R^4$ лежит в R^4 на гладкой невырожденной гиперповерхности.

Гладкая невырожденная (трехмерная) гиперповерхность в R^4 задается уравнением $\Phi = 0$, где $\Phi : R^4 \to R$ – некоторая достаточно гладкая функция четырех переменных с открытой в R^4 областью определения и отличным от нуля градиентом на плотном множестве точек самой гиперповерхности. Таким образом, согласно аксиоме IY для любого кортежа $< ij, \alpha\beta >$ из области определения функции F имеет место уравнение

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) = 0. \tag{2.2}$$

Аксиома IY составляет содержание принципа феноменологической симметрии в теории физических структур, предложенной профессором Новосибирского университета Ю.И.Кулаковым [3] в 1968 году для классификации физических законов. Уравнение (2.2) задает нетривиальную функциональную связь между четырьмя измеряемыми в опыте значениями физической величины f и является аналитическим выражением физического закона, записанного в феноменологически симметричной форме.

Используя представление (2.1), запишем координатное задание для введенной выше функции F:

$$f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha),\ f(i\beta) = f(x_i, \xi_\beta),\ f(j\alpha) = f(x_j, \xi_\alpha),\ f(j\beta) = f(x_j, \xi_\beta), \tag{2.3}$$

функциональная матрица которого

$$\left\| \begin{array}{cccc} f_x(i\alpha) & f_x(i\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x(j\alpha) & f_x(j\beta) \\ f_\xi(i\alpha) & 0 & f_\xi(j\alpha) & 0 \\ 0 & f_\xi(i\beta) & 0 & f_\xi(j\beta) \end{array} \right\| \tag{2.4}$$

квадратная четвертого порядка. Здесь через f_x, f_ξ обозначены соответствующие частные производные функции f, например, $f_x(i\alpha) = \partial f(i\alpha)/\partial x_i$.

Задание (2.3) для функции F представляет собой систему четырех функций $f(i\alpha)$, $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$, зависящих специальным образом от четырех переменных x_i, x_j, ξ_α, ξ_β. Поскольку число функций в системе (2.3) не больше числа переменных, наличие связи (2.2) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольных функций в этой системе.

Теорема 1. *Если метрическая функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ задает на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (2,2), то найдутся такие три гладкие* *функции $\chi : R \to R,\ \varphi : R \to R,\ \psi : R \to R$ одной переменной с открытыми в R областями определения и с отличными от нуля производными $\chi',\ \varphi', \psi'$, что ее координатное представление может быть записано в следующем виде:*

$$f = f(x,\xi) = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)). \tag{2.5}$$

Как хорошо известно из математического анализа, условием, необходимым и достаточным для того, чтобы четыре функции от четырех переменных были функционально связаны, является обращение в нуль определителя функциональной матрицы для них, который называется якобианом. У функциональной матрицы (2.4) всего один якобиан, так как она квадратная, и потому

$$\begin{vmatrix} f_x(i\alpha) & f_x(i\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x(j\alpha) & f_x(j\beta) \\ f_\xi(i\alpha) & 0 & f_\xi(j\alpha) & 0 \\ 0 & f_\xi(i\beta) & 0 & f_\xi(j\beta) \end{vmatrix} = 0. \tag{2.6}$$

Условие (2.6) выполняется тождественно по всем четырем координатам $x_i,\ x_j,\ \xi_\alpha,\ \xi_\beta$ и представляет собой функционально-дифференциальное уравнение относительно метрической функции f. Для решения этого уравнения раскроем сначала определитель (2.6) по элементам первого столбца:

$$-f_x(i\alpha)f_\xi(i\beta)f_\xi(j\alpha)f_x(j\beta) + f_\xi(i\alpha)f_x(i\beta)f_x(j\alpha)f_\xi(j\beta) = 0,$$

после чего разделим его на $f_x(i\beta)f_\xi(j\alpha)$:

$$-f_x(i\alpha)f_\xi(i\beta)f_x(j\beta)/f_x(i\beta) + f_\xi(i\alpha)f_x(j\alpha)f_\xi(j\beta)/f_\xi(j\alpha) = 0.$$

В полученном выражении произошло разделение координат x_i и ξ_α точек i и α. Поскольку оно является тождеством по координатам всех четырех точек кортежа $<ij,\alpha\beta>$, зафиксируем оставшиеся две x_j и ξ_β, введя удобные обозначения $A(i) = A(x_i) \neq 0$ и $B(\alpha) = B(\xi_\alpha) \neq 0$ для коэффициентов при производных $f_x(i\alpha)$ и $f_\xi(i\alpha)$ соответственно:

$$A(i)f_x(i\alpha) - B(\alpha)f_\xi(i\alpha) = 0. \tag{2.7}$$

Таким образом, от функционально-дифференциального уравнения (2.6) для метрической функции f был сделан переход к дифференциальному уравнению в частных производных (2.7) первого порядка, линейному и однородному. Такие уравнения, как известно, решаются методом характеристик. В соответствующем уравнении характеристик $dx_i/A(i) = -d\xi_\alpha/B(\alpha)$ переменные x_i и ξ_α разделены и поэтому оно легко интегрируется: $\varphi(i)+\psi(\alpha) = const$, где $\varphi(i) = \int dx_i/A(i),\ \psi(\alpha) = \int d\xi_\alpha/B(\alpha)$, причем, очевидно, $\varphi'(i) \neq 0,\ \psi'(\alpha) \neq 0$. Общим же решением дифференциального уравнения (2.7) является произвольная функция от интеграла уравнений характеристик: $f(i\alpha) = \chi(\varphi(i) + \psi(\alpha))$, которое совпадает с выражением (2.5) из доказываемой теоремы 1, если опустить обозначения конкретных точек i и α. Вследствие невырожденности метрической функции f должна быть отлична от нуля и производная χ' функции χ. Полученное выражение (2.5) является решением дифференциального уравнения (2.7), которое является следствием исходного функционально-дифференциального уравнения (2.6). Проверим подстановкой, что выражение (2.5) является также решением и уравнения (2.6):

$$\begin{vmatrix} \chi'(i\alpha)\varphi'(i) & \chi'(i\beta)\varphi'(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi'(j\alpha)\varphi'(j) & \chi'(j\beta)\varphi'(j) \\ \chi'(i\alpha)\psi'(\alpha) & 0 & \chi'(j\alpha)\psi'(\alpha) & 0 \\ 0 & \chi'(i\beta)\psi'(\beta) & 0 & \chi'(j\beta)\psi'(\beta) \end{vmatrix} =$$

$$= \chi'(i\alpha)\chi'(i\beta)\chi'(j\alpha)\chi'(j\beta)\varphi'(i)\varphi'(j)\psi'(\alpha)\psi'(\beta) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

так как второй определитель с элементами из нулей и единиц заведомо равен нулю. Установленный факт и завершает доказательство теоремы 1.

Для метрической функции (2.5) уравнение (2.2), выражающее феноменологическую симметрию ранга (2,2) задаваемой ею физической структуры (геометрии двух множеств) может быть записано в следующем виде:

$$\chi^{-1}(f(i\alpha)) - \chi^{-1}(f(i\beta)) - \chi^{-1}(f(j\alpha)) + \chi^{-1}(f(j\beta)) = 0, \tag{2.8}$$

где χ^{-1} – обратная к χ функция.

С помощью двух функций $\varphi(x)$ и $\psi(\xi)$ из выражения (2.5) в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ можно ввести новые локальные координаты: $\varphi(x) \to x$ и $\psi(\xi) \to \xi$, а с помощью третьей функции χ – задать масштабное преобразование самой метрической функции: $\chi^{-1}(f) \to f$. С учетом вышесказанного теорему 1 переформулируем в других выражениях:

Теорема 2. *Метрическая функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, задающая на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (2,2), с точностью до масштабного преобразования и в надлежаще выбранных в них системах локальных координат может быть записана в следующей аддитивной канонической форме:*

$$f = x + \xi. \tag{2.9}$$

Для метрической функции (2.9) уравнение, выражающее феноменологическую симметрию ранга (2,2) задаваемой ею физической структуры (геометрии двух множеств) тоже будет простым:

$$f(i\alpha) - f(i\beta) - f(j\alpha) + f(j\beta) = 0. \tag{2.10}$$

Заметим, что мультипликативная каноническая форма (1.6), полученная в §1 при анализе строения второго закона Ньютона, сводится к аддитивной канонической форме (2.9) масштабным преобразованием $\ln f \to f$ и заменами координат $\ln x \to x,\ \ln\xi \to \xi$.

В обычной геометрии одного множества феноменологическая симметрия тесно связана с групповой, будучи ей эквивалентна. Для двумерной геометрии, например, эта эквивалентность устанавливается следующей теоремой [4]: *Для того чтобы метрическая функция* $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ *задавала на двумерном многообразии* $\mathfrak{M}$ *феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на нем двумерную геометрию, наделенную групповой симметрией степени три.* Последнее означает, что метрическая функция допускает трехпараметрическую группу движений и потому жесткие фигура имеют три степени свободы. Аналогичная ситуация имеет место и в феноменологически симметричной геометрии двух множеств. Покажем это на примере физической структуры ранга (2,2).

Движение в геометрии двух множеств по сравнению с геометрией одного множества имеет свою специфику, так как метрическая функция сопоставляет число двум точкам, но не из одного множества, а из двух разных. Движение по своему определению должно сохранять значение метрической функции для любой пары точек $< i\alpha >$ и потому представляет собой совокупность таких двух гладких и обратимых преобразований

$$i' = \lambda(i), \ \alpha' = \sigma(\alpha) \tag{2.11}$$

каждого из множеств, при которых выполняется следующее равенство:

$$f(i'\alpha') = f(i\alpha). \tag{2.12}$$

При известной метрической функции f равенство (2.12) представляет собой функциональное уравнение на множество движений (2.11), которое, естественно, должно быть группой и определять групповую симметрию соответствующей геометрии двух множеств. Если же заданы группы преобразований (2.11), которые должны составить группу движений в некоторой геометрии двух множеств, то равенство (2.12) представляет собой функциональное уравнение уже на саму метрическую функцию как двухточечный инвариант этой группы. Оказывается, что для метрической функции, задающей физическую структуру любого ранга, двухточечный инвариант группы ее движений решением уравнения (2.12) определяется однозначно с точностью до масштабного преобразования.

Запишем преобразования (2.11) и уравнение (2.12) в координатном представлении для физической структуры (феноменологически симметричной геометрии двух множеств) ранга (2,2) на одномерных многообразиях, опуская обозначения конкретных точек i и α:

$$x' = \lambda(x), \ \xi' = \sigma(\xi), \tag{2.13}$$

$$f(x', \xi') = f(x, \xi), \tag{2.14}$$

где гладкие функции λ и σ имеют отличные от нуля производные λ' и σ'. Гладкой является также сама метрическая функция $f(x, \xi)$, у которой, вследствие невырожденности, должны быть отличны от нуля обе производные f_x и f_ξ.

Согласно теореме 2 для метрической функции f физической структуры ранга (2,2) можно взять координатное представление в аддитивной канонической форме

(2.9). Запишем для нее функциональное уравнение (2.14) относительно функций λ и σ, задающих преобразования многообразий в движении (2.13):

$$\lambda(x) + \sigma(\xi) = x + \xi. \tag{2.15}$$

В уравнении (2.15) переменные x и ξ можно разделить: $\lambda(x) - x = -\sigma(\xi) + \xi = a$, где a – произвольная постоянная. Таким образом, $\lambda(x) = x + a$, $\sigma(\xi) = \xi - a$ и соответствующее по формулам (2.13) множество движений

$$x' = x + a,\ \xi' = \xi - a, \tag{2.16}$$

сохраняющих метрическую функцию (2.9), есть однопараметрическое множество параллельных переносов. Это множество, очевидно, яляется группой. Проверка всех четырех аксиом группы тривиальна, в частности, покою как отсутствию движения соответствует нулевое значение параметра a, в то время как движение, обратное данному с параметром a, задается тем же по значению, но противоположным по знаку, параметром $-a$.

Покажем еще, что если метрическая функция $f = f(x, \xi)$ допускает однопараметрическую группу движений

$$x' = \lambda(x, a),\ \xi' = \sigma(\xi, a), \tag{2.17}$$

то она на одномерных многообразиях задает феноменологически симметричную геометрию двух множеств (физическую структуру) ранга (2,2).

Подставим движения (2.17) в функциональное уравнение (2.14):

$$f(\lambda(x, a), \sigma(\xi, a)) = f(x, \xi). \tag{2.18}$$

Равенство (2.18), справедливое для любых двух точек и любого движения, должно выполняться тождественно как по координатам x, ξ многообразий $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, так и по параметру a группы (2.17), представляя собой функциональное уравнение на метрическую функцию f. Но параметр a входит только в левую часть этого уравнения, откуда после дифференцирования по нему получаем:

$$f_{x'}(x', \xi')\partial\lambda(x, a)/\partial a + f_{\xi'}(x', \xi')\partial\sigma(\xi, a)/\partial a = 0.$$

Далее параметру a придадим значение $a = 0$, соответствующее тождественному преобразованию $x' = x$, $\xi' = \xi$, полагая $A(x) = \partial\lambda(x, a)/\partial a|_{a=0}$, $B(\xi) = -\partial\sigma(\xi, a)/\partial a|_{a=0}$. В результате получаем дифференциальное уравнение $A(x)f_x(x, \xi) - B(\xi)f_\xi(x, \xi) = 0$, совпадающее с уравнением (2.7) и имеющее решение (2.5).

Как известно из теории групп преобразований, любая однопараметрическая группа преобразований подобна группе параллельных переносов, то есть группа (2.17) в надлежаще выбранных системах координат x, ξ и параметра a может быть записана уравнениями (2.16) и потому соответствующий двухточечный инвариант с точностью до масштабного преобразования имеет аддитивную каноническую форму (2.9).

Объединяя этот известный факт с нашим предыдущим результатом, делаем заключение, что справедлива следующая

Теорема 3. *Для того, чтобы метрическая функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ задавала на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (2,2), необходимо и достаточно, чтобы множество ее движений (2.13) было однопараметрической группой (2.17).*

§3. Закон Ома и физическая структура ранга (3,2)

Мы будем рассматривать закон Ома, который определяет силу тока I, измеряемую амперметром в замкнутой цепи, содержащей проводник с сопротивлением R и источник тока с электродвижущей силой $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r:

$$I = \mathcal{E}/(R + r). \tag{3.1}$$

Ясно, как и при анализе закона Ньютона в §1, что закон Ома в его обычной форме (3.1) связывает между собой физически разнородные величины. Действительно, внешнее сопротивление R характеризует в цепи только проводник, а электродвижущая сила $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r характеризуют только источник тока. Основной же величиной в законе Ома является, очевидно, измеряемый в опыте ток I, который характеризует отношение проводника и источника, соединенных последовательно в замкнутой цепи. Физическое и математическое различия величин, входящих в закон Ома, обнаружатся более явно, если предварительно ввести множество проводников $\mathfrak{M} = \{i, j, k, ...\}$ и множество источников тока $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$, а также функцию тока $I : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, сопоставляющую каждому проводнику i с сопротивлением R_i и каждому источнику α с электродвижущей силой $\mathcal{E}_\alpha$ и внутренним сопротивлением r_α численное значение величины электрического тока $I_{i\alpha}$, измеряемого амперметром в конкретной экспериментальной ситуации:

$$I_{i\alpha} = \mathcal{E}_\alpha/(R_i + r_\alpha). \tag{3.2}$$

Заметим, что в записи (3.2) закона Ома ток $I_{i\alpha}$ является двухиндексной величиной, а все остальные, то есть $R_i,\ \mathcal{E}_\alpha,\ r_\alpha$, – одноиндексными. Строение же самого закона таково, что из него можно получить связь только между измеряемыми токами. Для этого возьмем три произвольные проводника i, j, k, два произвольные источника тока α, β и, дополнительно к току $I_{i\alpha}$, по выражению (3.2) выпишем еще пять его значений:

$$I_{i\beta},\ I_{j\alpha},\ I_{j\beta},\ I_{k\alpha},\ I_{k\beta}. \tag{3.2$'$}$$

Из выражений (3.2), (3.2′) сравнительно просто исключаются совпротивления R_i, R_j, R_k трех проводников i, j, k, электродвижущие силы $\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta$ и внутренние сопротивления r_α, r_β обоих источников тока α, β. В результате для любых трех проводников i, j, k и любых двух источников α, β получается следующая связь между шестью возможными $(6 = 3 \cdot 2)$ значениями тока I:

$$\begin{vmatrix} I_{i\alpha} & I_{i\beta} & I_{i\alpha}I_{i\beta} \\ I_{j\alpha} & I_{j\beta} & I_{j\alpha}I_{i\beta} \\ I_{k\alpha} & I_{k\beta} & I_{k\alpha}I_{k\beta} \end{vmatrix} = 0. \tag{3.3}$$

Функциональная связь (3.3) по Кулакову [1] представляет собой закон Ома в феноменологически симметричной форме. Особенностью этой формы, прежде всего, является то, что в нее входят только однородные в физическом и математическом смыслах величины. Обычная же форма (3.1) закона Ома может быть получена из феноменологически симметричной формы (3.3) фиксированием двух эталонных проводников и одного эталонного источника тока. При этом раскрывается физический смысл сопротивления R проводника, электродвижущей силы $\mathcal{E}$ и внутреннего сопротивления r источника тока. Кроме того, сама форма (3.3) является не случайной, но, в некотором смысле, единственно возможной как следствие принципа феноменологической симметрии ранга (3,2).

Поскольку не только закону Ома (3.1) можно придать феноменологически симметричную форму (3.3), но и некоторым другим законам физики, удобно ее записать в каноническом виде, введя следующие обозначения: $R = x,\ 1/\mathcal{E} = \xi,\ r/\mathcal{E} = \eta,\ 1/I = f$:

$$f = x\xi + \eta, \tag{3.4}$$

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.5}$$

где, например, $f(i\alpha) = x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha$.

Рассмотрим еще один физический закон, а именно закон линейного теплового расширения твердых тел:

$$L = L_0(1 + Et), \tag{3.6}$$

где L – длина стержня при данной температуре t в градусах по Цельсию, L_0 – его длина при нулевой температуре и E – коэффициент теплового расширения. В законе (3.6), также как и в законе Ома (3.1), связаны между собой физически разнордные величины. Действительно, температура t характеризует только тот термостат, в котором проводится измерение длины стержня, а начальная длина L_0 и коэффициент теплового расширения E характеризуют только сам стержень. Длина же L зависит не только от самого стержня, но и от того, в каком термостате он находится.

Подчеркнем отмеченное различие, введя множество термостатов $\mathfrak{M} = \{i, j, k, ...\}$ и множество стержней $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$. Термостат i характеризуется своей температурой t_i, измеряемой термометром, а стержень α характеризуется своей начальной длиной $L_{0\alpha}$ при нулевой температуре и коэффициентом объемного расширения E_α, который в линейном приближении считается постоянным. Измеряемая же в опыте длина $L_{i\alpha}$ стержня α, находящегося в термостате i, должна быть двухиндексной величиной. Закон теплового расширения (3.6) теперь запишется в таком виде:

$$L_{i\alpha} = L_{0\alpha}(1 + E_\alpha t_i), \tag{3.6'}$$

в котором явно подчеркнута физическая и математическая разнородности величин, в него входящих.

Закон теплового расширения (3.6) можно записать в единой с законом Ома канонической форме (3.4), если ввести следующие обозначения: $t = x$, $EL_0 = \xi$, $L_0 = \eta$, $L = f$. Тогда феноменологически симметричной формой закона теплового расширения, как и закона Ома, будет, очевидно, функциональная связь, задаваемая уравнением (3.5).

Единая для двух различных физических законов каноническая форма (3.4), (3.5) может быть освобождена от всякого физического содержания и рассмотрена как чисто математический объект, который, в силу его происхождения, называют физической структурой ранга (3,2), или феноменологически симметричной геометрией двух множеств того же ранга, так как метрическая функция (3.4) двухточечная и ее значение $f(i\alpha)$ для какой-то пары $<i\alpha>$ можно условно назвать (в некотором обобщенном смысле) расстоянием между точкой i и точкой α из разных множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

В следующем §4 мы перейдем к точному определению физической структуры ранга (3,2), в рамках которого докажем соответствующую теорему ее существования и единственности.

§4. Физическая структура ранга (3,2) как объект математического исследования

Пусть имеются два множества $\mathfrak{M} = \{i, j, k, ...\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$, являющиеся одномерным и двумерным многообразиями соответственно, а также функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, сопоставляющая паре $<i\alpha> \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ некоторое число $f(i\alpha) \in R$. Если через x и ξ, η обозначить локальные координаты в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, то координатное представление для функции f будет следующим:

$$f = f(x, \xi, \eta), \tag{4.1}$$

причем ее значение для пары $<i\alpha>$, например, запишется так:

$$f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha), \tag{4.1'}$$

где x_i и ξ_α, η_α есть координаты точек i и α, составляющих пару.

Функцию f, как функцию пары точек, назовем метрической, а ее значение $f(i\alpha)$ расстоянием между точками i и α. Поскольку эти точки принадлежат разным множествам, обычные аксиомы метрики для нее не имеют смысла, а "расстояние"между ними понимается в некотором обобщенном смысле. Однако каким-то естественным условиям функция f должна удовлетворять, для того чтобы задача была содержательной и ожидаемые результаты могли быть получены средствами классического математического анализа.

Будем предполагать, прежде всего, что метрическая функция f удовлетворяет условиям следующих трех аксиом:

I. Область определения функции $f : \mathfrak{M}\times\mathfrak{N} \to R$ является открытым и плотным в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ множеством.

II. В области своего определения функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ достаточно гладкая.

III. Зависимость от координат x и ξ, η в представлении (4.1) существенная.

Достаточная гладкость означает непрерывность как самой функции f в любом ее координатном представлении (4.1), так и всех ее частных производных достаточно высокого порядка. Существенная зависимость от координат x и ξ, η в представлении (4.1) означает, что никакой заменой координат нельзя уменьшить их число. Координата x не может "выпасть", если отлична от нуля производная по ней, а координаты ξ, η – если отличен от нуля некоторый якобиан второго порядка по ним. Аналитически условия аксиомы III можно записать следующими неравенствами:

$$\partial f(x, \xi, \eta)/\partial x \neq 0,\ \partial(f(x_1, \xi, \eta), f(x_2, \xi, \eta))/\partial(\xi, \eta) \neq 0, \tag{4.2}$$

если, конечно, $x_1 \neq x_2$.

Смысл же аксиомы I состоит в том, что "хорошие"математические свойства функции f, фиксируемые аксиомами II и III, где-то могут нарушаться, но всегда можно чуть-чуть сдвинуться в сторону, где эти свойства имеют место, что позволяет применять обычные методы математического анализа. Ясно, что при таком подходе все получаемые результаты оказываются локальными и их глобализация является предметом дополнительного исследования. Гладкую метрическую функцию f с координатным представлением (4.1), удовлетворяющую условиям аксиом II и III, будем называть *невырожденной.*

Определение 1. Будем говорить, что функция $f : \mathfrak{M}\times\mathfrak{N} \to R$, удовлетворяющая условиям аксиом I, II, III, задает на одномерном и двумерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *геометрию двух множеств.*

Дополнительные свойства этой геометрии постулируются в четвертой аксиоме, перед формулировкой которой на основе исходной метрической функции $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ построим функцию $F : \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^2 \to R^6$. Элементом произведения $\mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^2$ является пятиточечный кортеж, в котором три точки в определенном порядке берутся из множества $\mathfrak{M}$ и две точки – из множества $\mathfrak{N}$. Кортежу $< ijk, \alpha\beta >$ сопоставим упорядоченную по нему последовательность шести пар $(<i\alpha>, <i\beta>, <j\alpha>, <j\beta>, <k\alpha>, <k\beta>)$. Каждой паре из этой последовательности метрическая функция f сопоставляет число при условии, конечно, что все они принадлежат области ее определения, в результате чего получаем упорядоченную последовательность шести чисел $(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta))$, которая задает некоторую точку в R^6. Область определения функции F, очевидно, открыта и плотна в $\mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^2$, а область ее значений лежит в R^6.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, удовлетворяющая условиям аксиом I, II, III, задает на одномерном и двумерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (3,2), если дополнительно выполняется следующая аксиома*:

IY. Множество значений функции F лежит в R^6 на гладкой невырожденной гиперповерхности.

Гладкая невырожденная (пятимерная) гиперповерхность в R^6 задается уравнением $\Phi = 0$, где $\Phi : R^6 \to R$ некоторая достаточно гладкая функция шести переменных с открытой в R^6 областью определения и отличным от нуля градиентом на плотном множестве точек самой гиперповерхности. Таким образом, согласно аксиоме IY для любого кортежа $< ijk, \alpha\beta >$ из области определения функции F имеет место уравнение

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta)) = 0. \tag{4.3}$$

Аксиома IY составляет содержание принципа феноменологической симметрии в теории физических структур. Уравнение (4.3) задает нетривиальную функциональную связь между шестью измеряемыми в опыте значениями физической величины f и является аналитическим выражением физического закона, записанного в феноменологически симметричной форме.

Используя представление (4.1), запишем координатное задание для введенной выше функции F:

$$\left.\begin{array}{r} f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha),\ f(i\beta) = f(x_i, \xi_\beta, \eta_\beta), \\ f(j\alpha) = f(x_j, \xi_\alpha, \eta_\alpha),\ f(j\beta) = f(x_j, \xi_\beta, \eta_\beta), \\ f(k\alpha) = f(x_k, \xi_\alpha, \eta_\alpha),\ f(k\beta) = f(x_k, \xi_\beta, \eta_\beta), \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

функциональная матрица которого

$$\left\| \begin{array}{cccccc} f_x(i\alpha) & f_x(i\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x(j\alpha) & f_x(j\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_x(k\alpha) & f_x(k\beta) \\ f_\xi(i\alpha) & 0 & f_\xi(j\alpha) & 0 & f_\xi(k\alpha) & 0 \\ f_\eta(i\alpha) & 0 & f_\eta(j\alpha) & 0 & f_\eta(k\alpha) & 0 \\ 0 & f_\xi(i\beta) & 0 & f_\xi(j\beta) & 0 & f_\xi(k\beta) \\ 0 & f_\eta(i\beta) & 0 & f_\eta(j\beta) & 0 & f_\eta(k\beta) \end{array} \right\| \tag{4.5}$$

имеет семь строк и шесть столбцов. Здесь через f_x, f_ξ, f_η обозначены частные производные функции f по переменным x, ξ, η соответственно.

Задание (4.4) для функции F представляет собой систему шести функций $f(i\alpha)$, $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$, $f(k\alpha)$, $f(k\beta)$, зависящих специальным образом от семи переменных $x_i,\ x_j,\ x_k,\ \xi_\alpha,\ \eta_\alpha,\ \xi_\beta,\ \eta_\beta$. Поскольку число функций в системе (4.4) меньше числа переменных, наличие связи (4.3) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольных функций в этой системе.

Теорема 1. *Если метрическая функция $f:\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to R$ задает на одномерном и двумерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (3,2), то найдутся такие две функции $\chi:R\to R,\ \varphi:R\to R$ одной переменной с открытыми в R областями определения и с отличными от нуля производными $\chi',\ \varphi'$, а также такие две независимые функции $\psi_1:R^2\to R,\ \psi_2:R^2\to R$ от двух переменных с открытыми в R^2 областями определения, что ее координатное представление может быть записано в следующем виде:*

$$f=f(x,\xi,\eta)=\chi(\varphi(x)\psi_1(\xi,\eta)+\psi_2(\xi,\eta)). \tag{4.6}$$

Как известно, необходимым и достаточным условием для того, чтобы шесть функций от семи переменных были функционально связаны, является обращение в нуль любого определителя шестого порядка, полученного из функциональной матрицы (4.5) вычеркиванием какой-либо ее строки. Такой определитель называется якобианом и у функциональной матрицы (4.5) имеется семь различных якобианов. Обращение в нуль каждого из них выполняется тождественно по всем переменным, в результате чего получается система семи функционально-дифференциальных уравнений на метрическую функцию f. Ранг же самой функциональной матрицы (4.5) оказывается меньше шести.

Возьмем якобиан, полученный из матрицы (4.5) вычеркиванием последней строки, разложим его по элементам первого столбца и приравняем нулю:

$$f_x(i\alpha)A_1(ijk,\alpha\beta)+f_\xi(i\alpha)A_2(ijk,\alpha\beta)+f_\eta(i\alpha)A_3(ijk,\alpha\beta)=0, \tag{4.7}$$

где $A_1,\ A_2,\ A_3$ – соответствующие им алгебраические дополнения, например,

$$A_1(ijk,\alpha\beta)=-f_\xi(i\beta)f_x(j\beta)f_x(k\beta)\begin{vmatrix} f_\xi(j\alpha) & f_\xi(k\alpha)\\ f_\eta(j\alpha) & f_\eta(k\alpha)\end{vmatrix}.$$

Поскольку, вследствие аксиомы III, выполняются неравенства (4.2), эти алгебраические дополнения отличны от нуля.

В функционально-дифференциальном уравнении (4.7) зафиксируем координаты точек j,k и β, проведя простые и очевидные его преобразования, исходя из строения алгебраических дополнений $A_1,\ A_2,\ A_3$. После этого опустим индивидуальные индексы i и α у координат x_i и ξ_α,η_α и введем удобные обозначения ненулевых коэффициентов $E(x),\ F_1(\xi,\eta),\ F_2(\xi,\eta)$ при производных $f_x,\ f_\xi,\ f_\eta$ метрической функции $f=f(x,\xi,\eta)$:

$$E(x)f_x+F_1(\xi,\eta)f_\xi+F_2(\xi,\eta)f_\eta=0. \tag{4.8}$$

Итак, от функционально-дифференциального уравнения (4.7) для метрической функции f сделан переход к дифференциальному уравнению (4.8) в частных производных первого порядка, линейному и однородному. Такие уравнения, как известно, решаются методом храктеристик. Соответствующие уравнения характеристик $dx/E(x) = d\xi/F_1(\xi,\eta) = d\eta/F_2(\xi,\eta)$ имеют два независимых интеграла: $\varphi(x) + \psi_1(\xi,\eta) = const,\ \psi_2(\xi,\eta) = const$, а общее решение исходного дифференциального уравнения (4.8) есть произвольная функция $\chi(s,t)$ от них, как от двух переменных $s = \varphi(x) + \psi_1(\xi,\eta),\ t = \psi_2(\xi,\eta)$:

$$f = f(x,\xi,\eta) = \chi(\varphi(x) + \psi_1(\xi,\eta),\ \psi_2(\xi,\eta)). \tag{4.9}$$

В силу неравенств (4.2) в решении (4.9) отличны от нуля производные φ' и $\chi_s,\ \chi_t$ функций φ и χ, а функции ψ_1 и ψ_2 независимы.

Функция (4.9), будучи решением дифференциального уравнения (4.8), не обязательно удовлетворяет исходному функционально-дифференциальному уравнению (4.7), хотя из него дифференциальное уравнение получается как следствие. Поэтому подстановка решения (4.9) в уравнение (4.7) и в другие шесть аналогичных уравнений позволит выявить дополнительные ограничения на него.

Отмеченные выше свойства функций φ и $\psi_1,\ \psi_2$ решения (4.9) позволяют ввести в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ новые координаты, за которыми удобно, не усложняя формул последующего изложения, сохранить прежние обозначения: $\varphi(x) \to x$ и $\psi_1(\xi,\eta) \to \xi,\ \psi_2(\xi,\eta) \to \eta$. В результате решение (4.9) упростится в записи:

$$f = f(x,\xi,\eta) = \chi(x + \xi, \eta). \tag{4.9$'$}$$

Подставим решение (4.9$'$) в функциональную матрицу (4.5) и приравняем нулю определитель шестого порядка, полученнй из нее вычеркиванием первой строки. Из каждого столбца вынесем ненулевой множитель χ_s и введем обозначение $T = \chi_t/\chi_s$. Затем из первого столбца вычтем второй, из третьего – четвертый, а из пятого – шестой. Естественным образом при этих преобразованиях может быть понижен порядок определителя с шестого до четвертого, а после сложения в последнем первой и третьей строк, транспонирования и перестановки столбцов, приходим к обращению в нуль следующего определителя уже третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} T(i\alpha) & T(i\beta) & 1 \\ T(j\alpha) & T(j\beta) & 1 \\ T(k\alpha) & T(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.10}$$

Покажем, что в определителе уравнения (4.10) отличен от нуля любой минор второго порядка, содержащий столбец из единиц. Действительно, если предположить противное, например, что $T(i\alpha) = T(j\alpha)$, то по введенному обозначению $T = \chi_t/\chi_s$ и выражению (4.9$'$) получаем равенство $T(x_i + \xi_\alpha, \eta_\alpha) = T(x_j + \xi_\alpha, \eta_\alpha)$, то есть $T(x + \xi, \eta) = T_1(\eta)$ и для функции $\chi(s,t)$ получаем дифференциальное уравнение $\chi_t - T_1(t)\chi_s = 0$, решение которого легко находится методом характеристик: $\chi(s,t) = \chi_1(s + T_2(t))$, где χ_1 – функция только одной переменной. Но тогда по решению (4.9$'$) для метрической функции f получаем выражение

$f = \chi_1(x+\xi+T_2(\eta))$, в которое координаты ξ и η входят несущественным образом в виде суммы $\xi + T_2(\eta)$, что противоречит аксиоме III.

Таким образом, уравнение (4.10) можно разрешить относительно любого T. Сделаем это в отношении $T(i\alpha)$:

$$T(i\alpha) = T(i\beta)\frac{T(j\alpha) - T(k\alpha)}{T(j\beta) - T(k\beta)} - \frac{T(j\alpha)T(k\beta) - T(j\beta)T(k\alpha)}{T(j\beta) - T(k\beta)},$$

после чего, как обычно, зафиксируем координаты точек j, k и β, опустим индексы i и α у координат x_i и ξ_α, η_α и введем удобные обозначения:

$$T(x+\xi,\eta) = B(x)A_1(\xi,\eta) + A_2(\xi,\eta), \tag{4.11}$$

согласно которым $B \neq 0$ и $A_1 \neq 0$. Очевидно также, что $B(x) \neq const$, так как в противном случае, получим, например, $T(i\alpha) = T(æ\alpha)$, что, как было показано выше, приводит к вырождению метрической функции f.

Равенство (4.11) есть функциональное уравнение, так как справа переменные x и ξ тоже должны входить в виде суммы $x + \xi$. Поэтому результаты дифференцирования правой части по этим переменным совпадают:

$$B'(x)A_1(\xi,\eta) = B(x)A_{1\xi}(\xi,\eta) + A_{2\xi}(\xi,\eta). \tag{4.12}$$

Полагая в равенстве (4.12) $x = 0$:

$$B'(0)A_1(\xi,\eta) = B(0)A_{1\xi}(\xi,\eta) + A_{2\xi}(\xi,\eta),$$

что очевидно всегда возможно, и вычитая последнее равество из предыдущего, исключаем слагаемое $A_{2\xi}$:

$$(B'(x) - B'(0))A_1(\xi,\eta) = (B(x) - B(0))A_{1\xi}(\xi,\eta).$$

Поскольку, как было отмечено выше, $A_1 \neq 0$ и $B \neq const$, в последнем результате можно произвести разделение переменных:

$$\frac{B'(x) - B'(0)}{B(x) - B(0)} = \frac{A_{1\xi}(\xi,\eta)}{A_1(\xi,\eta)} = a, \tag{4.13}$$

где a – некоторая постоянная.

Уравнения (4.13) легко интегрируются:

$$B(x) = B(0) + B'(0)(\exp ax - 1)/a, \ \ A_1(\xi,\eta) = A_1(0,\eta)\exp a\xi, \tag{4.14}$$

причем выражения (4.14) имеют смысл при всех значениях постоянной a. В частности, при $a = 0$ имеем: $B(x) = B(0) + B'(0)x, \ A_1(\xi,\eta) = A_1(0,\eta)$.

Выражение для функции $A_2(\xi,\eta)$ в правой части уравнения (4.11) найдем следующим образом: переставим в нем переменные x и ξ, затем приравняем правые части и положим в полученном равенстве $x = 0$:

$$B(0)A_1(\xi,\eta) + A_2(\xi,\eta) = B(\xi)A_1(0,\eta) + A_2(0,\eta),$$

после чего используем выражения (4.14):

$$A_2(\xi,\eta) = A_2(0,\eta) + (B'(0) - aB(0))A_1(0,\eta)(\exp a\xi - 1)/a. \qquad (4.15)$$

Подставим теперь все найденные выражения (4.14), (4.15) в исходное функциональное уравнение (4.11):

$$T(x+\xi,\eta) = B(0)A_1(0,\eta) + A_2(0,\eta) + B'(0)A_1(0,\eta)(\exp a(x+\xi) - 1)/a,$$

откуда, полагая $x+\xi = s,\ \eta = t$ и вспоминая, что $T = \chi_t/\chi_s$, получаем, после введения удобных обозначений для коэффициентов, дифференциальное уравнение на функцию $\chi(s,t)$ из выражений (4.9) и (4.9′):

$$\chi_t(s,t) - \chi_s(s,t)(\varphi_1(t)(\exp as - 1)/a + \varphi_2(t)) = 0. \qquad (4.16)$$

Уравнение (4.16) интегрируется методом характеристик в квадратурах при произвольных коэффициентах $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$:

$$\chi(s,t) = \chi_2(\lambda_1(t) + \lambda_2(t)(1 - \exp(-as))/a), \qquad (4.17)$$

где $\chi_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2$ – такие функции одной переменной, для которых $\chi_s \neq 0$ и $\chi_t \neq 0$.

Поодставим решение (4.17) в выражение (4.9′), полагая $s = x+\xi,\ t = \eta$, вспомним промежуточную замену координат при переходе к нему от выражения (4.9) и введем, в последний раз, новые удобные обозначения фукциий $\chi,\ \varphi$ от одной переменной, функций $\psi_1,\ \psi_2$ от двух переменных отдельно для случая $a = 0$ и $a \neq 0$. В результате получаем итоговое выражение (4.6) теоремы 1, причем оговоренные свойства всех функций, в него входящих, являются следствием невырожденности метрической функции $f = f(x,\xi,\eta)$. Теорема 1 полностью доказана.

Для метрической функции (4.6) уравнение (4.3), выражающее феноменологическую симметрию задаваемой ею физической структуры (геометрии двух множеств) ранга (3,2), будет, очевидно, следующим:

$$\begin{vmatrix} \chi^{-1}(f(i\alpha)) & \chi^{-1}(f(i\beta)) & 1 \\ \chi^{-1}(f(j\alpha)) & \chi^{-1}(f(j\beta)) & 1 \\ \chi^{-1}(f(k\alpha)) & \chi^{-1}(f(k\beta)) & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (4.18)$$

где χ^{-1} – функция, обратная к функции χ.

Выражение (4.6) является самым общим выражением для метрической функции f, если она на одномерном и двумерном многообразиях с произвольными системами координат x и ξ,η в них задает физическую структуру ранга (3,2). Но всегда в этих многообразиях можно перейти к новым системам координат: $\varphi(x) \to x$, и $\psi_1(\xi,\eta) \to \xi,\ \psi_2(\xi,\eta) \to \eta$, а также произвести масштабное преобразование $\chi^{-1}(f) \to f$ самой метрической функции. В результате для нее получается та каноническая координатная форма (3.4), которая впервые появилась при анализе в §3 строения закона Ома. Поэтому теорему 1 данного параграфа можно еще сформулировать в следующих словах:

Теорема 2. *Метрическая функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, задающая на одномерном и двумерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (3,2), с точностью до масштабного преобразования и в надлежаще выбранных в них системах локальных координат может быть записана в следующей канонической форме:*

$$f = x\xi + \eta. \tag{4.19}$$

Для метрической функции (4.19) феноменологическая симметрия задаваемой ею физической структуры ранга (3,2) выражается уравнением (3.5):

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{4.20}$$

где, например, $f(i\alpha) = x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha$.

Заметим, что результаты данного параграфа опубликованы в работе [5].

§5. Групповая симметрия физической структуры ранга (3,2)

Групповая симметрия геометрии двух множеств определяется группой движений, относительно которой сохраняющаяся метрическая функция является двухточечным инвариантом. Для физической структуры ранга (3,2) как феноменологически симметричной геометрии двух множеств, задаваемой на одномерном и двумерном многообразиях метрической функцией

$$f = f(x, \xi, \eta), \tag{5.1}$$

движение состоит из пары гладких обратимых преобразований

$$x' = \lambda(x) \ \text{ и } \ \xi' = \sigma(\xi, \eta), \ \eta' = \rho(\xi, \eta), \tag{5.2}$$

для которых, вследствие их обратимости, выполняются следующие два условия:

$$\partial\lambda/\partial x \neq 0 \ \text{ и } \ \partial(\sigma, \rho)/\partial(\xi, \eta) \neq 0. \tag{5.3}$$

Если преобразования (5.2) сохраняют значение метрической функции (5.1) для любых двух точек из этих многообразий, то выполняется следующее равенство:

$$f(x', \xi', \eta') = f(x, \xi, \eta), \tag{5.4}$$

которое запишем еще и с функциями λ, σ, ρ, задающими само движение (5.2):

$$f(\lambda(x),\ \sigma(\xi,\eta),\ \rho(\xi,\eta) = f(x,\xi,\eta). \tag{5.5}$$

Равенство (5.5), выполняющееся тождественно по всем трем переменным x, ξ, η, представляет собой функциональное уравнение относительно функций λ, σ, ρ преобразований (5.2), если известно выражение (5.1) метрической функции. Если же, наоборот, известно движение (5.2), то равенство (5.5) будет функциональным уравнением относительно самой метрической функции (5.1). В общем случае могут быть неизвестны как метрическая функция (5.1), так и множество ее движений (5.2). Тогда метрическую функцию (5.1) можно будет найти из каких-то других соображений, например, принципа феноменологической симметрии, выражаемого аксиомой IY из предыдущего §4. Или же в отношении множества движений (5.2) будут сделаны какие-то предположения, например, что оно является группой Ли с определенным числом непрерывных параметров, определяющих число степенй свободы "жестких"фигур в этой геометрии. Заметим, что для физических структур ранг феноменологической симметрии и число степеней свободы связаны однозначнов и, например, для физической струтуры ранга (3,2) оно равно двум, что является следствием эквивалентности групповой и феноменологической симметрий, установлению которой для нее посвящен настоящий параграф.

Запишем уравнение (5.5) для канонической формы (4.19) метрической функции, задающей на одномерном и двумерном многообразиях физическую структуру ранга (3,2), как феноменологически симметричную геометрию двух множеств того же ранга:

$$\lambda(x)\sigma(\xi,\eta) + \rho(\xi,\eta) = x\xi + \eta. \tag{5.6}$$

Напомним, что по теореме 2 из §4 к форме (4.19) заменой координат в многообразиях и масштабным преобразованием может быть приведена любая метрическая функция (5.1), задающая физическую структуру раннга (3,2).

Если уравнение (5.6) продифференцировать по x, то в результате дифференцирования можно разделить переменные: $\lambda'(x) = \xi/\sigma(\xi,\eta) = a$, где $a \neq 0$ – некоторая постоянная, откуда получаем $\lambda'(x) = a$ и после интегрирования $\lambda(x) = ax + b$, где b – произвольная постоянная, а также $\sigma(\xi,\eta) = \xi/a$. Третью функцию ρ найдем из функционального уравнения (5.6), подставляя в него найденные две другие: $\rho(\xi,\eta) = \eta - b\xi/a$. В результате получаем конечные уравнения для множество всех движений (5.2) метрической функции (4.19):

$$x' = ax + b,\ \xi' = \xi/a,\ \eta' = \eta - b\xi/a, \tag{5.7}$$

где a, b – произвольные постоянные, причем $a \neq 0$.

Нетрудно установить, что множество движений (5.7), а также оба множества преобразований одномерного и двумерного многообразий, из которых оно состоит, являются двухпараметрическими группами Ли преобразований с нерерывными параметрами a и b. Действительно, два движения с параметрами a_1, b_1 и a_2, b_2 дают в композиции третье движение с параметрами $a_3 = a_2a_1,\ b_3 = a_2b_1 + b_2$, причем результат композиции зависит от порядка движений в нем, то есть композиция двух движений некоммутативна. Далее, при $a = 1,\ b = 0$ имеем покой, состоящий из тождественных преобразований многообразий: $x' = x$ и $\xi' = \xi,\ \eta' = \eta$. Обратным для движения с параметрами a, b будет, очевидно, движение с параметрами $a^{(-)} = 1/a,\ b^{(-)} = -b/a$. Ассоциативность же для групп преобразований, как известно, выполняется автоматически.

Таким образом, движение в феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга (3,2), задаваемой метрической функкцией (4.19), имеет две степени свободы. Говорят также, что соответствующая геометрия *наделена* групповой симметрией степени два.

Решение (5.7) функционального уравнения (5.4) для канонической формы (4.19), к которой может быть приведена любая метрическая функция (5.1), доказывает следующую теорему:

Теорема 1. *Если метрическая функция $f = f(x, \xi, \eta)$ задает на одномерном и двумерном многообразиях физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (3,2), то эта функция допускает двухпараметрическую группу движений.*

Докажем теперь, что имеет место

Теорема 2. *Двухточечный инвариант группы пребразований (5.7) совпадает с метрической функцией (4.19) с точностью до масштабного преобразования.*

Подставим преобразования (5.7) в функциональное уравнение (5.4), в котором неизвестной функцией теперь становится двухточечный инвариант f:

$$f(ax + b,\ \xi/a,\ \eta - b\xi/a) = f(x, \xi, \eta). \tag{5.8}$$

Равенство (5.8) является тождеством не только по переменным координатам x и ξ, η точек многообразий, но и по параметрам a, b группы преобразований. Однако координаты присутствуют в обеих частях этого равенства, а параметры только в левой. Продифференцируем уравнение (5.8) отдельно по параметрам a и b, после чего придадим им значения, соответствующие тождественным преобразованиям $x' = x$ и $\xi' = \xi,\ \eta' = \eta$, то есть положим $a = 1,\ b = 0$:

$$x\partial f/\partial x - \xi\partial f/\partial\xi = 0,\ \partial f/\partial x - \xi\partial f/\partial\eta = 0. \tag{5.9}$$

Таким образом, от функционального уравнения (5.8) сделан переход к системе двух дифференциальных уравнений в частных производных (5.9), линейных и однородных, которые решаются методом характеристик. Для первого уравнения системы (5.9) уравнение характеристик $dx/x = -d\xi/\xi$ имеет интеграл $x\xi = const$ и потому его общее решение запишется так:

$$f = \psi(x\xi, \eta), \tag{5.10}$$

где $\psi(u,v)$ – произвольная функция двух переменных $u = x\xi$ и $v = \eta$. Далее общее решение (5.10) первого уравнения системы (5.9) подставим во второе: $\psi_u - \psi_v = 0$ и после интегрирования: $\psi(u,v) = \chi(u+v)$, где χ – произвольная функция одной переменной, отличная от постоянной, то есть с $\chi' \neq 0$. Подставляя теперь в выражение (5.10) найденную функцию ψ, получаем двухточечный инвариант $f = \chi(x\xi + \eta)$, который с канонической формой (4.19) связан масштабным преобразованием, что и завершает доказательство теоремы 2.

Смысл результата, выражаемого теоремой 1, состоит в утверждении того, что физическая структура ранга (3,2) является геометрией двух множеств, наделенной групповой симметрией степени 2. Докажем теперь обратное утверждение, согласно которому групповая симметрия обязательно приводит к феноменологической.

Теорема 3. *Если невырожденная метрическая функция $f = f(x,\xi,\eta)$ допускает двухпараметрическую группу движений, то она задает на одномерном и двумерном многообразиях физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (3,2).*

Двухпараметрическая группа движений состоит из групп пребразований

$$x' = \lambda(x;a,b) \text{ и } \xi' = \sigma(\xi,\eta;a,b),\ \ \eta' = \rho(\xi,\eta;a,b), \tag{5.11}$$

для которых метрическая функция $f = f(x,\xi,\eta)$ является двухточечным инвариантом, удовлетворяя функциональному уравнению

$$f(x',\xi',\eta') = f(x,\xi,\eta). \tag{5.12}$$

Поэтому для доказательства теоремы 3 можно сначала найти все двухпараметрические локальные группы (5.11) преобразований прямой и плоскости, а затем для них найти все невырожденные двухточечные инварианты, решая функциональное уравнение (5.12).

Параметры a и b в группах преобразований всегда можно выбрать таким образом, чтобы их нулевым значениям соответствовало тождественное преобразование:

$$x' = \lambda(x;0,0) = x,\ \ \xi' = \sigma(\xi,\eta;0,0) = \xi,\ \ \eta' = \rho(\xi,\eta;0,0) = \eta. \tag{5.13}$$

Равество в функциональном уравнении (5.12) является тождественным как по координатам x и ξ,η многообразий, так и по параметрам a,b группы. Продифференцируем уравнение (5.12) по этим параметрам, после чего придадим им нулевые значения и введем удобные обозначения коэффициентов:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1(x)\partial f/\partial x + \sigma_1(\xi,\eta)\partial f/\partial\xi + \rho_1(\xi,\eta)\partial f/\partial\eta, \\ \lambda_2(x)\partial f/\partial x + \sigma_2(\xi,\eta)\partial f/\partial\xi + \rho_2(\xi,\eta)\partial f/\partial\eta, \end{array}\right\} \tag{5.14}$$

где, например, $\lambda_1(x) = \partial\lambda(x;a,b)/\partial a|_{a=0,b=0}$ и $\sigma_2(\xi,\eta) = \partial\sigma(\xi,\eta;a,b)/\partial b|_{a=0,b=0}$.

От функционального уравнения (5.12) для метрической функции $f = f(x, \xi, \eta)$ сделан переход к системе двух дифференциальных уравнений (5.14) для нее же. Эти уравнения удобно записать в операторной форме:

$$X_1 f + \Xi_1 f = 0, \; X_2 f + \Xi_2 f = 0, \tag{5.14$'$}$$

введя линейные дифференциальные операторы X_1, X_2 и Ξ_1, Ξ_2:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \lambda_1(x)\partial_x, \; \Xi_1 = \sigma_1(\xi, \eta)\partial_\xi + \rho_1(\xi, \eta)\partial_\eta, \\ X_2 = \lambda_2(x)\partial_x, \; \Xi_2 = \sigma_2(\xi, \eta)\partial_\xi + \rho_2(\xi, \eta)\partial_\eta, \end{array}\right\} \tag{5.15}$$

где $\partial_x = \partial/\partial x, \; \partial_\xi = \partial/\partial\xi, \; \partial_\eta = \partial/\partial\eta$, которые в теории групп Ли преобразований называются *инфинитезимальными*, так как они однозначно связаны с бесконечно малыми преобразованиями, близкими к тождественным. Эти операторы линейно независимы и составляют базис двух изоморфных двумерных алгебр Ли преобразований прямой и плоскости, замкнутых относительно операции коммутирования, в частности, коммутаторы $[X_1, X_2]$ и $[\Xi_1, \Xi_2]$ являются элементами этих алгебр, то есть

$$[X_1, X_2] = aX_1 + bX_2, \; [\Xi_1, \Xi_2] = a\Xi_1 + b\Xi_2, \tag{5.16}$$

где постоянные a и b, одинаковые для обеих алгебр, называются структурными константами (не путать с параметрами a, b группы движений (5.11)).

Лемма 1. *С точностью до изоморфизма имеются всего две двумерные абстрактные вещественные алгебры Ли. В некотором базисе X_1, X_2 (Ξ_1, Ξ_2) коммутатор $[X_1, X_2]([\Xi_1, \Xi_2])$ либо равен нулю, либо отличен от нуля и равен X_1 (Ξ_1):*

$$[X_1, X_2] = 0 \; ([\Xi_1, \Xi_2] = 0), \tag{5.17}$$

$$[X_1, X_2] = X_1 \; ([\Xi_1, \Xi_2] = \Xi_1). \tag{5.18}$$

Действительно, пусть, например, $[X_1, X_2] = aX_1 + bX_2$. Тогда в случае $a^2 + b^2 = 0$ имеем первое коммутационное соотношение (5.17): $[X_1, X_2] = 0$. Если же $a^2 + b^2 \neq 0$, то, переходя к другому базису алгебры по формулам $X_1' = (aX_1 + bX_2)/(a^2 + b^2), \; X_2' = (-bX_1 + aX_2)/(a^2 + b^2)$, получаем, как легко проверить, второе коммутационное соотношение (5.18): $[X_1', X_2'] = X_1'$. Опуская штрихи в обозначении операторов, завершаем доказательство леммы 1.

Лемма 2. *Базисные операторы $X_1 = \lambda_1(x)\partial_x$, $X_2 = \lambda_2(x)\partial_x$ двумерной алгебры Ли преобразований одномерного многообразия не могут удовлетворять коммутационным соотношениям (5.17). Если же они удовлетворяют коммутационным соотношениям (5.18), то в надлежаще выбранной системе локальных координат они задаются следующими выражениями:*

$$X_1 = \partial_x, \; X_2 = x\partial_x. \tag{5.19}$$

Произведем в одномерном многообразии следующую замену координат: $\int dx/\lambda_1(x) \to x$. Для первого оператора получим тогда максимально простое выражение и в прежних обозначениях, опуская индекс "2", можем записать:

$$X_1 = \partial_x, \ X_2 = \lambda(x)\partial_x. \tag{5.20}$$

Подставляя операторы (5.20) в коммутационное соотношение (5.17), получаем $\lambda'(x) = 0$, откуда после интегрирования следует, что $\lambda(x) = const$, что невозможно, так как операторы (5.20), составляя базис двумерной алгебры Ли, должны быть линейно независимыми. При подстановке же этих операторов в коммутационное соотношение (5.18), получаем уравнение $\lambda'(x) = 1$, откуда после интегрирования: $\lambda(x) = x + c$, где c – постоянная интегрирования. Таким образом, выражение для оператора X_2 будет следующим: $X_2 = (x+c)\partial_x$. Постоянная c из этого выражения может быть исключена допустимой заменой координат $x + c \to x$, при котрой оператор $X_1 = \partial_x$ сохраняет свою простейшую форму, что и доказывает лемму 2.

Лемма 3. *Базисные операторы* $\Xi_1 = \sigma_1(\xi,\eta)\partial_\xi + \rho_1(\xi,\eta)\partial_\eta$, $\Xi_2 = \sigma_2(\xi,\eta)\partial_\xi + \rho_2(\xi,\eta)\partial_\eta$ *двумерной алгебры Ли преобразований двумерного многообразия, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (5.17), (5.18), в надлежаще выбранной системе локальных координат задаются следующими выражениями:*

$$\Xi_1 = \partial_\xi, \ \Xi_2 = \eta\partial_\xi; \tag{5.21}$$

$$\Xi_1 = \partial_\xi, \ \Xi_2 = \partial_\eta; \tag{5.22}$$

$$\Xi_1 = \partial_\xi, \ \Xi_2 = \xi\partial_\xi; \tag{5.23}$$

$$\Xi_1 = \partial_\xi, \ \Xi_2 = \xi\partial_\xi + \partial_\eta. \tag{5.24}$$

Для удобства в применении замен координат переменные ξ и η в операторах Ξ_1, Ξ_2 временно обозначим через x и y соответственно:

$$\Xi_1 = \sigma_1(x,y)\partial_x + \rho_1(x,y)\partial_y, \ \Xi_2 = \sigma_2(x,y)\partial_x + \rho_2(x,y)\partial_y. \tag{5.25}$$

Осуществим в выражениях (5.25) для операторов Ξ_1 и Ξ_2 обратимую замену локальных координат

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y),$$

в которой $\partial(\varphi,\psi)/\partial(x,y) \neq 0$:

$$\left.\begin{array}{r} \Xi_1 = (\sigma_1\varphi_x + \rho_1\varphi_y)\partial_\xi + (\sigma_1\psi_x + \rho_1\psi_y)\partial_\eta, \\ \Xi_2 = (\sigma_2\varphi_x + \rho_2\varphi_y)\partial_\xi + (\sigma_2\psi_x + \rho_2\psi_y)\partial_\eta. \end{array}\right\}$$

Если функции φ и ψ взять из решений интегрируемых уравнений $\sigma_1\varphi_x + \rho_1\varphi_y = 1$ и $\sigma_1\psi_x + \rho_1\psi_y = 0$, где $\sigma_1^2 + \rho_1^2 \neq 0$, так как базисный оператор Ξ_1 ненулевой, то для него получим максимально простое выражение: $\Xi_1 = \partial_\xi$. Возвращаясь к прежним обозначениям коэффициентов и координат, а также опуская в выражении для оператора Ξ_2 ставший излишним индекс "2", можем записать:

$$\Xi_1 = \partial_x, \quad \Xi_2 = \sigma(x,y)\partial_x + \rho(x,y)\partial_y. \tag{5.26}$$

Заметим, что полученные выражения (5.26) допускают замену координат

$$\xi = x + \varphi(y), \quad \eta = \psi(y) \tag{5.27}$$

с $\psi' \neq 0$, которая сохраняет за оператором X_1 его максимально простую форму.

Подставим сначала операторы (5.26) в коммутатор (5.17): $\sigma_x\partial_x + \rho_x\partial_y = 0$, откуда, в силу линейной независимости операторов дифференцирования ∂_x и ∂_y, следует, что $\sigma_x = 0$, $\rho_x = 0$, то есть $\sigma(x,y) = \sigma(y)$, $\rho(x,y) = \rho(y)$, и потому $\Xi_2 = \sigma(y)\partial_x + \rho(y)\partial_y$. Далее осуществим допустимую замену координат (5.27):

$$\Xi_2 = (\sigma(y) + \rho(y)\varphi'(y))\partial_\xi + \rho(y)\psi'(y)\partial_\eta.$$

Если $\rho(y) = 0$, то $\Xi_2 = \sigma(y)\partial_\xi$, причем $\sigma'(y) \neq 0$, так как операторы Ξ_1 и Ξ_2 линейно независимы. Полагая в замене координат (5.27) $\psi(y) = \sigma(y)$, получаем выражения (5.21) для базисных операторов Ξ_1, Ξ_2 первого представления алгебры (5.17). Если же $\rho(y) \neq 0$, то функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ этой замены возьмем из решений уравнений $\sigma(y) + \rho(y)\varphi'(y) = 0$ и $\rho(y)\psi'(y) = 1$. Тогда получим выражения (5.22) для базисных операторов Ξ_1, Ξ_2 второго представления алгебры (5.17).

Подставим теперь операторы (5.26) в коммутатор (5.18): $\sigma_x\partial_x + \rho_x\partial_y = \partial_x$, откуда следует: $\sigma_x = 1$, $\rho_x = 0$ и после интегрирования: $\sigma(x,y) = x + \sigma(y)$, $\rho(x,y) = \rho(y)$. Для оператора Ξ_2 теперь имеем выражение $\Xi_2 = (x + \sigma(y))\partial_x + \rho(y)\partial_y$, в котором произведем допустимую замену координат (5.27):

$$\Xi_2 = (x + \sigma(y) + \rho(y)\varphi'(y))\partial_\xi + \rho(y)\psi'(y)\partial_\eta.$$

Если $\rho(y) = 0$, то $\Xi_2 = (x + \sigma(y))\partial_\xi$. Полагая в замене координат (5.27) $\varphi(y) = \sigma(y)$, получаем выражения (5.23) для базисных операторов Ξ_1, Ξ_2 первого представления алгебры (5.18). Если же $\rho(y) \neq 0$, то функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ в этой замене можно взять из решений уравнений $\sigma(y) - \varphi(y) + \rho(y)\varphi'(y) = 0$ и $\rho(y)\psi'(y) = 1$. Тогда получаем выражения (5.24) для базисных операторов Ξ_1, Ξ_2 второго представления алгебры (5.18). Лемма 3 доказана.

Сопоставляя результаты второй и третьей лемм, заключаем, что двухточечный инвариант $f = f(x, \xi, \eta)$ как решение системы дифференциальных уравнений (5.14′) можно найти только для двух сочетаний базисных операторов X_1, X_2 и Ξ_1, Ξ_2, задающих изоморфные алгебры Ли: (5.19) и (5.23), а также (5.19) и (5.24).

Запишем сначала систему уравнений (5.14′) для операторов (5.19) и (5.23):

$$\partial f/\partial x + \partial f/\partial \xi = 0, \; x\partial f/\partial x + \xi \partial f/\partial \xi = 0. \tag{5.28}$$

Относительно производных $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial \xi$ два уравнения (5.28) представляет собой однородную линейную алгебраическую систему с отличным от нуля определителем, которая может иметь только нулевое решение: $\partial f/\partial x = 0, \; \partial f/\partial \xi = 0$, что приводит к нарушению условия (4.2) невырожденности метрической функции, так как в ней отсутствует зависимость от координат x и ξ.

Запишем теперь систему уравнений (5.14$'$) для операторов (5.19) и (5.24):

$$\partial f/\partial x + \partial f/\partial \xi = 0,\ x\partial f/\partial x + \xi\partial f/\partial \xi + \partial f/\partial \eta = 0. \tag{5.29}$$

Решение первого уравнения системы (5.29) легко находится методом характеристик: $f = \theta(x-\xi,\eta)$, где $\theta(u,v)$ – произвольная гладкая функция двух переменных $u = x-\xi$ и $v = \eta$. Подставим его во второе уравнение системы (5.29): $u\theta_u + \theta_v = 0$. Полученное относительно функции θ уравнение также решается методом характеристик: $\theta(u,v) = \chi(u\exp(-v))$, где χ – произвольная гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной χ'. Для метрической функции f как двухточечного инварианта группы движений получаем выражение $f = \chi((x-\xi)\exp(-\eta))$, которое с точностью до замен координат $x \to x,\ \exp(-\eta) \to \xi,\ -\xi\exp(-\eta) \to \eta$ и масштабного преобразования $\chi^{-1}(f) \to f$ совпадает с канонической координатной формой (4.19) метрической функции f, задающей физическую структуру ранга (3,2). Этим утверждением и завершается доказательство теоремы 3.

§6. Деформация канонической формы метрической функции

Согласно результатам §2 и §4 метрические функции $f = f(x,\xi)$ и $f = f(x,\xi,\eta)$, задающие физические структуры рангов (2,2) и (3,2), имеют общие координатные представления, задаваемые выражениями (2.5) и (4.6), а соответствующие канонические – выражениями (2.9) и (4.19), причем аддитивная форма (2.9) эквивалентна мультипликативной форме (1.6).

Предположим, что имеется некоторое явное координатное представление гладкой невырожденной метрической функции

$$f = f(x,\xi), \tag{6.1}$$

задающей на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ геометрию двух множеств. Если эта геометрия феноменологически симметрична, то есть является физической структурой ранга (2,2), то по теореме 1 из §2 имеет место равенство

$$f(x,\xi) = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)), \tag{6.2}$$

которое по координатам x и ξ выполняется тождественно. Таким образом, равенство (6.2) относительно трех функций $\chi,\ \varphi,\ \psi$ представляет собой функциональное уравнение. Если это уравнение имеет решение с отличными от нуля производными χ', φ', ψ', то геометрия двух множеств, задаваемая данной метрической функцией, действительно феноменологически симметрична с рангом (2,2). Если же не имеет, то эта геометрия не является физической структурой.

Другой способ установления феноменологической симметрии состоит в вычислении ранга функциональной матрицы

$$\|\frac{\partial(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta))}{\partial(x_i, x_j, \xi_\alpha, \xi_\beta)}\|, \tag{6.3}$$

который должен равняться трем. Поскольку матрица (6.3) квадратная и порядок ее равен всего четырем, соответствующие вычисления можно провести вручную для негромоздких выражений метрической функции. В противном случае можно использовать математический пакет Maple, который значительно облегчает эти вычисления.

Третий способ опирается на эквивалентность феноменологической и групповой симметрий, установленную в §2, согласно которой метрическая функция, задающая физическую структуру ранга (2,2), допускает однопараметрическую группу движений. Если обратимые преобразования $x' = \lambda(x)$ и $\xi' = \sigma(\xi)$ с $\lambda' \neq 0$ и $\sigma' \neq 0$ сохраняют метрическую функцию (6.1), то они удовлетворяют функциональному уравнению

$$f(\lambda(x), \sigma(\xi)) = f(x, \xi). \tag{6.4}$$

Множество движений находится из решения этого уравнения, и если оно является однопараметрической группой, то исходная метрическая функция (6.1) задает физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (2,2).

Заметим, что все три описанные выше метода установления феноменологической симметрии эквивалентны, но могут различаться чисто технически, то есть для каждой конкретной метрической функции какой-то из этих трех методов окажется наиболее простым.

Ниже для метрической функции будут браться такие координатные представления, которые получаются из канонических форм, аддитивной и мультипликативной:

$$f = x + \xi \text{ или } f = x\xi, \tag{6.5}$$

их некоторой деформацией с дополнительными деформирующими функциями, относительно которых равенства (6.2) и (6.4) также являются функциональными уравнениями.

Для уяснения сути изложенного рассмотрим мультипликативную деформацию аддитивной формы:

$$f = (x + \xi)\mu(x) \tag{6.6}$$

и аддитивную деформацию мультипликативной:

$$f = x\xi + \mu(x) \tag{6.7}$$

с одной деформирующей функцией $\mu = \mu(x)$.

Теорема 1. *Деформированная метрическая функция (6.6) задает на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (2,2) в том и только в том случае, когда деформирующая функция μ имеет следующее выражение:*

$$\mu(x) = 1/(ax + b), \tag{6.8}$$

где a и b – произвольные постоянные, причем $a^2 + b^2 \neq 0$.

Равенство (6.2) рассмотрим как функциональное уравнение относительно деформируующей функции μ:

$$(x + \xi)\mu(x) = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)). \tag{6.9}$$

Поскольку метрическая функция (6.6) должна быть невырожденной, деформирующий множитель отличен от нуля: $\mu \neq 0$. Продифференцируем уравнение (6.9) по переменным x и ξ

$$\mu + (x + \xi)\mu' = \chi'(...)\varphi', \ \mu = \chi'(...)\psi'$$

после чего результаты дифференцирования разделим друг на друга:

$$\frac{\mu + (x + \xi)\mu'}{\mu} = \frac{\varphi'}{\psi'} \tag{6.10}$$

Дополнительное дифференцирование по ξ приводит, очевидно, к разделению переменных x и ξ:

$$\mu'/\mu\varphi' = (1/\psi')' = a, \tag{6.11}$$

где a – произвольная постоянная.

Предположим сначала, что $a = 0$. Тогда из результата (6.11) следует, что $\mu' = 0$, то есть

$$\mu(x) = b, \tag{6.12}$$

где $b \neq 0$ – произвольная ненулевая постоянная. Для деформирующей функции (6.12) деформированная метрическая функция (6.6) сводится к первой аддитивной канонической форме (6.5) простым масштабным преобразованием $f/b \to f$.

Если же $a \neq 0$, то из результата (6.11) получаем связь $\varphi' = \mu'/a\mu$ и уравнение $(1/\psi')' = a$, откуда после интегрирования – выражение $1/\psi' = a\xi + c$. Подставляя полученное в исходное дифференциальное равенство (6.10), приходим к дифференциальному уравнению на деформирующую функцию: $(ax - c)\mu' + a\mu = 0$, решение которого легко находится:

$$\mu = d/(ax - c), \tag{6.13}$$

где a, c, d – произвольные постоянные, причем $a \neq 0, \ d \neq 0$. Для деформирующей функции (6.13) деформированная метрическая функция (6.6) сводится ко второй мультипликативной канонической форме (6.5) масштабным преобразованием $-1+af/d \to f$ и заменами координат $1/(ax-c) \to x,\ a\xi+c \to \xi$ в одномерных многообразиях.

Объединим результаты (6.12) и (6.13), введя очевидное переобозначение постоянных. В результате получим единое выражение (6.8) для деформирующей функции при мультипликативной деформации (6.6). Теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2. *Деформированная метрическая функция (6.7) задает на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (2,2) в том и только в том случае, если деформирующая функция μ линейна:*

$$\mu(x) = ax + b, \tag{6.14}$$

где a и b – произвольные постоянные.

Доказательство этой теоремы проведем другим методом, который опирается на эквивалентность групповой и феноменологической симметрий геометрии двух множеств.

Запишем функциональное уравнение (6.4) для деформированной метрической функции (6.7):

$$\lambda(x)\sigma(\xi) + \mu(\lambda(x)) = x\xi + \mu(x), \tag{6.15}$$

в котором, очевидно, $\lambda' \neq 0,\ \sigma' \neq 0$, так как преобразования многообразий $x' = \lambda(x),\ \xi' = \sigma(\xi)$, составляющие движение, обратимы. Продифференцируем по переменной ξ уравнение (6.15): $\lambda\sigma' = x$, после чего разделим переменные x и ξ: $\lambda/x = 1/\sigma' = a$. Интегрируя, получаем выражения $\lambda = ax,\ \sigma = (\xi/a) + b$, где a и b – произвольные постоянные, причем $a \neq 0$. Независимым параметром в них может быть только постоянная a, которая присутствует в обоих выражениях, в то время как постоянная b только во втором. Поскольку группа движений метрической функции, задающей физическую структуру ранга (2,2), однопараметрическая, должна быть связь параметров: $b = b(a)$, причем при $a = 1,\ b = 0$ преобразования тождественные: $x' = \lambda(x) = x,\ \xi' = \sigma(\xi) = \xi$.

Подставим найденные функции $\lambda,\ \sigma$ в исходное функциональное уравнение (6.15): $abx + \mu(ax) = \mu(x)$ и продифференцируем результат подстановки по независимому параметру a:

$$bx + ab'x + x\mu'(ax) = 0.$$

Полагая далее $a = 1,\ b = 0$ и вводя новую постоянную $c = -b'(a)|_{a=1}$. получаем уравнение $\mu'(x) = c$, откуда после интегрирования: $\mu(x) = cx+d$, где c и d – произвольные постоянные. Переобозначая их, получаем выражение (6.14) для деформирующей фукции. Дефомированная функция (6.7) возвращается к своей прежней мультипликативной канонической форме при замене координат $x \to x,\ \xi + a \to \xi$ и сдвиге $f - b \to f$.

Заметим, что теорему 2 можно было бы доказать, решая уравнение (6.2) для функции (6.7), а теорему 1 – решая уравнение (6.4) для функции (6.6).

Предположим, далее, что имеется некоторое явное координатное представление гладкой невырожденной метрической функции

$$f = f(x, \xi, \eta), \tag{6.16}$$

задающей на одномерном и двумерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ геометрию двух множеств. Если эта геометрия феноменологически симметричная ранга (3,2), то по теореме 1 из §4 имеет место равенство

$$f(x, \xi, \eta) = \chi(\varphi(x)\psi_1(\xi, \eta) + \psi_2(\xi, \eta)), \tag{6.17}$$

которое является тождеством по координатам x и ξ, η. Таким образом, равенство (6.17) относительно четырех функций $\chi,\ \varphi,\ \psi_1,\ \psi_2$ представляет собой функциональное уравнение. Если оно имеет решение с отличными от нуля производными $\chi',\ \varphi'$ и отличным от нуля якобианом $\partial(\psi_1, \psi_2)/(\xi, \eta)$, то геометрия двух множеств, задаваемая метрической функцией (6.16), действительно феноменологически симметрична, то есть является физической структурой ранга (3,2). Если же не имеет таких решений, то не является.

Еще один способ установления феноменологической симметрии данной геометрии двух множеств состоит в вычислении ранга функциональной матрицы

$$\left\| \frac{\partial(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta))}{\partial(x_i, x_j, x_k, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \xi_\beta, \eta_\beta)} \right\|, \tag{6.18}$$

который должен равняться пяти. Поскольку матрица (6.18) неквадратная размера 7×6, у нее имеется семь якобианов шестого порядка, поэтому при вычисления ее ранга следует использовать математический пакет Maple даже для простых по структуре функций (6.16).

Последний третий способ опирается на эквивалентность феноменологической и групповой симметрий, установленную в §4. Согласно ей метрическая функция, задающая физическую структуру ранга (3,2), допускает двухпараметрическую группу движений. Если обратимые преобразования $x' = \lambda(x)$ и $\xi' = \sigma(\xi, \eta),\ \eta' = \rho(\xi, \eta)$ с $\lambda' \neq 0$ и $\partial(\sigma, \rho)/\partial(\xi, \eta) \neq 0$ сохраняют метрическую функцию (6.16), то они удовлетворяют функциональному уравнению

$$f(\lambda(x), \sigma(\xi, \eta), \rho(\xi, \eta)) = f(x, \xi, \eta). \tag{6.19}$$

Множество движений находится из решения этого уравнения, и если оно является двухпараметрической группой, то исходная метрическая функция (6.16) задает физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (3,2).

Перейдем теперь к рассмотрению деформаций канонической формы

$$f = x\xi + \eta \tag{6.20}$$

метрической функции, задающей на одномерном и двумерном многообразиях физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (3,2).

Наиболее простыми деформациями являются мультипликативная:

$$f = (x\xi + \eta)\mu(x) \tag{6.21}$$

и аддитивная:

$$f = x\xi + \eta + \mu(x), \tag{6.22}$$

аналогичные рассмотренным выше деформациям (6.6) и (6.7).

Теорема 3. *Деформированная метрическая функция (6.21) задает на одномерном и двумерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (3,2) в том и только в том случае, когда деформирующая функция μ имеет следующее выражение:*

$$\mu(x) = 1/(ax + b), \tag{6.23}$$

где a и b – произвольные постоянные, причем $a^2 + b^2 \neq 0$.

Подставим метрическую функцию (6.21) в функциональное уравнение (6.17):

$$(x\xi + \eta)\mu(x) = \chi(\varphi(x)\psi_1(\xi, \eta) + \psi_2(\xi, \eta)), \tag{6.24}$$

в котором, напомним, $\chi' \neq 0$, $\varphi' \neq 0$ и $\partial(\psi_1, \psi_2)/\partial(\xi, \eta) \neq 0$. Продифференцируем уравнение (6.24) по каждой из трех независимых переменных x, ξ, η:

$$\xi\mu + (x\xi + \eta)\mu' = \chi'(...)\varphi'\psi_1, \ x\mu = \chi'(...)(\varphi\psi_{1\xi} + \psi_{2\xi}), \ \mu = \chi'(...)(\varphi\psi_{1\eta} + \psi_{2\eta}),$$

после чего разделим первый и второй результат дифференцирования на третий:

$$\xi + (x\xi + \eta)\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\varphi'\psi_1}{\varphi\psi_{1\eta} + \psi_{2\eta}}, \ x = \frac{\varphi\psi_{1\xi} + \psi_{2\xi}}{\varphi\psi_{1\eta} + \psi_{2\eta}}. \tag{6.25}$$

Из второго равенства (6.25), приведя его к общему знаменателю и дифференцируя по переменной x, найдем производную $\varphi' = (\varphi\psi_{1\eta} + \psi_{2\eta})/(\psi_{1\xi} - x\psi_{1\eta})$, подставим ее в первое равенство:

$$\xi + (x\xi + \eta)\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\psi_1}{\psi_{1\xi} - x\psi_{1\eta}}, \tag{6.26}$$

которое продифференцируем по переменной η:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{x(\psi_1\psi_{1\eta\eta} - \psi_{1\eta}\psi_{1\eta}) + \psi_{1\xi}\psi_{1\eta} - \psi_1\psi_{1\xi\eta}}{(\psi_{1\xi} - x\psi_{1\eta})^2}. \tag{6.27}$$

Анализируя этот результат, заключаем, что имеет смысл выделить в нем два случая: $\psi_{1\eta} = 0$ и $\psi_{1\eta} \neq 0$. Сначала рассмотрим первый. Ясно, что при $\psi_{1\eta} = 0$ числитель в правой части равества (6.27) обращается в нуль, а поскольку, вследствие невырожденности метрической функции (6.21), в левой части $\mu \neq 0$, получаем $\mu' = 0$, откуда после интегрирования:

$$\mu(x) = a, \tag{6.28}$$

где $a \neq 0$ –произвольная постоянная.

Во вторм случае, когда $\psi_{1\eta} \neq 0$, в правой части равенства (6.27) зафиксируем значения координат ξ и η, введя следующие обозначения: $\psi_1\psi_{1\eta\eta} - \psi_{1\eta}\psi_{1\eta} = a$, $\psi_1\psi_{1\xi\eta}/\psi_{1\eta} = b$, $\psi_{1\eta} = c$, $\psi_{1\xi} = -d$. Тогда из равенство (27) получим

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{ax - cd - cb}{(cx+d)^2}, \tag{6.29}$$

где a, b, d и $c \neq 0$ – произвольные постоянные.

Уравнение (6.29) для деформирующей функции μ подставим в исходное равенство (6.26) и приведем его к общему знаменателю:

$$[\xi(cx+d)^2 + (x\xi+\eta)(ax - cd - cb)](\psi_{1\xi} - x\psi_{1\eta}) = (cx+d)^2\psi_1.$$

В полученном равенстве слева есть слагаемые, пропорциональные x^3, а справа их нет. Следовательно, коэффициет при x^3 слева должен обратиться в нуль, откуда получаем связь $a = -c^2$, используя которую преобразуем уравнение (6.29):

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{c}{cx+d} - \frac{cb}{(cx+d)^2},$$

откуда после интегрирования по переменной x:

$$\mu(x) = \frac{h}{cx+d}\exp\frac{b}{cx+d}, \tag{6.30}$$

где $h \neq 0$ – произвольная ненулевая постоянная.

В рассматриваемом случае выделим два подслучая: $b = 0$ и $b \neq 0$. Для первого подслучая, когда $b = 0$, деформирующая функция (6.30) имеет выражение

$$\mu(x) = \frac{h}{cx+d}, \tag{6.31}$$

в котором, напомним, $h \neq 0$ и $c \neq 0$. Подставим выражение (6.31) в деформированную функцию (6.21): $f = h(x\xi+\eta)/(cx+d)$ и произведем в ней следующие замены координат: $c\eta - d\xi \to \xi$, $\xi \to \eta$, $1/(cx+d) \to x$ и масштабное преобразование $cf/h \to f$. В результате деформированная метрическая функция возвращается к своей канонической форме (6.20).

Во втором же подслучае, когда $b \neq 0$, подставим полное выражение (6.30) в деформированную функцию (6.21):

$$f = (x\xi+\eta)\frac{h}{cx+d}\exp\frac{b}{cx+d},$$

произведя в ней такие замены координат: $c\eta - d\xi \to \xi$, $b\xi \to \eta$, $b/(cx+d) \to x$ и масштабное преобразование $bcf/h \to f$:

$$f = (x\xi+\eta)\exp x. \tag{6.32}$$

Деформация (6.32) есть частный случай деформации (6.21) с деформирующей функцией $\mu(x) = \exp x$, для которой должно выполняться равенство (6.27), если метрическая функция (6.32) задает физическую структуру ранга (3,2), хотя вследствие сделанных замен координат не обязательно $\psi_{1\eta} \neq 0$. Подставим деформирующую функцию $\mu(x) = \exp x$ в равенство (6.27), приведя его к общему знаменателю:

$$(\psi_{1\xi} - x\psi_{1\eta})^2 = x(\psi_1\psi_{1\eta\eta} - \psi_{1\eta}\psi_{1\eta}) + \psi_{1\xi}\psi_{1\eta} - \psi_1\psi_{1\xi\eta}.$$

В преобразованном равестве слева есть слагаемое с x^2, а справа его нет. То есть коэффициент при нем должен обратиться в ноль: $\psi_{1\eta}^2 = 0$. Однако при $\psi_{1\eta} = 0$ вся правая часть этого равенства обращается в нуль, что приводит к занулению и другой производной: $\psi_{1\xi} = 0$. Но это невозможно, так как иначе обращается в нуль якобиан $\partial(\psi_1, \psi_2)/\partial(\xi, \eta)$. Полученное противоречие означает, что функциональное уравнение (6.24) с деформирующей функцией $\mu(x) = \exp x$, а следовательно и с деформирующей функцией (6.30) при $b \neq 0$ и $c \neq 0$ не имеет решения, и потому деформированая метрическая функция (6.21) с этими деформирующими функциями не может задавать физическую структуру ранга (3,2). Таким образом, остаются только два выражения (6.28) и (6.31), которые, введя удобные переобозначения постоянных, можно записать единой формулой (6.23), что и завершает доказательство теоремы 3.

Теорема 4. *Деформированная метрическая функуия (6.22) задает на одномерном и двумерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (3,2) в том и только в том случае, если деформирующая функция μ линейна:*

$$\mu(x) = ax + b, \tag{6.33}$$

где a и b – произвольные постоянные.

Подставим метрическую функцию (6.22) в функциональное уравнение (6.19):

$$\lambda(x)\sigma(\xi, \eta) + \rho(\xi, \eta) + \mu(\lambda(x)) = x\xi + \eta + \mu(x), \tag{6.34}$$

где, напомним, $\lambda' \neq 0$, $\partial(\sigma, \rho)/\partial(\xi, \eta) \neq 0$ вследствие обратимости преобразований $x' = \lambda(x)$ и $\xi' = \sigma(\xi, \eta)$, $\eta' = \rho(\xi, \eta)$.

Продифференцируем по переменным ξ, η уравнение (6.34): $\lambda\sigma_\xi + \rho_\xi = x$, $\lambda\sigma_\eta + \rho_\eta = 1$, откуда можно выразить первую функцию движения: $\lambda = (x\rho_\eta - \rho_\xi)/\Delta$, где Δ – отличный от нуля якобиан преобразования второго многообразия. Леко понять, дифференцируя это выражение по переменной x, что ρ_η/Δ и ρ_ξ/Δ являются константами. Обозначив их через a и $-b$, получим выражение

$$\lambda(x) = ax + b, \tag{6.35}$$

где a, b – произвольные постоянные, причем $a \neq 0$, поскольку $\lambda' \neq 0$.

Выражение (6.35) подставим в предыдущие результаты дифференцирования уравнения (6.34): $(ax+b)\sigma_\xi + \rho_\xi = x,\ (ax+b)\sigma_\eta + \rho_\eta = 1$, откуда получаем два уравнения $\sigma_\xi = 1/a,\ \sigma_\eta = 0$ для функции σ и два уравнения $\rho_\xi = -b/a,\ \rho_\eta = 1$ для функции ρ, а после интегрирования:

$$\sigma(\xi,\eta) = \frac{1}{a}\xi + c,\ \rho(\xi,\eta) = \eta - \frac{b}{a}\xi + d, \tag{6.36}$$

где c, d – пока дополнительные произвольные постоянные.

Функции (6.35) и (6.36) при некоторых ограничениях на четыре входящие в них константы должны определять движения геометрии, задаваемой метрической функцией (6.22). Поскольку в двухпараметрической группе движений всякой метрической функции, задающей физическую структуру ранга (3,2), двухпараметрическими являются и группы преобразований каждого многообразия, а в выражение (6.35), которое определяет преобразование одномерного многообразия, входят только два параметра a и b, именно они являются свободными, а другие два некоторыми функциями от них: $c = c(a,b),\ d = d(a,b)$.

Подставим функции (6.35) и (6.36) в исходное функциональное уравнение (6.34): $(ax+b)c + d + \mu(ax+b) = \mu(x)$, откуда после двухкратного дифференцировния по переменной x и однократного по параметру b получаем: $a^2\mu'''(ax+b) = 0$. Придавая параметрам a и b значения, соответствующие тождественному преобразованию, то есть полагая $a = 1$ и $b = 0$, имеем $\mu'''(x) = 0$ и после трехкратного интегрирования получаем следующее выражение для деформирующей функции:

$$\mu(x) = hx^2 + gx + e, \tag{6.37}$$

где h, g, e – произвольные постоянные.

Связь всех констант выражений (6.35–37), устанавливается при их подстановке в исходное функциональное уравнение (6.34):

$$(ax+b)c + d + h(ax+b)^2 + g(ax+b) + e = hx^2 + gx + e,$$

в котором сравним коэффициенты при x^2 справа и слева: $ha^2 = h$ для произвольного параметра a, откуда следует $h = 0$. Сравнивая далее коэффициенты при x и свободные слагаемые, получаем две свзи $a(c+g) = g,\ b(c+g) + d = 0$, а из них зависимость параметров c и d в выражениях (6.35–36) от параметров a и b: $c = g(1-a)/a,\ d = -bg/a$.

При $h = 0$ выражение (6.37) для деформирующей функции сиановится линейным: $\mu(x) = gx + e$. Подставляя его в деформированную функцию (6.22) и производя в ней замены кординат $x \to x,\ \xi + g \to \xi,\ \eta \to \eta$ вместе со сдвигом $f - e \to f$, возвращаемся к канонической форме (6.20). А это означает, что деформированная метрическая функция (6.20) с найденной нами линейной деформирующей функцией задает физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга (3,2). Производя в деформирующей функции переобозначение констант, получаем для нее выражение (6.33). Теорема 4 полностью доказана.

Заметим, что выражения для деформирующих функций, приведенные в теоремах 2 и 4 совпадают, хотя производится аддитивная деформация метрических функций

$$f = x\xi \quad \text{и} \quad f = x\xi + \eta,$$

задающих физические структуры различных рангов. Аналогичное замечание справедливо также в отношении теорем 1 и 3, когда проводится мультипликативная деформация метрических функций

$$f = x + \xi \quad \text{и} \quad f = x\xi + \eta.$$

Причина совпадения, в первом случае, возможно, заключается в наличии общего слагаемого $x\xi$ в канонических выражениях для обеих метрических функций, хотя во втором случае общего слагаемого у них нет и такое совпадение в начале доказательств теорем 1 и 3 не казалось очевидным.

§7. Некоторые примеры и задачи

Обычной для теории физических структур является задача установления истинности физического закона, представленного конкретной формулой или уравнением. Оказывается, что эту истинность можно установить, не зная того, какие физические объекты представлены в законе и какие измерения производятся с ними. Истинный физический закон должен быть прежде всего феноменологически симметричен. Вторая задача состоит в определении тех изменений, которые допускает закон без нарушения его истинности.

Из §1 нам уже известно, что метрическая функция $f = x\xi$ задает истинный физический закон, и это подтверждается его интерпретациями – вторым законам Ньютона и законом преломления. Данная метрическая функция допускает однопараметрическую группу движений: $x' = ax$, $\xi' = \xi/a$, где $a \neq 0$, которая находится как множество решений функционального уравнения $\lambda(x)\sigma(\xi) = x\xi$. Сам закон может быть еще записан в феноменологически симметричной форме: $f(i\alpha)f(j\beta) - f(i\beta)f(j\alpha) = 0$, где, например, $f(i\alpha) = x_i\xi_\alpha$, справедливой для любых объектов i, j и α, β из их множеств, связь между которыми выражает приведенный закон. Существование этой формы предварительно можно проверить по рангу функциональной матрица $\|\partial(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta))/\partial(x_i, x_j, \xi_\alpha, \xi_\beta)\|$, который должен быть равен трем.

Пример 1. Проверить, допускает ли каноническая форма $f = x\xi$ истинного физического закона аддитивную деформацию следующего вида:

$$f = x\xi + x^2. \tag{7.1}$$

Решение. Опираясь на теорему 2 из §6, сразу получаем отрицательный ответ, так как допускается аддитивная деформация только линейной функцией. Но можно на поставленный вопрос ответить независимо от этой теоремы, используя все те три метода, которые были описаны в предыдущем §6.

Предположим, что метрическая функция (7.1) задает на одномерных многообразиях физическую структуру ранга (2,2). Тогда должно иметь решение функциональное уравнение (6.2):

$$x\xi + x^2 = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)), \tag{7.2}$$

в котором, напомним, $\chi' \neq 0,\ \varphi' \neq 0, \psi' \neq 0$. Продифференцируем уравнение (7.2) по переменным x, ξ и разделим результаты дифференцирования друг на друга, приведя итог к общему знаменателю: $(\xi + 2x)\psi'(\xi) = x\varphi'(x)$. Дифференцирование этого равенства по переменной x отделяет ее от другой переменной ξ, то есть $2\psi'(\xi) = (x\varphi'(x))' = a$, где $a \neq 0$ – произвольная постоянная, отличная от нуля, откуда имеем: $\psi' = a/2$ и, после интегрирования, $x\varphi' = ax + b$. Обратившись с этими выражениями в предыдущее равенство, получаем противоречие: $\xi = 2b$, а после дифференцирования по переменной ξ – еще большее: 1=0. Приход к противоречию в процессе доказательства означает неверность исходного предположения о том, что деформированная метрическая функция (7.1) на одномерных многообразиях задает феноменологически симметричную геометрию двух множеств, то есть такую геометрию (физическую структуру ранга (2,2)) она задавать не может.

На тот же вопрос относительно метрической функции (7.1) можно ответить, вычисляя ранг функциональной матрицы для четырех функций $f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha)$, $f(j\beta)$ от четырех переменных $x_i, x_j, \xi_\alpha, \xi_\beta$. Поскольку матрица квадратная, у нее имеется всего один якобиан четвертого порядка, расчет значения которого не представляет особого труда:

$$\frac{\partial(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta))}{\partial(x_i, x_j, \xi_\alpha, \xi_\beta)} = \begin{vmatrix} f_x(i\alpha) & f_x(i\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x(j\alpha) & f_x(j\beta) \\ f_\xi(i\alpha) & 0 & f_\xi(j\alpha) & 0 \\ 0 & f_\xi(i\beta) & 0 & f_\xi(j\beta) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_\alpha + 2x_i & \xi_\beta + 2x_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_\alpha + 2x_j & \xi_\beta + 2x_j \\ x_i & 0 & x_j & 0 \\ 0 & x_i & 0 & x_j \end{vmatrix} = 2x_i x_j (x_i - x_j)(\xi_\alpha - \xi_\beta) \neq 0.$$

Необращение в нуль этого якобиана означает, что ранг соответствующей функциональной матрицы равен четырем, то есть равен числу функций, и потому они независимы и никаким уравнением $\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) = 0$ не могут быть связаны.

Третий способ исследования метрической функции (7.1), использующий эквивалентность феноменологической и групповой симметрий, состоит в решении функционального уравнения

$$\lambda(x)\sigma(\xi) + (\lambda(x))^2 = x\xi + x^2, \tag{7.3}$$

в котором функции λ и σ определяют обратимое движение $x' = \lambda(x),\ \xi' = \sigma(\xi)$ и потому имеют отличные от нуля производные: $\lambda' \neq 0$ и $\sigma' \neq 0$. Если метрическая функция задает физическую структуру ранга (2,2), то множество всех его решений является однопараметрической группой. Если же эта группа не однопараметрическая, то не задает.

Продифференцируем по переменной ξ уравнение (7.3): $\lambda(x)\sigma'(\xi) = x$ и отделим ее от другой переменной: $\lambda(x)/x = 1/\sigma'(\xi) = a$, где $a \neq 0$. Произведем, в частности, интегрирование и найдем выражения $\lambda(x) = ax,\ \sigma(\xi) = (\xi + b)/a$, где $a \neq 0$ и b – произвольные постоянные. Подставим эти выражения в исходное уравнение (7.3): $bx + a^2x^2 = x^2$, откуда следуют ограничения $a^2 = 1,\ b = 0$. Таким образом, множество движений $x' = ax,\ \xi' = \xi/a$, где $a^2 = 1$, состоящее всего из двух движений при $a = +1$ и $a = -1$, не является однопараметрической группой и потому деформированная метрическая функция (7.1) не задает физическую структуру ранга (2,2), в чем выше мы убедились и другими двумя методами.

Пример 2. Найти при каких деформирующих функциях $\mu(x)$ деформированная метрическая функция

$$f = x\xi + \mu(x) \tag{7.4}$$

может задавать истинный феноменологически симметричный закон ранга (2,2).

Решение. На данный вопрос однозначно отвечает теорема 2, доказанная в предыдущем §6 с учетом эквивалентности феноменологической и групповой симметрий. Мы же на этот вопрос ответим, используя другие два метода.

Вычислим якобиан $\partial(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta))/\partial(x_i, x_j, \xi_\alpha, \xi_\beta)$ функциональной матрицы для метрической функции (7.4):

$$\begin{vmatrix} \xi_\alpha + \mu'(i) & \xi_\beta + \mu'(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_\alpha + \mu'(j) & \xi_\beta + \mu'(j) \\ x_i & 0 & x_j & 0 \\ 0 & x_i & 0 & x_j \end{vmatrix} = x_i x_j(\mu'(i) - \mu'(j))(\xi_\alpha - \xi_\beta),$$

где, например, $\mu'(i) = \mu'(x_i)$. Поскольку этот якобиан должен обращаться в нуль, имеем $x_i x_j(\mu'(i) - \mu'(j))(\xi_\alpha - \xi_\beta) = 0$, откуда, опуская ненулевые множители и разделяя переменные, получаем: $\mu'(i) = \mu'(j) = a$, где a – произвольная постоянная. Опуская обозначение точек i, j, получаем уравнение $\mu'(x) = a$ и после интегрирования приходим к наиболее общему выражению $\mu(x) = ax + b$, где b – также произвольная постоянная. Найденное выражение, естественно, совпадает с приведенным в теореме 2 из §6.

Этот же пример рассмотрим еще одним методом, решая функциональное уравнение (6.2):

$$x\xi + \mu(x) = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)) \tag{7.5}$$

для метрической функции (7.4).

Продифференцируем уравнение (7.5) по переменным x и ξ, разделим один результат дифференцирования на другой и перенесем производную φ' в левую часть: $(\xi + \mu')/x\varphi' = 1/\psi'$. По переменной ξ продифференцируем еще раз: $1/x\varphi' = (1/\psi')' = a$, где $a \neq 0$ – произвольная постоянная, откуда получаем два выражения

$1/\varphi' = ax,\ 1/\psi' = a\xi + b$. Эти выражения подставим в исходное равенство: $\mu' = b/a$, откуда после интегрирования получаем: $\mu(x) = (bx + c)/a$, где $a \neq 0, b, c$ – произвольные постоянные. Таким образом, действительно деформирующей функцией в выражении (7.4) может быть только линейная функция, что повторяет результат, представляемый теоремой 2 из §6.

Пример 3. Установить, задает ли функция

$$f = x\xi^2 + x^2\xi \tag{7.6}$$

истинный феноменологически симметричный закон.

Решение. Этот пример мы рассмотрим одним из трех методов, предлагая читателю проверить на нем и другие два. Запишем для метрической функции (7.6) функциональное уравнение (6.2):

$$x\xi^2 + x^2\xi = \chi(\varphi(x) + \psi(\xi)), \tag{7.7}$$

где, напомним, отличны от нуля все три производные $\chi',\ \varphi',\ \psi'$, и по переменным x и ξ продиференцируем его: $\xi^2 + 2x\xi = \chi'(...)\varphi',\ 2x\xi + x^2 = \chi'(...)\psi'$. Разделим один результат дифференцирования на другой и приведем итог к общему знаменателю: $(2x\xi + x^2)\varphi' = (\xi^2 + 2x\xi)\psi'$. Дополнительным дифференцированием по тем же переменным разделяем их: $(x\varphi')' = (\xi\psi')' = a$, где a – произвольная постоянная. Интегрируя, получаем выражения $x\varphi' = ax + b,\ \xi\psi' = a\xi + c$, в которых $a^2 + b^2 \neq 0,\ a^2 + c^2 \neq 0$. Эти выражения подставим в исходное равенство: $(2\xi + x)(ax + b) = (\xi + 2x)(a\xi + c)$, откуда легко получаем $a = 0,\ c = 2b,\ b = 2c$ и, следовательно, $b = 0,\ c = 0$, что невозможно, так как $\varphi' \neq 0, \psi' \neq 0$. Таким образом, функциональное уравнение (7.7) не имеет решения, а функция (7.6) не задает никакого истинного феноменологически симметричного физического закона.

Предположим теперь, что задано некоторое уравнение

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) = 0, \tag{7.8}$$

в отношении которого надо выяснить, может ли оно являться феноменологически симметричной формой физического закона. Для этого определим два эталона k и γ, запишем уравнение для четверки $<ik, \alpha\gamma>$ и разрешим его относительно $f(i\alpha)$. Вводя, далее, удобным образом координаты точек i и α, например, $x_i = f(i\gamma),\ \xi_\alpha = f(k\alpha)$, и опуская обозначения этих точек, получаем функцию $f = f(x, \xi)$. Если эта функция делает уравнение (7.8) тождеством по координатам всех четырех точек i, j, α, β, то оно задает истинный физический закон, если же нет, то не задает.

Пример 4. В отношении уравнения

$$f(i\alpha)f(j\beta) + af(i\beta)f(j\alpha) = 0 \tag{7.9}$$

выяснить, при каких значениях постоянной $a \neq 0$ оно выражает истинный феноменологически симметричный закон ранга (2,2).

Решение. Запишем уравнение (7.9) для четверки $< ik, \alpha\gamma >$ с эталонными элементами k, γ и разрешим его относительно функции первой пары: $f(i\alpha) =$

$-af(i\gamma)f(k\alpha)/f(k\gamma)$. Введем координаты точек i и α следующим образом: $x_i = af(i\gamma)$ и $\xi_\alpha = f(k\alpha)/f(k\gamma)$, затем опустим обозначение самих точек, в результате чего получаем функцию $f = x\xi$, которая нам хорошо известна как мультипликативная форма метрической функции, задающей физическую структуру ранга (2,2), феноменологическая симметрия которой выражается уравнением (7.9), но только для случая $a = -1$. Действительно, если эту функцию подставить в уравнение (7.9), то получим соотношение: $x_i x_j \xi_\alpha \xi_\beta (1 + a) = 0$, которое становится тождеством по всем четырем координатам только в случае $a + 1 = 0$, то есть когда $a = -1$.

Пример 5. Рассмотрим более сложное уравнение

$$(f(i\alpha) + f(j\beta))f(i\alpha)f(j\beta) - (f(i\beta) + f(j\alpha))f(i\beta)f(j\alpha) = 0, \tag{7.10}$$

в отношении которого надо выяснить, задает ли оно истинный феноменологически симметричный закон.

Решение. Для каждой своей переменной уравнение (7.10) является квадратным. Поэтому, записав его для четверки $<ik, \alpha\gamma>$ с эталонными элементами k и γ, мы его перепишем в следующем виде:

$$(f(i\alpha) + f(k\gamma))f(i\alpha)f(k\gamma) = (f(i\gamma) + f(k\alpha))f(i\gamma)f(k\alpha).$$

Введем координаты по схеме $x_i = f(i\gamma)$, $\xi_\alpha = f(k\alpha)$, а также масштабное преобразование $(f + a)fa \to f$, где $a = f(k\gamma)$. Опуская обозначение точек i и α, получаем функцию $f = x\xi^2 + x^2\xi$, совпадающую с функцией (7.6) из примера 3, про которую мы уже точно знаем , что никакой феноменологически симметричной геометрии двух множеств она не задает. Но тогда не задает такую геометрию и функция, определяемая из уравнения $(f + a)fa = x\xi^2 + x^2\xi$, и подстановка ее в уравнение (7.10) не сделает его тождеством по координатам $x_i, x_j, \xi_\alpha, \xi_\beta$.

Пример 6. В отношении метрической функции

$$f = x\xi + \eta + x^2\xi\eta \tag{7.11}$$

установить, задает ли она на одномерном и двумерном многообразиях феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга (3,2).

Решение. Запишем для функции (7.11) функциональное уравнение (6.17):

$$x\xi + \eta + x^2\xi\eta = \chi(\varphi(x)\psi_1(\xi,\eta) + \psi_2(\xi,\eta)), \tag{7.12}$$

где, напомним, $\chi' \neq 0$, $\varphi' \neq 0$ и $\partial(\psi_1,\psi_2)/\partial(\xi,\eta) \neq 0$, продифференцируем его по всем трем координатам x, ξ, η и разделим первые два результата дифференцирования на третий:

$$\frac{\xi + 2x\xi\eta}{1 + x^2\xi} = \frac{\varphi'\psi_1}{\varphi\psi_{1\eta} + \psi_{2\eta}}, \quad \frac{x + x^2\eta}{1 + x^2\xi} = \frac{\varphi\psi_{1\xi} + \psi_{2\xi}}{\varphi\psi_{1\eta} + \psi_{2\eta}}. \tag{7.13}$$

Из второго равенства (7.13), приведя его к общему знаменателю и дифференцируя по переменной x, находим производную

$$\varphi' = \frac{(1 + 2x\eta)(\varphi\psi_{1\eta} + \psi_{2\eta}) - 2x\xi(\varphi\psi_{1\xi} + \psi_{2\xi})}{(1 + x^2\xi)\psi_{1\xi} - (x + x^2\eta)\psi_{1\eta}},$$

которую вместе с ним подставим в первое:

$$(\xi+2x\xi\eta)[(1+x^2\xi)\psi_{1\xi}-(x+x^2\eta)\psi_{1\eta}]=[(1+2x\eta)(1+x^2\xi)-2x\xi(x+x^2\eta)]\psi_1.$$

Сравнивая слева и справа коэффициенты при $x^3,\ x^2$ и свободные от x слагаемые, получаем три уравнения $\xi\psi_{1\xi}-\eta\psi_{1\eta}=0,\ \xi\psi_{1\xi}-3\eta\psi_{1\eta}=\psi_1,\ \xi\psi_{1\xi}=\psi_1$, из которых легко получаем $\psi_1=0$, что невозможно, так как $\partial(\psi_1,\psi_2)/\partial(\xi,\eta)\neq 0$. Полученное противоречие означает, что функциональное уравнение (7.12) не имеет решения, а метрическая функция (7.11) на одномерном и двумерном многообразиях не задает физическую структуру ранга (3,2).

Пример 7. Теорему 2 из §6 для метрической функции

$$f=x\xi+\eta+\mu(x) \tag{7.14}$$

доказать другим методом, решая функциональное уравнение (6.17):

$$x\xi+\eta+\mu(x)=\chi(\varphi(x)\psi_1(\xi,\eta)+\psi_2(\xi,\eta)). \tag{7.15}$$

Решение. Как и в предыдущем примере 6, продифференцируем уравнение (7.15) по всем трем переменным x и ξ,η, разделим первые два результата дифференцирования на третий, исключая тем самым производную $\chi'(...)$:

$$\xi+\mu'=\frac{\varphi'\psi_1}{\varphi\psi_{1\eta}+\psi_{2\eta}},\quad x=\frac{\varphi\psi_{1\xi}+\psi_{2\xi}}{\varphi\psi_{1\eta}+\psi_{2\eta}}. \tag{7.16}$$

Из второго равенства (7.16) найдем производную $\varphi'=(\varphi\psi_{1\eta}+\psi_{2\eta})/(\psi_{1\xi}-x\psi_{1\eta})$ и подставим ее в первое:

$$\xi+\mu'=\psi_1/(\psi_{1\xi}-x\psi_{1\eta}), \tag{7.17}$$

откуда получаем: $\mu'=(\psi_1-\xi\psi_{1\xi}+x\xi\psi_{1\eta}/(\psi_{1\xi}-x\psi_{1\eta})$.

В этом выражении рассмотрим два случая, когда $\psi_{1\eta}=0$ и когда $\psi_{1\eta}\neq 0$. В случае $\psi_{1\eta}=0$ возможно разделение переменных: $\mu'=(\psi_1-\xi\psi_{1\xi})/\psi_{1\xi}=a$ и после интегрирования $\mu(x)=ax+b$.

Если же $\psi_{1\eta}\neq 0$, то после фиксирования переменных ξ,η и введения удобных обозначений постоянных получаем $\mu'=(ax+b)/(cx+d)$, причем $c\neq 0$. С этим выражением для производной μ' возвращаемся в равенство (7.17), которое приведем к общему знаменателю:

$$((cx+d)\xi+ax+b)(\psi_{1\xi}-x\psi_{1\eta})=(cx+d)\psi_1.$$

Коэффициент при x^2 в левой части этого равенства должен обратиться в нуль, так как аналогичного слагаемого справа нет: $-(c\xi+a)\psi_{1\eta}=0$, откуда получаем $c\xi+a=0$, чего не может быть при $c\neq 0$. Появившееся противоречие означает, что предполагаемый случай $\psi_{1\eta}\neq 0$ невозможен. Таким образом, остается только первый случай $\psi_{1\eta}=0$, когда деформирующая функция μ в выражении (7.14) линейна, что и завершает другое доказательство теоремы 2 из §6.

Предположим, что имеем некоторое уравнение

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta)) = 0, \tag{7.18}$$

в отношении которого необходимо выяснить, выражает ли оно феноменологическую симметрию ранга (3,2) геометрии, которую на одномерном и двумерном многообразиях задает какая-то пока неизвестная метрическая функция.

Для этого выделим два различных эталона p, q из первого множества – одномерного многообразия и один эталон γ во втором – двумерном многообразии. Запишем уравнение (7.18) для кортежа $<ipq, \alpha\gamma>$ с эталонами, разрешим его относительно $f(i\alpha)$ и введем удобным образом координаты x_i и ξ_α, η_α точек i и α, например, по простейшей схеме $x_i = f(i\gamma)$ и $\xi_\alpha = f(p\alpha),\ \eta_\alpha = f(q\alpha)$. Опуская затем в координатах индексы i и α, получаем конкретное координатное представление $f = f(x, \xi, \eta)$ метрической функции, которая, возможно, и задает физическую структуру ранга (3,2), феноменологическая симметрия которой выражается уравнением (7.18). Для проверки этого необходимо подставить ее в уравнение (7.18). Если это уравнение по всем семи координатам $x_i, x_j, x_k\ \xi_\alpha, \eta_\alpha, \xi_\beta, \eta_\beta$ обращается в тождество, то оно действительно выражает феноменологическую симметрию геометрии двух множеств, задаваемой на одеомерном и двумерном многообразиях метрической функцией, которая из него же была получена введением эталонов и определением через них координат в многообразиях.

Пример 8. В отношении уравнения

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha)f(i\beta) & f(i\alpha) - f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha)f(j\beta) & f(j\alpha) - f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha)f(k\beta) & f(k\alpha) - f(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{7.19}$$

выяснить, выражает ли оно феноменологическую симметрию ранга (3,2) некоторой геометрии двух множеств, то есть задает ли оно истинный физический закон.

Решение. Запишем уравнение (7.19) для кортежа $<ipq, \alpha\gamma>$ и разложим определитель в левой части по элементам первой строки, введя очевидным образом координаты: $f(i\alpha)x_i + (f(i\alpha) - x_i)\xi_\alpha - \eta_\alpha = 0$. Затем разрешим этот результат относительно функции $f(i\alpha)$ и опустим индексы, обозначающие конкретные точки i и α:

$$f = \frac{x\xi + \eta}{x + \xi}. \tag{7.20}$$

Далее метрическую функцию (7.20) следует подставить в исходное уравнение (7.19), чтобы проверить выполняется ли оно тождественно по всем координатам или нет. Вручную такую проверку осуществить затруднительно, но можно воспользоваться математическим пакетом Maple-9 или Mathematica-5.0. Мы же на этот вопрос ответим, применяя наработанные нами аналитические методы решения уравнения (6.17) для метрической функции (7.20):

$$(x\xi + \eta)/(x + \xi) = \chi(\varphi(x)\psi_1(\xi, \eta) + \psi_2(\xi, \eta)), \tag{7.21}$$

где, напомним, $\chi' \neq 0,\ \varphi' \neq 0$ и $\partial(\psi_1, \psi_2)/\partial(\xi, \eta) \neq 0$. Продифференцируем уравнение (7.21) по всем трем координатам x, ξ, η и разделим первые два результата дифференцирования на третий:

$$\frac{\xi^2-\eta}{x+\xi}=\frac{\varphi'\psi_1}{\varphi\psi_{1\eta}+\psi_{2\eta}}, \quad \frac{x^2-\eta}{x+\xi}=\frac{\varphi\psi_{1\xi}+\psi_{2\xi}}{\varphi\psi_{1\eta}+\psi_{2\eta}}. \tag{7.22}$$

Из второго равенства (7.22) легко находим производную

$$\varphi'=\frac{2x(\varphi\psi_{1\eta}+\psi_{2\eta})-(\varphi\psi_{1\xi}+\psi_{2\xi})}{(x+\xi)\psi_{1\xi}-(x^2-\eta)\psi_{1\eta}},$$

которую вместе с ним подставим в первое:

$$(\xi^2-\eta)[(x+\xi)\psi_{1\xi}-(x^2-\eta)\psi_{1\eta}]=[2x(x+\xi)-(x^2-\eta)]\psi_1.$$

Сравнивая слева и справа коэффициенты при x^2, x и свободные от x слагаемые, получаем три уравнения: $-(\xi^2-\eta)\psi_{1\eta}=\psi_1$, $(\xi^2-\eta)\psi_{1\xi}=2\xi\psi_1$, $(\xi^2-\eta)(\xi\psi_{1\xi}+\eta\psi_{1\eta})=\eta\psi_1$, из которых легко получаем: $\psi_1=0$, что невозможно, так как $\partial(\psi_1,\psi_2)/\partial(\xi,\eta)\neq 0$. Полученное противоречие означает, что функциональное уравнение (7.21) не имеет решения, а метрическая функция (7.20) не обращает в тождество не только уравнение (7.19), но и никакое другое уравнение вида (7.18).

Задача 1. Для следующих метрических функций $f=f(x,\xi)$ *установить*, являются ли задаваемые ими на одномерных многообразиях геометрии двух множеств феноменологически симметричными ранга (2,2):

$$f=x\xi/(x+\xi), \tag{7.23}$$

$$f=x\xi/(x^2+\xi^2), \tag{7.24}$$

$$f=x\xi(x+\xi), \tag{7.25}$$

$$f=x\xi(x^2+\xi^2), \tag{7.26}$$

$$f=x\xi+\ln x. \tag{7.27}$$

$$f=x\xi+\ln x+\ln\xi, \tag{7.28}$$

$$f=(x+\xi)/x, \tag{7.29}$$

$$f=(x+\xi)/(1+x\xi), \tag{7.30}$$

$$f=(x+\xi)\exp x, \tag{7.31}$$

$$f=(x+\xi)\ln x. \tag{7.32}$$

Указание к решению. Предварительно изучить примеры 1 и 3, чтобы определить, какой из использованных в них трех методов для решения данной задачи окажется наиболее эффективным.

Задача 2. Для следующих метрических функций $f=f(x,\xi,\eta)$ *установить*, являются ли задаваемые ими на одномерном и двумерном многообразиях геометрии двух множеств феноменологически симметричными ранга (3,2):

$$f=x\xi+\eta+x^2\xi, \tag{7.33}$$

$$f = x\xi + \eta + x^2\eta, \tag{7.34}$$

$$f = x\xi + \eta + \ln x, \tag{7.35}$$

$$f = x\xi + \eta + \exp x, \tag{7.36}$$

$$f = (x\xi + \eta)x. \tag{7.37}$$

$$f = (x\xi + \eta)\exp x, \tag{7.38}$$

$$f = (x\xi + \eta)/x, \tag{7.39}$$

$$f = (x\xi + \eta)/(x + \xi), \tag{7.40}$$

$$f = (x\xi + \eta)/(x + \eta), \tag{7.41}$$

$$f = (x + \xi)/(x + \eta), \tag{7.42}$$

$$f = (x\xi + \eta)(x + \xi), \tag{7.43}$$

$$f = (x\xi + \eta)(x + \eta), \tag{7.44}$$

$$f = (x + \xi)(x + \eta). \tag{7.45}$$

Указание к решению. Внимательно ознакомиться с решением примера 6. Заметим, что примененный в нем метод не единственный. Можно также использовать и другие два (определение числа параметров группы движений и определения ранга соответствующей функциональной матрицы), которые описаны в §6. Какой-то из них может оказаться удобнее двух других для решения данной задачи.

Задача 3. Для следующих деформированных метрических функций $f = f(x, \xi)$ *установить,* при каких деформирующих функциях $\mu = \mu(x)$ и $\nu = \nu(\xi)$, задаваемые ими на одномерных многообразиях геометрии двух множеств феноменологически симметричны ранга (2,2):

$$f = x\xi + \mu(x) + \nu(\xi), \tag{7.46}$$

$$f = x\xi + \mu(x)\nu(\xi), \tag{7.47}$$

$$f = x\xi(\mu(x) + \nu(\xi)), \tag{7.48}$$

$$f = (x + \nu(\xi))(\xi + \mu(x)), \tag{7.49}$$

$$f = x + \xi\mu(x), \tag{7.50}$$

$$f = (x + \xi)(\mu(x) + \nu(\xi)), \tag{7.51}$$

$$f = (x + \xi)\mu(x)\nu(\xi), \tag{7.52}$$

$$f = (x + \xi)\mu(x) + \nu(\xi), \tag{7.53}$$

$$f = x + \xi + \mu(x)\nu(\xi), \tag{7.54}$$

$$f = x + \xi\mu(x) + \nu(\xi). \tag{7.55}$$

Указание к решению. Изучить решение примера 2, а также доказательство теорем 1 и 2 из §6. Присутствие двух деформирующих функций $\mu(x)$ и $\nu(\xi)$ делает, конечно, задачу более трудной, однако методы ее решения остаются аналогичными примененным ранее.

Задача 4. Для следующих деформированных метрических функций $f = f(x, \xi, \eta)$ *установить,* при каких деформирующих функциях $\mu = \mu(x)$ и $\nu = \nu(\xi, \eta)$ задаваемые ими на одномерном и двумерном многообразиях геометрии двух множеств феноменологически симметричны ранга (3,2):

$$f = x\xi + \eta\mu(x), \tag{7.56}$$

$$f = x\xi + \eta + \mu(x)\nu(\xi), \tag{7.57}$$

$$f = x\xi + \eta + \mu(x)\nu(\eta), \tag{7.58}$$

$$f = x\xi + \eta\mu(x) + \nu(x), \tag{7.59}$$

$$f = x\xi + \eta\mu(x) + \nu(\xi), \tag{7.60}$$

$$f = x\xi + \eta\mu(x) + \nu(\eta), \tag{7.61}$$

$$f = x\xi + \eta(\mu(x) + \nu(\xi)), \tag{7.62}$$

$$f = x\xi + \eta(\mu(x) + \nu(\eta)), \tag{7.63}$$

$$f = (x\xi + \eta)\mu(x) + \nu(x), \tag{7.64}$$

$$f = (x\xi + \eta)\mu(x) + \nu(\xi), \tag{7.65}$$

$$f = (x\xi + \eta)\mu(x) + \nu(\eta), \tag{7.66}$$

$$f = (x\xi + \eta)(\mu(x) + \nu(\xi)), \tag{7.67}$$

$$f = (x\xi + \eta)(\mu(x) + \nu(\eta), \tag{7.68}$$

$$f = (x + \nu(\xi))(\xi + \mu(x)) + \eta, \tag{7.69}$$

$$f = (x + \nu(\eta))(\xi + \mu(x)) + \eta, \tag{7.70}$$

$$f = x\xi(\mu(x) + \nu(\xi)) + \eta, \tag{7.71}$$

$$f = x\xi(\mu(x) + \nu(\eta)) + \eta. \tag{7.72}$$

Указание к решению. Ознакомиться в деталях с решением примера 7, а также с доказательствами теорем 3 и 4 из §6, прежде чем приступить к решению данной задачи.

ГЛАВА II. Физические структуры произвольного ранга

§8. Определение геометрии двух множеств

Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, являющиеся m-мерным и n-мерным многообразиями, где m и n – натуральные числа, точки которых будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами соответственно, а также функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, сопоставляющая каждой паре $< i\alpha >$ из области $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ определения этой функции некоторое вещественное число $f(i\alpha) \in R$. Число $f(i\alpha)$, сопоставляемое двум точкам i и α из разных множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, в некотором обобщенном смысле может рассматриваться как "расстояние"между ними, поэтому ниже функцию f мы будем называть *метрической*. Заметим, что в общем случае $\mathfrak{S}_f \neq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, то есть функция f не всякой паре из $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляет число, но в последующем изложении удобно в явной записи значения $f(i\alpha)$ этой функции для пары $<i\alpha>$ подразумевать, что $<i\alpha> \in \mathfrak{S}_f$. Обозначим через $U(i)$ и $U(\alpha)$ окрестности точек $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$, через $U(<i\alpha>)$ – окрестность пары $<i\alpha> \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ на себя или друг на друга.

Для некоторых кортежей $< \alpha_1 \ldots \alpha_m > \in \mathfrak{N}^m$ и $< i_1 \ldots i_n > \in \mathfrak{M}^n$ введем функции $f^m : \mathfrak{M} \to R^m$ и $f^n : \mathfrak{N} \to R^n$, сопоставляя точкам $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ точки $(f(i\alpha_1), \ldots, f(i\alpha_m)) \in R^m$ и $(f(i_1\alpha), \ldots, f(i_n\alpha)) \in R^n$, если пары $< i\alpha_1 >, \ldots, < i\alpha_m >$ и $< i_1\alpha >, \ldots, < i_n\alpha >$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Заметим, что функции f^m и f^n не обязательно определены всюду на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. Область определения $\mathfrak{S}_f$ функции $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ множество.

II. Функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ в области своего определения $\mathfrak{S}_f$ есть достаточно гладкая функция.

III. В $\mathfrak{N}^m$ и $\mathfrak{M}^n$ плотны множества таких кортежей длины m и n для которых функции $f^m : \mathfrak{M} \to R^m$ и $f^n : \mathfrak{N} \to R^n$ имеют максимальные ранги, равные m и n, в точках плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множеств соответственно.

Достаточная гладкость означает, что в области своего определения непрерывна как сама функция f, так и все ее производные достаточно высокого порядка. Гладкую функцию f, для которой выполняется условие III, будем называть *невырожденной*. Заметим также, что ограничения в аксиомах I, II, III открытыми и плотными подмножествами связано с тем, что исходные множества могут содержать исключительные подмножества меньшей размерности, где эти аксиомы не выполняются.

Определение. Будем говорить, что невырожденная метрическая функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, удовлетворяющая аксиомам I, II, III, задает на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *геометрию двух множеств.*

§9. Физические структуры как феноменологически симметричные геометрии двух множеств

Введем еще функцию $F : \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1} \to R^{(m+1)(n+1)}$, сопоставляя кортежу $<ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau>$ длины $m+n+2$ из $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ точку $(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots, f(v\tau))$ $\in R^{(m+1)(n+1)}$, координаты которой в $R^{(m+1)(n+1)}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью значений функции f для всех пар его элементов $(<i\alpha>, <i\beta>, \ldots, <v\tau>)$, если эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Область определения введенной функции F есть, очевидно, открытое и плотное в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ множество, которое обозначим через $\mathfrak{S}_F$.

Определение 1. Будем говорить, что невырожденная метрическая функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, удовлетворяющая аксиомам I, II, III, задает на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *феноменологически симметричную геометрию двух множеств (физическую структуру) ранга* $(n+1, m+1)$, если дополнительно выполняется следующая аксиома:

IY. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждого кортежа $<ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots\tau>$ длины $m+n+2$ которого и некоторой его окрестности $U(<i\ldots\tau>)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi : \mathcal{E} \to R$, определенная в некоторой области $\mathcal{E} \subset R^{(m+1)(n+1)}$, содержащей точку $F(<i\ldots\tau>)$, что в ней $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$ и множество $F(U(<i\ldots\tau>))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots, f(v\tau)) = 0 \tag{9.1}$$

для всех кортежей из $U(<ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau>)$.

Аксиома IY составляет содержание принципа феноменологической симметрии в теории физических структур, предложенной Ю.И. Кулаковым [3] в 1968 году для классификации физических законов. Уравнения (9.1) задает функциональную связь между $(m+1)(n+1)$ измеряемыми в опыте значениями физической величины f и является аналитическим выражением физического закона, записанного в феноменологически симметричной форме. Условие $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$ означает, что функция Φ не вырождается в константу и уравнение $\Phi = 0$ выражает действительную связь между величинами.

Пусть $x = (x^1, \ldots, x^m)$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ – локальные координаты в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Для исходной метрической функции f в некоторой окрестности $U(i) \times U(\alpha)$ каждой пары $<i\alpha> \in \mathfrak{S}_f$ получаем тогда локальное координатное представление

$$f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha) = f(x_i^1, \ldots, x_i^m, \xi_\alpha^1, \ldots, \xi_\alpha^n), \tag{9.2}$$

свойства которого определяются аксиомами II и III. Поскольку по аксиоме III ранги функций f^m и f^n максимальны, координаты x и ξ входят в представление (9.2) существенным образом. Последнее означает, что никакая гладкая локально обратимая замена координат не приведет к уменьшению их числа в представлении (9.2), то есть ни для какой локальной системы координат его невозможно записать в виде

$$f(i\alpha) = f(x_i^1, \ldots, x_i^{m'}, \xi_\alpha^1, \ldots, \xi_\alpha^{n'}),$$

где или $m' < m$, или $n' < n$. Действительно, если, например, $m' < m$, то для любого кортежа $< \alpha_1 \ldots \alpha_m > \in (U(\alpha))^m$ длины m и для любой точки из $U(i)$ ранг соответствующей функции f^m будет заведомо меньше m, что противоречит аксиоме III.

Функцию пары точек f можно рассматривать как метрическую в геометрии двух множеств. Но поскольку расстояние $f(i\alpha)$ определено для двух точек i и α из разных множеств, обычные аксиомы метрики здесь не имеют смысла.

Используя представление (9.2), запишем локальное координатное задание для введенной выше функции F:

$$\left.\begin{array}{c} f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha), \\ f(i\beta) = f(x_i, \xi_\beta), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(v\tau) = f(x_v, \xi_\tau), \end{array}\right\} \tag{9.3}$$

функциональная матрица которого

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc} \dfrac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i} & 0 & ... & 0 & 0 & \dfrac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi_\alpha} & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & \dfrac{\partial f(v\tau)}{\partial x_v} & 0 & 0 & ... & 0 & \dfrac{\partial f(v\tau)}{\partial \xi_\tau} \end{array} \right\| \tag{9.4}$$

имеет $(m+1)(n+1)$ строк и $2mn + m + n$ столбцов. Здесь через $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial \xi$ кратко обозначены соответствующие однострочные функциональные матрицы для функции f по координатам $x = (x^1, \ldots, x^m)$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ соответственно:

$$\partial f/\partial x = ||\partial f/\partial x^1 \cdots \partial f/\partial x^m||,$$

$$\partial f/\partial \xi = ||\partial f/\partial \xi^1 \cdots \partial f/\partial \xi^n||.$$

Задание (9.3) для функции F представляет собой систему $(m+1)(n+1)$ функций $f(i\alpha), \ldots, f(v\tau)$, специальным образом зависящих от $2mn+m+n$ переменных $x_i^1, \ldots, x_i^m, \ldots, \xi_\tau^1, \ldots, \xi_\tau^n$ – координат всех точек кортежа $<ijk...v, \alpha\beta\gamma...\tau>$ длины $m+n+2$. Поскольку число функций в системе (9.3) не больше общего числа переменных, наличие связи (9.1) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольных функций в этой системе.

Простые примеры геометрий двух множеств, рассмотренные в §1 и §3 , показывают, что их феноменологическая и групповая симметрии тесно связаны между собой, взаимно обуславливая друг друга. Посколльку движение в геометрии двух множеств имеет свою специфику, отличную от привычных свойств движения в геометрии одного множества, дадим соответствующие точные определения.

Под локальным движением в геометрии двух множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ будем понимать такую пару взаимно однозначных гладких отображений (преобразований)

$$\lambda : U \to U' \quad \text{и} \quad \sigma : V \to V', \tag{9.5}$$

где $U, U' \subset \mathfrak{M}$ и $V, V' \subset \mathfrak{N}$ – открытые области, при которых функция f сохраняется. Последнее означает, что для каждой пары $<i\alpha> \in \mathfrak{S}_f$, такой что $i \in U,\ \alpha \in V$ и $<i'\alpha'> \in \mathfrak{S}_f$, где $i' = \lambda(i) \in U'$, $\alpha' = \sigma(\alpha) \in V'$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \sigma(\alpha)) = f(i\alpha). \tag{9.6}$$

Множество всех движений (9.5) есть локальная группа, для которой функция f, согласно равенству (9.6), является *двухточечным инвариантом.* Преобразования λ и σ в движениях (9.5) сами составляют две отдельные группы, а группа движений есть их взаимное расширение. Если функция f известна, например, в своем локальном координатном представлении (9.2), то равенство (9.6) представляет собой функциональное уравнение относительно преобразований λ и σ. Нам же о функции f известно только, что она невырождена и феноменологически симметрична, то есть удовлетворяет уравнению (9.1). Но этого оказывается достаточно для установления факта существования группы ее движений, зависящей от mn непрерывных параметров.

Для большей ясности последующего изложения воспроизведем в наших обозначениях определение локальной группы Ли преобразований, следуя монографии Л.С.Понтрягина "Непрерывные группы"(см. [6], стр. 435).

Пусть G^r – r-мерная локальная группа Ли и U – некоторая область гладкого многообразия $\mathfrak{M}$. Допустим, что каждому элементу $a \in G^r$ поставлено в соответствие непрерыно зависящее от a инъективное отображение $\lambda_a : U \to U'$ области U в некоторую область U' многообразия $\mathfrak{M}$, относящее каждой точке $i \in U$ некоторую точку $i' \in U'$, то есть $i' = \lambda_a(i) = \lambda(i, a)$. Будем говорить, что G^r есть *локальная группа Ли преобразований* области U, если выполнены следующие три условия: **1)** единице e группы G^r соответствует тождественное преобразование $i' = \lambda(i, e) = i$ области U на себя и $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$, то есть произведению $ab \in G_r$ соответствует композиция преобразований, причем сначала λ_a, а затем λ_b, но допустим и другой порядок; **2)** два преобразования λ_a и λ_b совпадают тогда и только тогда, когда $a = b$, или, иначе, преобразование λ_a является тождественным лишь при условии, что a есть единица e группы G^r; **3)** в координатной форме $\lambda(i, a)$ есть достаточное число раз дифференцируемая функция координат точки $i \in U$ и параметров элемента $a \in G^r$.

Определенная только что группа преобразований по условию 2) эффективна и потому сами элементы группы G^r могут считаться преобразованиями. То есть можно говорить о r-мерной локальной группе Ли локальных преобразований многообразия $\mathfrak{M}$, которую обозначим через $G^r(\lambda)$. Таким образом, в области U задано эффективное гладкое действие группы G^r, причем условия 1), 2), 3) выполняются для некоторой ее части, то есть некоторой, зависящей от U, окрестности единичного элемента $e \in G^r$.

Определение 2. Будем говорить, что невырожденная метрическая функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, удовлетворяющая аксиомам I, II, III, задает на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *геометрию двух множеств, наделенную групповой симметрией степени mn*, если дополнительно выполняется следующая аксиома:

IY$'$. Существуют открытые и плотные в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множества, для всех точек i и α которых определены эффективные гладкие действия mn-мерной локальной группы Ли в некоторых окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$, такие, что действия ее в окрестностях $U(i), U(j)$ и $U(\alpha), U(\beta)$ точек i, j и α, β совпадают в пересечениях $U(i) \cap U(j)$ и $U(\alpha) \cap U(\beta)$ и что функция f является двухточечным инвариантом.

Группы преобразований, о которых говорится в аксиоме IY$'$, определяют своеобразную локальную подвижность жестких фигур ("твердых тел") в пространстве $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ с mn степенями свободы. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть. Множество пар $< i\alpha >$, для которых функция f определена и одновременно является двухточечным инвариантом, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.

Согласно аксиоме IY$'$, на открытых и плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множествах заданы mn-мерные линейные семейства гладких векторных полей X и Ξ, замкнутые относительно операции коммутирования, то есть алгебры Ли преобразований (см. [6], §60). В некоторых локальных системах координат в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ базисные векторные поля этих семейств можно записать в операторной форме:

$$\left.\begin{array}{r} X_\omega = \lambda^\mu_\omega \partial/\partial x^\mu, \\ \Xi_\omega = \sigma^\nu_\omega(\xi)\partial/\partial\xi^\nu, \end{array}\right\} \tag{9.7}$$

где $\omega = 1, \ldots, mn$, а по "немым"индексам μ и ν производится суммирование от 1 до m и от 1 до n соответственно. По инфинитезимальному критерию инвариантности (см. [7], §17, стр. 229 или [8], §17, стр. 77) функция $f(i\alpha)$ будет инвариантом локальной группы преобразований некоторой окрестности $U(i) \times U(\alpha)$, то есть двухточечным инвариантом, в том и только в том случае, если она удовлетворяет системе mn дифференциальных уравнений

$$X_\omega(i)f(i\alpha) + \Xi_\omega(\alpha)f(i\alpha) = 0$$

с операторами (9.7):

$$\lambda^\mu_\omega(i)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x^\mu_i} + \sigma^\nu_\omega(\alpha)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi^\nu_\alpha} = 0, \tag{9.8}$$

где $\lambda^\mu_\omega(i) = \lambda^\mu_\omega(x_i) = \lambda^\mu_\omega(x^1_i, \ldots, x^m_i)$ и $\sigma^\nu_\omega(\alpha) = \sigma^\nu_\omega(\xi_\alpha) = \sigma^\nu_\omega(\xi^1_\alpha, \ldots, \xi^n_\alpha)$.

Заметим, что дифференциальные уравнения в системе (9.8) линейные, однородные, в частных производных первого порядка, обычным методом решения которых является метод характеристик.

Ненулевые векторные поля X и Ξ могут обращаться в нуль в некоторых точках областей своего задания, но хотя бы в одной из точек этих областей должны быть отличны от нуля. Если же для соответствующих групп Ли преобразований, алгебрам Ли которых принадлежат поля X и Ξ, невырожденная метрическая функция f является двухточечным инвариантом, то имеет место следующая лемма:

Лемма 1. *Множества точек, где ненулевые векторные поля X и Ξ алгебр Ли локальных групп Ли локальных преобразований, удовлетворяющих аксиоме* IY$'$, *отличны от нуля, открыты и плотны в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно.*

Предположим противное. Пусть, например, ненулевое векторное поле $X = a^\omega X_\omega$, где $a^\omega, \omega = 1, \ldots, mn$ – постоянные, не все равные нулю одновременно, в некоторой окрестности $U(i)$ точки i обращается в нуль тождественно. Рассмотрим соответствующее ненулевое векторное поле $\Xi = a^\omega \Xi_\omega$, которое в какой-то точке α а значит, и в некоторой ее окрестности $U(\alpha)$, отлично от нуля. Согласно аксиоме I область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f открыта и плотна в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. Поэтому можно считать, что пара $<i\alpha>$ принадлежит $\mathfrak{S}_f$. Тогда, согласно аксиоме IY$'$, функция $f(i\alpha)$ будет двухточечным инвариантом, являясь решением системы уравнений (9.8). Поскольку, по сделанному предположению, $X(i) = a^\omega X_\omega(i) = 0$, а $\Xi(\alpha) = a^\omega \Xi_\omega(\alpha) \neq 0$, следствием mn уравнений системы (9.8) будет одно уравнение:

$$a^\omega \mathfrak{S}^\nu_\omega(\alpha) \partial f(i\alpha)/\partial \xi^\nu_\alpha = 0, \tag{9.9}$$

в которое входят производные только по координатам точки α и от этих же только координат зависят коэффициенты уравнения $a^\omega \sigma^\nu_\omega(\alpha)$, причем, по крайней мере, один из них отличен от нуля. Уравнение (9.9) может быть решено методом характеристик. Система уравнений характеристик для него имеет не более $n-1$ независимых интегралов и потому общее решение уравнения (9.9) будет таким:

$$f(i\alpha) = f(x^1_i, \ldots, x^m_i, \psi^1(\alpha), \ldots, \psi^{n'}(\alpha)), \tag{9.10}$$

где $n' \leq n-1$. В полученное выражение для функции $f(i\alpha)$ n координат $\xi^1_\alpha, \ldots, \xi^n_\alpha$ входят несущественным образом через меньшее число функций $\psi^1(\alpha), \ldots, \psi^{n'}(\alpha)$, так как $n' < n$, что противоречит аксиоме III. Таким образом, в окрестности $U(i)$ обязательно найдется точка, где исходное векторное поле X отлично от нуля. Поскольку область задания поля X открыта и плотна в $\mathfrak{M}$, множество точек, где оно отлично от нуля, плотно и, очевидно, открыто в $\mathfrak{M}$. Рассуждения в отношении векторного поля Ξ проводятся совершенно аналогично.

Следствие. *Множества точек, где все базисные векторные поля X_ω и Ξ_ω, $\omega = 1, \ldots, mn$ алгебр Ли локальных групп Ли локальных преобразований, удовлетворяющих аксиоме* IY$'$, *одновременно отличны от нуля, открыты и плотны в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно.*

Следствие очевидно, так как пересечения конечного числа ($= mn$) открытых и плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множеств, для всех точек которых ненулевые базисные векторные поля X_ω и Ξ_ω по лемме 1 отличны от нуля, являются открытыми и плотными в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множествами.

Смысл только что доказанной леммы 1 и ее следствия состоит в том, что если группы преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, составляющие группу движений невырожденной метрической функции f, действуют эффективно в некоторых открытых множествах $U \subseteq \mathfrak{M}$ и $V \subseteq \mathfrak{N}$, то они действуют эффективно и в любых их открытых подмножествах $U' \subset U$ и $V' \subset V$.

Теорема 1. *Если невырожденная метрическая функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, удовлетворяющая аксиомам I, II, III, задает на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ геометрию двух множеств, наделенную групповой симметрией степени mn, то она на тех же многообразиях задает физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга $(n+1, m+1)$.*

Лемма 2. *Если невырожденная метрическая функция $f : \mathfrak{M}\times\mathfrak{N} \to R$, удовлетворяющая аксиомам* I, II, III, *задает на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ геометрию двух множеств, наделенную групповой симметрией, то степень этой симметрии не превышает mn.*

Теорема 2. *Если невырожденная метрическая функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, удовлетворяющая аксиомам* I, II, III, *задает на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга $(n + 1, m + 1)$, то она на тех же многообразиях задает геометрию двух множеств, наделенную групповой симметрией степени mn.*

Доказательства сформулированных выше теорем 1 и 2, а также леммы 2, можно найти в работе [9] и в §1 монографии [2].

Итоговым результатом изложенного в этом параграфе является вывод об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий геометрии двух множеств, задаваемой на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ невырожденной метрической функциией $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$. Эта эквивалентность является естественным следствием сформулированных выше двух теорем, каждая из которых является обратной по отношению к другой.

Теорема 3. *Для того, чтобы невырожденная метрическая функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, удовлетворяющая аксиомам* I, II, III, *задавала на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ геометрию двух множеств, наделенную групповой симметрией степени mn, необходимо и достаточно, чтобы она на тех же многообразиях задавала физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга $(n + 1, m + 1)$.*

§10. Основная классификационная теорема

Согласно §9 феноменологически симметричная геометрия двух множеств (физическая структура) ранга (n+1,m+1) в общих чертах и кратко может быть определена следующим образом. Пусть множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ есть соответственно m-мерное и n-мерное гладкие многообразия. Обозначим локальные координаты этих многообразий через $x = (x^1, \ldots, x^m)$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, считая для определенности, что $m \leq n$. Пусть, далее, имеется функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ с открытой и плотной в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ областью определения, сопоставляющая каждой паре из нее некоторое число. Функцию f будем называть метрической, не требуя от нее выполнения аксиом обычной метрики, тем более, что расстояния для двух точек только из $\mathfrak{M}$ или двух точек только из $\mathfrak{N}$ не определены. Предполагается, что ее локальное координатное представление задается достаточно гладкой функцией (9.2), которую в исследованиях настоящего параграфа удобно записать, не конкретизируя обозначения точек i и α:

$$f = f(x, \xi) = f(x^1, \ldots, x^m, \xi^1, \ldots, \xi^n). \tag{10.1}$$

Вследствие невырожденности метрической функции f, в представление (10.1) координаты x и ξ входят существенным образом. Последнее означает, что никакая гладкая локально обратимая замена координат не приведет к уменьшению их числа в представлении (10.1).

Построим функцию $F : \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1} \to R^{(n+1)(m+1)}$ с естественной в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ областью определения, сопоставляя каждому кортежу длины $m+n+2$ из нее все $(m+1)(n+1)$ возможные по метрической функции f и упорядоченные по нему расстояния. Будем говорить, что функция f задает на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ феноменологически симметричную геометрию двух множеств (физическую структуру) ранга $(n+1, m+1)$, если локально множество значений построенной функции F в $R^{(m+1)(n+1)}$ является подмножеством множества нулей некоторой достаточно гладкой функции Φ от $(m+1)(n+1)$ переменных с $grad\Phi \neq 0$ на плотном в области определения функции F подмножестве, удовлетворяя уравнению (9.1).

В работе [10] приведена полная сводка результатов для физических структур произвольного ранга $(n+1, m+1)$ в предположении, что $n \geq m \geq 1$, так как обратный случай $m \geq n \geq 1$ легко вопроизводится по симметрии, а в монографии [11] показаны математические методы, которыми получены все эти результаты. Запишем их здесь с точностью до локально обратимой замены координат в многообразиях $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ и масштабного преобразования $\chi(f) \to f$, где χ – произвольная гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной:

$m = 1, n = 1$:

$$f = x + \xi; \tag{10.2}$$

$m = 1, n = 2$:

$$f = x\xi + \eta; \tag{10.3}$$

$m = 1, n = 3$:

$$f = (x\xi + \eta)/(x + \vartheta); \tag{10.4}$$

$m = n \geq 2$:

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m\xi^m, \tag{10.5}$$

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m + \xi^m; \tag{10.6}$$

$m = n - 1 \geq 2$:

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m + \xi^{m+1}. \tag{10.7}$$

Для всех остальных пар значений натуральных чисел m и n при оговоренном выше условии $m \leq n$ физические структуры ранга $(n+1, m+1)$ не существуют.

Феноменологическая симметрия геометрий двух множеств (физических структур), задаваемых вышеперечисленными метрическими функциями (10.2)–(10.7), выражается, соответственно, следующими уравнениями:

$$f(i\alpha) - f(i\beta) - f(j\alpha) + f(j\beta) = 0; \tag{10.2$'$}$$

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0; \tag{10.3$'$}$$

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0; \tag{10.4$'$}$$

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & \ldots & f(i\tau) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & \ldots & f(j\tau) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(v\alpha) & f(v\beta) & \ldots & f(v\tau) \end{vmatrix} = 0; \tag{10.5$'$}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & \ldots & f(i\tau) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & \ldots & f(j\tau) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & f(v\alpha) & f(v\beta) & \ldots & f(v\tau) \end{vmatrix} = 0; \tag{10.6$'$}$$

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & \ldots & f(i\tau) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & \ldots & f(j\tau) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & \ldots & f(k\tau) & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(v\alpha) & f(v\beta) & \ldots & f(v\tau) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{10.7$'$}$$

Под движением в геометрии двух множеств следует понимать такую пару гладких локально обратимых преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$:

$$x' = \lambda(x), \ \xi' = \sigma(\xi), \tag{10.8}$$

при которых функция (2.1) сохраняется:

$$f(\lambda(x), \sigma(\xi)) = f(x, \xi). \tag{10.9}$$

Если метрическая функция f задана в ее явном координатном представлении (10.1), то равенство (10.9) является функциональным уравнением относительно двух преобразований (10.8), решая которое можно найти группу движений и установить число ее непрерывных параметров. В настоящем параграфе приводятся также полные локальные группы локальных движений для каждой из шести метрических функций (10.2)–(10.7), которые могут быть найдены (см. [9], §2) как общие решения соответствующих уравнений (10.9), причем на функции $\lambda(x)$ и $\sigma(\xi)$ преобразований (10.8), кроме гладкости и локальной обратимости, никакие дополнительные ограничения (например, линейность) не налагаются.

Теорема. *Группа движений (10.8) феноменологически симметричной геометрии двух множеств(физической структуры), задаваемой одной из метрических функций (10.2)–(10.7), представляется следующими преобразованиями многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$:*

для метрической функции (10.2):

$$x' = x + a, \ \xi' = \xi - a; \tag{10.10}$$

для метрической функции (10.3):

$$x' = ax + b, \ \xi' = \xi/a, \ \eta' = \eta - b\xi/a, \tag{10.11}$$

где $a \neq 0$;

для метрической функции (10.4):

$$\left.\begin{array}{l} x' = (ax+b)/(cx+d), \ \xi' = (d\xi - c\eta)/(d - c\vartheta), \\ \eta' = (a\eta - b\xi)/(d - c\vartheta), \ \vartheta' = (a\vartheta - b)/(d - c\vartheta), \end{array}\right\} \tag{10.12}$$

где $ad - bc = \pm 1$;

для метрической функции (10.5):

$$\left.\begin{array}{l} x'^{\mu} = a^{\mu 1}x^1 + \ldots + a^{\mu m}x^m, \\ \xi'^{\mu} = \tilde{a}^{1\mu}\xi^1 + \ldots + \tilde{a}^{m\mu}\xi^m, \end{array}\right\} \tag{10.13}$$

где $\mu = 1, \ldots, m$, a – квадратная невырожденная матрица порядка m, $\tilde{a}$ – обратная к ней матрица;

для метрической функции (10.6):

$$\left.\begin{array}{c} x'^\nu = a^{\nu 1}x^1 + \ldots + a^{\nu,m-1}x^{m-1} + b^\nu, \\ x'^m = x^m + c^1x^1 + \ldots + c^{m-1}x^{m-1} + b^m, \\ \xi'^\nu = \tilde{a}^{1\nu}(\xi^1 - c^1) + \ldots + \tilde{a}^{m-1,\nu}(\xi^{m-1} - c^{m-1}), \\ \xi'^m = \xi^m - (b^1\tilde{a}^{11} + \ldots + b^{m-1}\tilde{a}^{1,m-1})(\xi^1 - c^1) - \ldots - \\ -(b^1\tilde{a}^{m-1,1} + \ldots + b^{m-1}\tilde{a}^{m-1,m-1})(\xi^{m-1} - c^{m-1}) - b^m, \end{array}\right\} \qquad (10.14)$$

где $\nu = 1, \ldots, m-1$, a – квадратная невырожденная матрица порядка $m-1$, $\tilde{a}$ – обратная к ней матрица;

для метрической функции (10.7):

$$\left.\begin{array}{c} x'^\mu = a^{\mu 1}x^1 + \ldots + a^{\mu m}x^m + b^\mu, \\ \xi'^\mu = \tilde{a}^{1\mu}\xi^1 + \ldots + \tilde{a}^{m\mu}\xi^m, \\ \xi'^{m+1} = \xi^{m+1} - (b^1\tilde{a}^{11} + \ldots + b^m\tilde{a}^{1m})\xi^1 - \\ - \ldots - (b^1\tilde{a}^{m1} + \ldots + b^m\tilde{a}^{mm})\xi^m, \end{array}\right\} \qquad (10.15)$$

где $\mu = 1, \ldots, m$, a – квадратная невырожденная матрица порядка m, $\tilde{a}$ – обратная к ней матрица.

Все перечисленные в теореме группы движений зависят от конечного числа непрерывных параметров, максимальное число которых в соответствии с леммой 2 и теоремой 2 из предыдущего §9 равно mn, то есть произведению размерностей m и n многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Для сравнения заметим, что в n-мерной феноменологически симметричной ранга $n+2$ геометрии одного множества $\mathfrak{M}$ это число равно $n(n+1)/2$. Отметим также, что не для всякой метрической функции (10.1) уравнение (10.9) имеет нетривиальное решение, то есть полная группа движений может состоять только из тождественных преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Нетрудно, например, установить, что для метрической функции $f(x,\xi) = x\xi + \xi^3$ уравнение (10.9) имеет только тривиальное решение: $\lambda(x) = x, \sigma(\xi) = \xi$, и потому полная группа движений соответствующей геометрии двух множеств содержит только тождественные преобразования $x' = x$ и $\xi' = \xi$ одномерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Согласно теореме 3 из §9 наделенная такой тривиальной групповой симметрией геометрия двух множеств, задаваемая на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ метрической функциией $f(x,\xi) = x\xi + \xi^3$, не является физической структурой ранга (2,2).

§11. Физические структуры ранга (3,3) и (4,2)

Феноменологически симметричная геометрия двух множеств (физическая структура) ранга (3,3) существует в двух вариантах, задаваемых на двумерных многообразиях метрическими функциями

$$f = x\xi + y\eta, \tag{11.1}$$

$$f = x\xi + y + \eta, \tag{11.2}$$

координатные представления для которых получаются из выражений (10.5), (10.6) для случая $m = n = 2$ при введении следующих обозначений координат: $x = x^1,\ y = x^2,\ \xi = \xi^1,\ \eta = \xi^2$.

Легко убедиться в том, что их феноменологическая симметрия выражается уравнениями

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\gamma) \end{vmatrix} = 0, \tag{11.3}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) \\ 1 & f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\gamma) \end{vmatrix} = 0 \tag{11.4}$$

соответственно.

Установим, прежде всего, что две физические структуры ранга (3,3), задаваемые метрическими функциями (11.1) и (11.2) неэквивалентны.

Теорема 1. *Ни при каких заменах координат и масштабных преобразованиях метрические функции (11.1) и (11.2) не переходят друг в друга.*

Доказательство будем проводить методом от противного, предположив, что при некоторых гладких обратимых заменах координат $\lambda(x, y) \to x,\ \sigma(x, y) \to y$ и $\rho(\xi, \eta) \to \xi,\ \tau(\xi, \eta) \to \eta$ в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, а также масштабном преобразовании $\chi(f) \to f$ одна из метрических функций (11.1), (11.2) переходит в другую, например:

$$\lambda(x, y)\rho(\xi, \eta) + \sigma(x, y)\tau(\xi, \eta) = \chi(x\xi + y + \eta), \tag{11.5}$$

где $\partial(\lambda, \sigma)/\partial(x, y) \neq 0$, $\partial(\rho, \tau)/\partial(\xi, \eta) \neq 0$ и $\chi' \neq 0$. Теорема 1 будет верна, если функциональное уравнение (11.5) не имеет решения.

Продифференцируем уравнение (11.5) по переменным ξ, η и разделим один результат дифференцирования на другой: $\lambda\rho_\xi + \sigma\tau_\xi = (\lambda\rho_\eta + \sigma\tau_\eta)x$, откуда, фиксируя переменные ξ, η, получаем связь:

$$\sigma(x, y) = A(x)\lambda(x, y), \tag{11.6}$$

где $A(x) = (ax + b)/(cx + d)$ – дробно-линейная функция с отличной от нуля производной: $A'(x) = (ad - bc)/(cx + d)^2 \neq 0$, так как функции λ и σ независимы.

Совершенно аналогично, дифференцируя уравнение (11.5) по переменным x, y, получаем вторую связь:

$$\tau(\xi, \eta) = B(\xi)\rho(\xi, \eta), \tag{11.7}$$

где $B(\xi) = (k\xi + l)/(m\xi + n)$ – дробно-линейная функция с отличной от нуля производной: $B'(\xi) = (kn - lm)/(m\xi + n)^2 \neq 0$, так как независимы функции ρ и τ.

Полученные две связи (11.6), (11.7) подставим в исходное функциональное уравнение (11.5):

$$\lambda(x, y)\rho(\xi, \eta)(1 + A(x)B(\xi)) = \chi(x\xi + y + \eta) \tag{11.8}$$

и продифференцируем его по переменным y, η, после чего исключим производную $\chi'(...)$. Разделяя далее переменные, получаем дифференциальное уравнения $\lambda_y/\lambda = \rho_\eta/\rho = h$, откуда после интегрирования:

$$\lambda(x, y) = C(x) \exp hy, \quad \rho(\xi, \eta) = D(\xi) \exp h\eta, \tag{11.9}$$

где, очевидно, $C(x) \neq 0,\ D(\xi) \neq 0$ и, кроме того, $h \neq 0$, так как иначе, например, функция λ и функция σ согласно связи (11.6) будут зависимыми как функции только одной переменной x, что приведет к нарушению условия $\partial(\lambda, \sigma)/\partial(x, y) \neq 0$ в уравнении (11.5).

Перепишем уравнение (11.8) с функциями (11.9):

$$(1 + A(x)B(\xi))C(x)D(\xi) \exp h(y + \eta) = \chi(x\xi + y + \eta), \tag{11.10}$$

которое по всем четырем переменным x, y, ξ, η выполняется тождественно. Полагая $x = 0,\ \xi = 0$ и вводя переменную $z = y + \eta$, из уравнения (11.10) получаем выражение $\chi(z) = E \exp hz$, где $E \neq 0$ и $h \neq 0$, с которым оно значительно упростится:

$$(1 + A(x)B(\xi))C(x)D(\xi) = E \exp hx\xi.$$

Логарифмируем последний результат:

$$\ln(1 + A(x)B(\xi)) + \ln C(x) + \ln D(\xi) = \ln E + hx\xi,$$

дифференцируя его по переменным x, ξ и приводя к общему знаменателю:

$$A'(x)B'(\xi) = h(1 + A(x)B(\xi))^2.$$

Выражения для дробно-линейных функций $A(x)$, $B(\xi)$ и их производных $A'(x)$, $B'(\xi)$ возьмем из формул (11.6), (11.7), после чего извлечем квадратный корень:

$$\pm\sqrt{(ad - bc)(kn - lm)/h} = (cx + d)(m\xi + n) + (ax + b)(k\xi + l).$$

В левой части этого равенства нет переменных x, ξ, а в правой они присутствуют. Поэтому коэффициенты при них и при их произведениях справа должны обратиться в ноль. Возьмем два коэффициента при x и $x\xi$:

$$cn + al = 0, \quad cm + ak = 0.$$

Полученные два соотношения рассмотрим как систему двух уравнений относительно неизвестных c, a. Поскольку эта система однородная и определитель ее матрицы, будучи числителем производной $B'(\xi)$ дробно-линейной функции $B(\xi)$ из выражения (11.7), отличен от нуля, она имеет только нулевое решение: $a = 0,\ c = 0$. Но этот результат противоречит необращению в нуль производной $A'(x)$ дробно-линейной функции $A(x)$ из выражения (11.6). Полученное противоречие означает, что функциональное уравнение (11.5) не имеет решения и потому метрические функции (11.1) и (11.2) неэквивалентны. Теорема 1 полностью доказана.

Установим теперь групповую симметрию физической структуры ранга (3,3), степень которой по теореме 3 из §9 должна быть равна четырем.

Теорема 2. *Группа движений феноменологически симметричной геометрии двух множеств (физической структуры) ранга (3,3), задаваемой на двумерных многообразиях метрической функцией (11.1): $f = x\xi + y\eta$, представляется следующими уравнениями:*

$$\left.\begin{aligned} x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \\ \xi' = (d\xi - c\eta)/\Delta, \quad \eta' = (-b\xi + a\eta)/\Delta, \end{aligned}\right\} \tag{11.11}$$

где $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Движение в этой геометрии можно записать следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x' = \lambda(x,y), \quad y' = \sigma(x,y), \\ \xi' = \rho(\xi,\eta), \quad \eta' = \tau(\xi,\eta), \end{aligned}\right\} \tag{11.12}$$

где $\partial(\lambda,\sigma)/\partial(x,y) \neq 0$, $\partial(\rho,\tau)/\partial(\xi,\eta) \neq 0$, так как соответствующие преобразования двумерных многообразий в движении должны быть локально обратимыми. Поскольку движение (11.12) сохраняет метрическую функцию (11.1), для него получаем функциональное уравнение

$$\lambda(x,y)\rho(\xi,\eta) + \sigma(x,y)\tau(\xi,\eta) = x\xi + y\eta, \tag{11.13}$$

которое выполняется тождественно по всем четырем координатам x, y и ξ, η.

Продифференцируем уравнение (11.13) по переменным ξ, η:

$$\lambda\rho_\xi + \sigma\tau_\xi = x, \quad \lambda\rho_\eta + \sigma\tau_\eta = y$$

и разрешим полученные равенства относительно функций λ, σ:

$$\lambda(x,y) = \frac{x\tau_\eta - y\tau_\xi}{\rho_\xi\tau_\eta - \rho_\eta\tau_\xi}, \quad \sigma(x,y) = \frac{-x\rho_\eta + y\rho_\xi}{\rho_\xi\tau_\eta - \rho_\eta\tau_\xi}.$$

Дифференцируя полученные для функций λ и σ выражения по переменным x, y, убеждаемся в том, что коэффициенты при них являются константами. Введя для них соответствующие обозначения, получаем первую пару уравнений (11.11), которыми определяется преобразование двумерного многообразия $\mathfrak{M}$ в движении

(11.12), причем из их обратимости, очевидно, вытекает условие $\Delta \neq 0$. Вторая пара уравнений (11.11), определяющая преобразование другого двумерного многообразия $\mathfrak{N}$ в движении (11.12), легко получается из функционального уравнения (11.13) при подстановке в него первой пары.

Множество движений (11.11) зависит от четырех непрерывгых параметров a, b, c, d, на которые наложено условие $\Delta = ad - bc \neq 0$. Легко убедиться в том, что это множество по композиции движений является группой. Для этого запишем, например, преобразования первого многообразия $\mathfrak{M}$ в множестве движений (11.11) в матричной форме:

$$\left\| \begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\|.$$

То есть каждому такому преобразованию однозначно сопоставляется квадратная невырожденная матрица второго порядка, а композиции двух преобразований – их матричное умножение по правилу "строка на столбец". Хорошо известно, что множество всех невырожденных квадратных матриц по операции их обычного умножения является группой и потому группой является и множество преобразлваний многообразия $\mathfrak{M}$ в множестве движениий (11.11). Преобразованиям многообразия $\mathfrak{N}$ в этих движениях сопоставляются обратные транспонированные матрицы, множество которых также составляет группу, изоморфную группе прямых матриц. Следовательно, и все множество движений (11.11) как совокупность двух изоморфных групп преобразований различных многообразий является группой, определяющей групповую симметрию физической структуры ранга (3,3), задаваемой метрической функцией (11.1). Степень этой симметрии равна четырем, так как группа движений (11.11) зависит от четырех непрерывных параметров. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Группа движений феноменологически симметричной геометрии двух множеств (физической структуры) ранга (3,3), задаваемой на двумерных многообразиях метрической функцией (11.2): $f = x\xi + y + \eta$, представляется следующими уравнениями:*

$$\left.\begin{array}{c} x' = ax + b, \quad y' = y + cx + d, \\ \xi' = (\xi - c)/a, \quad \eta' = \eta - b\xi/a - (ad - bc)/a, \end{array}\right\} \tag{11.14}$$

где $a \neq 0$.

Запишем функциональное уравнение на множество движений (11.12) для метрической функции (11.2):

$$\lambda(x, y)\rho(\xi, \eta) + \sigma(x, y) + \tau(\xi, \eta) = x\xi + y + \eta \tag{11.15}$$

и продифференцируем его по переменным ξ, η:

$$\lambda\rho_\xi + \tau_\xi = x, \quad \lambda\rho_\eta + \tau_\eta = 1,$$

откуда находим: $\lambda(x,y) = (x\tau_\eta - \tau_\xi)/(\rho_\xi\tau_\eta - \rho_\eta\tau_\xi)$. Зафиксируем в правой части переменные ξ, η и введем удобные обозначения постоянных коэффициентов: $\lambda(x,y) = ax + b$, где $a \neq 0$, так как $\lambda(x,y) \neq const$. Подставляя это выражение для функции λ в исходное функциональное уравнение (11.15) и снова фиксируя переменные ξ, η получаем выражение для другой функции: $\sigma(x,y) = y + cx + d$. Тем самым получены преобразования многообразия $\mathfrak{M}$ в множестве движений (11.14). Преобразования второго многообразия $\mathfrak{N}$ находятся из функционального уравнения (11.15) при подстановке в него только что найденных выражений для функций λ и σ. В результате получаем все множество движений (11.14), которое зависит от четырех непрерывных параметров a, b, c, d с доплнительным условием $a \neq 0$.

Для того, чтобы убедиться в том, что множество движений (11.14) является группой, запишем, например, преобразование множества $\mathfrak{M}$ из него в следующей матричной форме:

$$\left\| \begin{matrix} x' \\ y' \\ 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a & 0 & b \\ c & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ 1 \end{matrix} \right\|,$$

откуда видно, что каждому такому преобразованию сопоставляется невырожденная матрица третьего порядка, структура которой, очевидно, сохраняется при обычном матричном умножении по правилу "строка на столбец", причем композиции двух преобразований соответствует умножение соответствующих матриц. Множество невырожденных матриц подобной структуры по операции их умножения является группой и потому группой является множество преобразований многообразия $\mathfrak{M}$ в движениях (11.14). Нетрудно сообразить, что преобразованиям второго многообразия $\mathfrak{N}$ в движениях (11.14) сопоставляется транспонированная обратная матрица, множество которых также является группой, изоморфной группе прямых матриц. Таким образом, все множество движений (11.14) является группой, которая определяет групповую симметрию геометрии двух множеств ранга (3,3), задаваемой на двумерных многообразиях метрической функцией (11.2). Степень групповой симметрии равна четырем, так как группа движений (11.14) четырехпараметрическая. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Двухточечный инвариант группы преобразований (11.11) совпадает с метрической функцией (11.1) с точностью до масштабного преобразования.*

Тождественному преобразованию в группе (11.11) соответствуют параметры $a = 1,\ b = 0,\ c = 0,\ d = 1$. Введем параметры бесконечно малого (инфинитезимального) преобразования $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, полагая $a = 1 + \alpha,\ b = \beta,\ c = \gamma,\ d = 1 + \delta$. Тогда с точностью до величин первого порядка малости преобразования (11.11) запишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x' = x + \alpha x + \beta y, \quad y' = y + \gamma x + \delta y, \\ \xi' = \xi - \alpha\xi - \gamma\eta, \quad \eta' = \eta - \beta\xi - \delta\eta. \end{aligned}\right\} \qquad (11.16)$$

Бесконечно малым преобразованиям (11.16) можно сопоставить две системы четырех линейных дифференциальных операторов:

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = x\partial_x,\ X_2 = y\partial_x,\ X_3 = x\partial_y,\ X_4 = y\partial_y, \\ \Xi_1 = -\xi\partial_\xi,\ \Xi_2 = -\xi\partial_\eta,\ \Xi_3 = -\eta\partial_\xi,\ \Xi_4 = -\eta\partial_\eta, \end{array}\right\} \tag{11.17}$$

где, например, $\partial_x = \partial/\partial x$, которые составляют естественные координатные базисы двух изоморфных с точностью до совпадения структурных констант четырехмерных алгебр Ли преобразований двумерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

При известных преобразованиях (11.11) двухточечный инвариант $f = f(x, y, \xi, \eta)$ является решением функционального уравнения

$$f(x', y', \xi', \eta') = f(x, y, \xi, \eta). \tag{11.18}$$

Если в функциональное уравнение (11.18) подставить бесконечно малые преобразования (11.16), затем продифференцировать его по каждому из четырех параметров $\alpha, \beta.\gamma, \delta$ и придать им нулевые значения, то относительно двухточечного инварианта получается система четырех дифференциальных уравнений

$$X_\omega f + \Xi_\omega f = 0, \tag{11.19}$$

где $\omega = 1, 2, 3, 4$, с операторами (11.17).

Поскольку дифференциальные уравнения (11.19) линейные однородные в частных производных первого порядка, их можно решать методом характеристик. Для первого и четвертого уравнений системы (11.19) соответствующие уравнения характеристик: $dx/x = -d\xi/\xi,\ dy/y = -d\eta/\eta$ имеют интегралы $x\xi = \text{const}$, $y\eta = \text{const}$. Общее решение $f = \theta(x\xi, y\eta)$ первого и четвертого уравнений системы (11.19), где $\theta(u, v)$ – произвольная функция двух переменных, подставим в ее второе и третье уравнения: $\theta_u - \theta_v = 0$. Это уравнение также решается методом характеристик и его общее решение задается выражением $\theta(u, v) = \chi(u + v)$, где χ – произвольная функция уже только одной переменной с отличной от нуля производной χ'. Таким образом, двухточечный инвариант, как решение системы дифференциальных уравнений (11.19) с операторами (11.17) задается выражением

$$f = \chi(x\xi + y\eta), \tag{11.20}$$

которое масштабным преобразованием $\chi^{-1}(f) \to f$ с обратной функцией χ^{-1} переводится в метрическую функцию (11.1). Теорема 4 полностью доказана.

Теорема 5. *Двухточечный инвариант группы преобразований (11.14) совпадает с метрической функцией (11.2) с точностью до масштабного преобразования.*

Доказательства теоремы 5 в общих чертах повторяет доказательство предыдущей теоремы, хотя в деталях, кончно же, от него отличается. Тождественным преобразованием в группе (11.14) будет преобразование с параметрами $a = 1,\ b =$

$0,\ c=0,\ d=0$. Полагая $a=1+\alpha,\ b=\beta,\ c=\gamma,\ d=\delta$, с точностью до малых величин первого порядка из уравнений (11.14) получаем уравнения для бесконечно малых (инфинитезимальных) преобразований:

$$\left.\begin{array}{c} x'=x+\alpha x+\beta,\quad y'=y+\gamma x+\delta, \\ \xi'=\xi-\alpha\xi-\gamma,\quad \eta'=\eta-\beta\xi-\delta, \end{array}\right\} \tag{11.21}$$

которым соответствуют две системы четырех линейных дифференциальных операторов

$$\left.\begin{array}{c} X_1=x\partial_x,\ X_2=\partial_x,\ X_3=x\partial_y,\ X_4=\partial_y, \\ \Xi_1=-\xi\partial_\xi,\ \Xi_2=-\xi\partial_\eta,\ \Xi_3=-\partial_\xi,\ \Xi_4=-\partial_\eta, \end{array}\right\} \tag{11.22}$$

которые составляют естественные координатные базисы двух изоморфных с точностью до совпаденния структурных констант четарехмерных алгебр Ли преобразований (11.14) двумерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Подставим в функциональное уравнение (11.18) для двухточечного мнварианта инфинитезимальные преобразования (11.21), продифференцируем его по каждому из четырех параметров $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ и затем придадим им нулевые значения, соответствующие тождественным преобразованиям. В результате на двухточечный инвариант $f=f(x,y,\xi,\eta)$ возникает система четырех дифференциальных уравнений (11.19) с операторами (11.22). Как и в предыдущем случае, эти уравнения решаются методом характеристик. Для первого и четвертого уравнений системы (11.19) соответствующие уравнения характеристик $dx/x=-d\xi/\xi,\ dy=-d\eta$ легко интегрируются: $x\xi=\mathrm{const},\ \ y+\eta=\mathrm{const}$, поэтому их общее решение запишется в следующем виде: $f=\theta(x\xi,y+\eta)$, где $\theta(u,v)$ – произвольная функция двух переменных. После подстановки этого выражения во второе и третье уравнения системы (11.19) получаем дифференциальное уравнение $\theta_u-\theta_v=0$, решение которого $\theta(u,v)=\chi(u+v)$ записывается через произвольную функцию χ от одной только переменной, причем $\chi'\neq 0$. В итоге для двухточечного инварианта f получаем выражение

$$f=\chi(x\xi+y+\eta), \tag{11.23}$$

которое переходит в метрическую функцию (11.2) при масштабном преобразовании $\chi^{-1}(f)\to f$ с обратной функцией χ^{-1}. Теорема 5 доказана.

Заметим. что две четырехмерные алгебры Ли (11.17) в соответствующих базисах имеют одинаковые структурные константы. Очевидный переход к другому базису и тривиальная замена координат переводят один базис в другой, что говорит о слабой эквивалентности этих алгебр. Однако никакая только замена координат не переведет эти базисы один в другой. Отмеченное обстоятельство означает что соответствуюшие им две группы Ли преобразований (11.11), как различные действия в двумерном многообразии одной и той же четырехмерной группы Ли, подобны, но не эквивалентны. То есть некоторый автоморфизм в группе и замена координат переведут одну группу преобразований в другую (подобие или слабая эквивалентность), но никакая замена координат без автоморфизма этого не сможет сделать (неэквивалентность в сильном смысле). Аналогичное замечание справедливо и в отношении двух четырехмерных алгебр Ли (11.22), соответствующих группам Ли преобразований (11.14).

Перейдем далее к рассмотрению феноменологически симметричной геометрии двух множеств (физической структуры) ранга (4,2), задаваемой на одномерном и трехмерном многообразиям $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ метрической функцией (10.4):

$$f = \frac{x\xi + \eta}{x + \vartheta}. \tag{11.24}$$

Ее феноменологическая симметрия выражается уравнением

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{11.25}$$

где, например, $f(i\alpha) = (x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha)/(x_i + \vartheta_\alpha)$. В справедливости уравнения (11.25) можно убедиться непосредственной подстановкой в него метрической функции (11.24), применяя метод разложения определителя по сумме в столбце, или с помощью математического пакета "Maple", позволяющего находить значения определителей и ранги матриц.

Теорема 6. *Группа движений феноменологически симметричной геометрии двух множеств (физической структуры) ранга (4,2), задаваемой на одномерном и трехмерном многообразиях метрической функцией (11.24):* $f = (x\xi+\eta)/(x+\vartheta)$, *представляется следующими уравнениями:*

$$\left.\begin{array}{l} x' = (ax+b)/(cx+d),\ \xi' = (d\xi - c\eta)/(d - c\vartheta), \\ \eta' = (a\eta - b\xi)/(d - c\vartheta),\ \vartheta' = (a\vartheta - b)/(d - c\vartheta), \end{array}\right\} \tag{11.26}$$

где $\Delta = ad - bc = \pm 1$.

Движение в рассматриваемой геометрии двух множеств записывается через локально обратимые преобразования одномерного и трехмерного многообразий следующими уравнениями:

$$x' = \lambda(x),\ \xi' = \sigma(\xi,\eta,\vartheta),\ \eta' = \rho(\xi,\eta,\vartheta),\ \vartheta' = \tau(\xi,\eta,\vartheta), \tag{11.27}$$

причем $\lambda' \neq 0$ и $\partial(\sigma,\rho,\tau)/\partial(\xi,\eta,\vartheta) \neq 0$.

Если метрическая функция $f = f(x,\xi,\eta,\vartheta)$ сохраняется движениями (11.27), то тождественно по всем четырем координатам x и ξ,η,ϑ выполняется равенство

$$f(x',\xi',\eta',\vartheta') = f(x,\xi,\eta,\vartheta). \tag{11.28}$$

При известной метрической функции f равенство (11.28) является функциональным уравнением относительно движения (11.27), и решая его, мы находим множество всех ее движений. Запишем уравнение (11.28) для метрической функции (11.24):

$$\frac{\lambda(x)\sigma(\xi,\eta,\vartheta)+\rho(\xi,\eta,\vartheta)}{\lambda(x)+\tau(\xi,\eta,\vartheta)}=\frac{x\xi+\eta}{x+\vartheta}. \tag{11.29}$$

Продифференцируем уравнение (11.29) по переменной x, умножив его затем на $(\lambda+\tau)^2$:

$$(\sigma\tau-\rho)\lambda'(x)=(\lambda(x)+\tau)^2(\xi\vartheta-\eta)/(x+\vartheta)^2.$$

Повторное дифференцирование этого равенства по переменной x приводит еще к следующим двум соотношениям:

$$\begin{gathered}
c(\sigma\tau-\rho)^2\lambda''(x)=2(\lambda(x)+\tau)^3(\xi\vartheta-\eta)^2/(x+\vartheta)^4-\\
-2(\sigma\tau-\rho)(\lambda(x)+\tau)^2(\xi\vartheta-\eta)/(x+\vartheta)^3,\\
(\sigma\tau-\rho)^3\lambda'''(x)=6(\lambda(x)+\tau)^4(\xi\vartheta-\eta)^3/(x+\vartheta)^6-\\
-12(\sigma\tau-\rho)(\lambda(x)+\tau)^3(\xi\vartheta-\eta)^2/(x+\vartheta)^5+\\
+6(\sigma\tau-\rho)^2(\lambda(x)+\tau)^2(\xi\vartheta-\eta)/(x+\vartheta)^4,
\end{gathered}$$

откуда, имея в виду, что, вследствие обратимости преобразования трехмерного многообразия $\mathfrak{N}$, $\sigma\tau-\rho\neq 0$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\lambda(x)$:

$$2\lambda'(x)\lambda'''(x)=3(\lambda''(x))^2.$$

Общее решение этого уравнения записывается в следующем виде:

$$\lambda(x)=(ax+b)/(cx+d), \tag{11.30}$$

где a,b,c,d – постоянные (см. [12], стр. 526, №7.10). Поскольку $\lambda'(x)=(ad-bc)/(cx+d)^2\neq 0$, получаем, что $\Delta=ad-bc\neq 0$. Вводя естественные переобозначения $a/\sqrt{|\Delta|}\to a$, $b/\sqrt{|\Delta|}\to b$, $c/\sqrt{|\Delta|}\to c$, $d/\sqrt{|\Delta|}\to d$, связь между параметрами в решении (11.30) можно записать в следующем виде:

$$\Delta=ad-bc=\pm 1. \tag{11.31}$$

Таким образом, из четырех параметров a,b,c,d, задающих преобразование одномерного многообразия $\mathfrak{M}$, существенных, из-за наличия связи (11.31), только три.

Подставим решение (11.30) в исходное функциональное уравнение (11.29):

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\sigma+\rho\right)(x+\vartheta)=\left(\frac{ax+b}{cx+d}+\tau\right)(x\xi+\eta),$$

приведем его к общему знаменателю, перемножим скобки и сравним в правой и левой частях коэффициенты при переменной x, ее квадрате и свободные от нее члены. В результате относительно функций σ,τ,ρ получается алгебраическая система трех линейных неоднородных уравнений:

$$\left.\begin{gathered}
a\sigma+c\rho-c\xi\tau=a\xi,\\
(b+a\vartheta)\sigma+(d+c\vartheta)\rho-(d\xi+c\eta)\tau=b\xi+a\eta,\\
b\vartheta\sigma+d\vartheta\rho-d\eta\tau=b\eta,
\end{gathered}\right\}$$

определитель которой, равный $(ad-bc)(d-c\vartheta)(\xi\vartheta-\eta)$, очевидно, отличен от нуля. Используя формулы Крамера, найдем решение этой системы:

$$\left.\begin{aligned} \sigma(\xi,\eta,\vartheta) &= (d\xi-c\eta)/(d-c\vartheta), \\ \rho(\xi,\eta,\vartheta) &= (a\eta-b\xi)/(d-c\vartheta), \\ \tau(\xi,\eta,\vartheta) &= (a\vartheta-b)/(d-c\vartheta). \end{aligned}\right\} \tag{11.32}$$

Преобразования (11.27) с функциями (11.30) и (11.32) одномерного и трехмерного многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задают множество всех движений для метрической функции (11.24). Нетрудно убедиться в том, что это множество по композиции движений является группой, состоящей, согласно условию (11.31), из двух связных компонент с $\Delta = +1$ и $\Delta = -1$. Первая компонента с $\Delta = +1$ содержит тождественное преобразование и является трехмерной группой *собственных* движений, которая входит в группу (11.26) всех движений как подгруппа. Степень групповой симметрии, определяемая числом независимых непрерывных параметров множества движений, равна трем. Теорема 6 полностью доказана.

Теорема 7. *Двухточечный инвариант группы преобразований (11.26) совпадает с метрической функцией (11.24) с точностью до масштабного преобразования.*

Тождественному преобразованию в группе (11.26) соответствуют параметры $a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=1$. Полагая в ней $a=1+\alpha,\ b=\beta,\ c=\gamma,\ d=1+\delta$, запишем бесконечно малые (инфинитезимальные) преобразования с точностью до малых величин первого порядка, учитывая, что из условия $ad-bc=1$ с той же точностью имеем $\delta=-\alpha$;

$$\left.\begin{aligned} x' = x+2\alpha x+\beta-\gamma x^2,\ \xi' = \xi+\gamma(-\eta+\xi\vartheta), \\ \eta' = \eta+2\alpha\eta-\beta\xi+\gamma\eta\vartheta,\quad \vartheta' = \vartheta+2\alpha\vartheta-\beta+\gamma\vartheta^2, \end{aligned}\right\} \tag{11.33}$$

которым можно сопоставить две системы трех линейных дифференциальных операторов

$$\left.\begin{gathered} X_1 = 2x\partial_x,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = -x^2\partial_x, \\ \Xi_1 = 2\eta\partial_\eta+2\vartheta\partial_\vartheta,\ \Xi_2 = -\xi\partial_\eta-\partial_\vartheta,\ \Xi_3 = (-\eta+\xi\vartheta)\partial_\xi+\eta\vartheta\partial_\eta+\vartheta^2\partial_\vartheta, \end{gathered}\right\} \tag{11.34}$$

составляющих естественные координатные базисы двух изоморфных с точностью до совпадения структурных констант трехмерных алгебр Ли преобразований (11.26) одномерного и трехмерного многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Подставим в функциональное уравнение (11.28) инфинитезимальные преобразования (11.33), затем продифференцируем его по каждому из трех параметров α,β,γ и придадим им нулевые значения, соответствующие тождественному преобразованию. В результате на двухточечный инвариант $f=f(x,\xi,\eta,\vartheta)$ получим систему трех дифференциальных уравнений (11.19), где $\omega=1,2,3$, с операторами (11.34). Второе уравнение $f_x-\xi f_\eta-f_\vartheta=0$ этой системы легко интегрируется методом характеристик. Поскольку система уравнений характеристик

$dx = -d\eta/\xi = -d\vartheta = d\xi/0$ для него имеет три независимых интеграла: $\xi =$ const, $x\xi + \eta =$ const, $x + \vartheta =$ const, его общее решение задается выражением $f = \theta(\xi, x\xi+\eta, x+\vartheta)$, где $\theta(u, , v, w)$ – произвольная функция трех переменных, для которой, очевидно, $\theta_v \neq 0,\ \theta_w \neq 0$. Подставляя это решение в первое и третье уравнения системы (11.19) с операторами (11.34), получаем два простых дифференциальных уравнения: $v\theta_v + w\theta_w = 0,\ \theta_u = 0$, решения которых найти совсем просто $\theta = \chi(v/w)$, где χ – произвольная функция только одной переменной, по которой ее производная χ' отлична от нуля. В результате для двухточечного инварианта f группы преобразований (11.26) получаем общее выражение $f = \chi((x\xi+\eta)/(x+\vartheta))$, которое переходит в метрическую функцию (11.24) при масштабном преобразовании $\chi^{-1}(f) \to f$ с обратной функцией χ^{-1}. Теорема 7 полностью доказана.

Остановимся теперь на интерпретациях рассмотренных в данном параграфе физических структур ранга (3,3) и (4,2).

Сразу отметим, что ни для одного из двух возможных вариантов физической структуры ранга (3,3), задаваемых метрическими функциями (11.1) и (11.2), содержательные интерпретации пока не найдены.

С другой стороны, для физической структуры ранга (4,2), задаваемой метрической функцией (11.24), найдены интерпретации не только в физике, но и в геометрии [1].

Рссмотрим сначала геометрическую оптику толстой линзы (см. [1], стр. 506-508). Ее формула внешне совпадает с известной еще из школьного курса физики формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}\ , \tag{11.35}$$

в которой a – расстояние вдоль главной оси от предмета, расположенного слева, до центра линзы, b – соответствующее расстояние от изображения, расположенного справа, также до ее центра и F – фокусное расстояние линзы, то есть расстояние от ее центра до той точки, в которой пересекаются все лучи, параллельные главной оси. У толстой линзы величины a, b имеют несколько иной смысл. Дело в том, что они отсчитываются вдоль главной оси не от центра линзы, а от двух главных плоскостей, параллельных центральной плоскости, но, в общем случае, не совпадающих ни с ней ни между собой. Пусть x – расстояние вдоль главной оси от предмета до ближайшей поверхности линзы, а λ – от нее до ближайшей главной плоскости. Тогда $a = x + \lambda$. Аналогично, пусть u – расстояние от изображения до ближайшей поверхности линзы, а σ – от нее до ближайшей главной плоскости. При построении соответствующего рисунка удобно брать двояковыпуклую линзу, тогда все введеные величины будут положительными по знаку и иметь очевидное геометрическое представление. Подставим приведенные выражения для величин a и b в формулу толстой линзы (11.35):

$$\frac{1}{x+\lambda} + \frac{1}{u+\sigma} = \frac{1}{F}\ ,$$

и разрешим ее относительно расстояния от линзы до изображения:

$$u = \frac{x(F-\sigma) + (\lambda+\sigma)F - \lambda\sigma}{x + \lambda - F} \ . \tag{11.36}$$

Рассмотрим теперь множество предметов $\mathfrak{M}$, изображеня которых мы будем строить, и множество толстых линз $\mathfrak{N}$, с помощью которых эти изображения строятся. Первое множество является одномерным многообразием, точки которого задаются координатой x, а второе – трехмерным, и его точки задаются координатами F, λ, σ, смысл которых разъяснен выше.

В законе (11.36), выведенном из формулы толстой линзы, связаны величины различной природы. Координата x будет характеризовать только предмет, при условии, конечно, что ближайшая к нему поверхность линзы будет проходить через одну и ту же точку главной оптической оси. Координатsы F, λ, σ будут характеризовать только линзу, в то время как величина u характеризует отношение предмета и линзы. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство запишем закон (11.36) для конкретного предмета $i \in \mathfrak{M}$ и конкретной линзы $\alpha \in \mathfrak{N}$:

$$u_{i\alpha} = \frac{x_i(F_\alpha - \sigma_\alpha) + (\lambda_\alpha + \sigma_\alpha)F_\alpha - \lambda_\alpha\sigma_\alpha}{x_i + \lambda_\alpha - F_\alpha} \ .$$

Феноменологическая симметрия закона (11.35) обнаружится сразу, если его привести к канонической форме (11.24) следующими заменами координат: $x \to x$, $F - \sigma \to \xi$, $(\lambda+\sigma)F - \lambda\sigma \to \eta$, $\lambda - F \to \vartheta$ и переменой обозначения измеряемой величины: $u \to f$. Тогда феноменологически симметричной формой закона (11.35) для толстой линзы будет уравнение (11.25).

Геометрическая интерпретация физической структуры ранга (4,2) строится следующим образом (см. [1], стр. 501-502). Пусть $\mathfrak{M}$ – однопараметрическое множество прямых на плоскости Евклида E^2, проходящих через начало координат, причем каждая прямая однозначно определяется углом φ между ней и осью абсцисс, причем $-\pi/2 < \varphi \leq +\pi/2$. Вторым пусть будет трехпараметрическое множество $\mathfrak{N}$ прямых, проходящих через точку $(a, b) \in E^2$ под углом θ к оси абсцисс, причем также $-\pi/2 < \theta \leq +\pi/2$. Двум прямым из этих множеств сопоставим величину, задаваемую выражением

$$f = \frac{-\dfrac{a}{\cos\theta}\mathrm{tg}\varphi + \dfrac{b}{\cos\theta}}{\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}\theta},$$

модуль которой, как нетрудно сообразить, равен расстоянию от точки их пересечения до точки (a, b). Вводя замены координат: $\mathrm{tg}\varphi \to x$, $-a/\cos\theta \to \xi$, $b/\cos\theta \to \eta$, $-\mathrm{tg}\theta \to \vartheta$, получаем метрическую функцию (11.24), задающую на одномерном и трехмерном многообразиях феноменологически симметричную геомерию двух множеств (физическую структуру) ранга (4,2).

§12. Некоторые примеры и задачи

Оказывается, что алгебру Ли группы движений геометрии двух множеств можно найти непосредственно по метрической функции, которая ее задает, не находя предварительно саму группу движений.

Пример 1. Найти алгебру Ли группы движений феноменологически симметричной геометрии двух множеств (физической структуры) ранга (3,2), задаваемой на одномерном и двумерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ метрической функцией

$$f = x\xi + \eta. \tag{12.1}$$

Решение. Общий вид операторов алгебры Ли групп преобразований каждого из многообразий в группе движений определяется следующими выражениями:

$$X = \lambda(x)\partial_x, \quad \Xi = \sigma(\xi,\eta)\partial_\xi + \rho(\xi,\eta)\partial_\eta, \tag{12.2}$$

причем метрическая функция $f = f(x,\xi,\eta)$ является решением дифференциальных уравнений

$$Xf + \Xi f = 0 \tag{12.3}$$

со всеми операторами (12.2) алгебр Ли. При известной метрической функции дифференциальные уравнения (12.3) превращаются в функциональные уравнения

$$\lambda(x)f_x + \sigma(\xi,\eta)f_\xi + \rho(\xi,\eta)f_\eta = 0 \tag{12.4}$$

относительно коэффициентов λ, σ, ρ этих операторов.

Подставим в уравнение (12.4) метрическую функцию (12.1): $\lambda\xi + \sigma x + \rho = 0$, откуда получаем $\lambda = -(\sigma x + \rho)/\xi$. Дифференцируя этот результат по переменной x, легко устанавливаем, что $\sigma/\xi = \mathrm{const}$, $\rho/\xi = \mathrm{const}$, так что, вводя удобные обозначения постоянных, находим выражения для всех трех коэффициентов операторов (12.2): $\lambda(x) = ax + b$, $\sigma(\xi,\eta) = -a\xi$, $\rho(\xi,\eta) = -b\xi$, а по ним и сами операторы:

$$X = (ax+b)\partial_x, \quad \Xi = -a\xi\partial_\xi - b\xi\partial_\eta. \tag{12.5}$$

Множество всех операторов (12.5) составляет линейное пространство, которое является двумерной алгеброй Ли, замкнутой относительно операции коммутирования. Базисные операторы этой алгебры определятся двумя линейно независимыми веторами (a,b), в качестве которых удобно взять векторы (0,1) и (1,0):

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x, \quad \Xi_1 = -\xi\partial_\eta, \quad \Xi_2 = -\xi\partial_\xi. \tag{12.6}$$

Заметим, что базисные операторы (12.6) можно найти и по группе движений (10.11) метрической функции (12.1). Действительно, учитывая, что покою соответствуют параметры $a = 1$, $b = 0$. положим $a = 1 + \alpha$, $b = \beta$ и запишем бесконечно малае движение (10.11) с точностью до величин первого порядка малости:

$$x' = x + \alpha x + \beta, \quad \xi' = \xi - \alpha\xi, \quad \eta' = \eta - \beta\xi,$$

откуда и получаются базисные операторы (12.6). Кроме того, при известных базисных операторах (12.6) дифференциальные уравнения (12.3) сведутся к системе двух независимых уравнений

$$X_1 f + \Xi_1 f = 0, \quad X_2 f + \Xi_2 f = 0, \tag{12.7}$$

решением которых является двухточечный инвариант группы движений, совпадающий с исходной метрической функцией (12.1) с точностью до масштабного преобразования.

Задача 1. Для следующих метрических функций:

$$f = x\xi + y, \tag{12.8}$$

$$f = x\xi + y\eta, \tag{12.9}$$

$$f = x\xi + y + \eta, \tag{12.10}$$

$$f = (x\xi + \eta)/(x + \vartheta), \tag{12.11}$$

$$f = (x\xi + y)/(z + \xi), \tag{12.12}$$

$$f = x\xi + y\eta + \vartheta, \tag{12.13}$$

$$f = x\xi + y\eta + z, \tag{12.14}$$

$$f = x\xi + y\eta + z\vartheta, \tag{12.15}$$

$$f = x\xi + y\eta + z + \vartheta, \tag{12.16}$$

задающих феноменологически симметричные геометрии двух множеств (физические структуры) различных рангов, *найти* базисные операторы алгебры Ли соответствующих групп движений и по ним *восстановить* метрическую функцию как двухточечный инвариант.

Указание к решению. Сначала надо выписать общее выражение для операторов X и Ξ, учитывая размерность многообразий, на которых задается геометрия двух множеств. Затем найти коэффициенты этих операторов, решая функциональное уравнение (12.3). Размерность алгебры должна совпасть с произведением размерностей многообразий. Далее, надо построить соответствующее число базисных операторов. Восстановление метрической функции как двухточечного инварианта производится по решению системы уравнений типа (12.7), число которых совпадает с числом базисных операторов. Смотри также доказательства теорем 4, 5, 7 из §11.

Задача 2. Для метрических функций: (12.13), (12.14), (12.15), (12.16), задающих физические структуры различных рангов, *найти* группу движений и соответствующую ей алгебру Ли преобразований тех многообразий, на которых задана физическая структура, а также *восстановить* метрическую функцию как двухточечный инвариант найденной группы движений.

Указание к решению. Записать уравнение движения, которое состоит из преобразований обоих многообразий, и подставиь их в условие сохранения метрической функции. Решить полученное функциональное уравнение. Рассмотреть бесконечно малое движение и найти базисные операторы соответствующих алгебр Ли. Затем по этим операторам записать и решить систему дифференциальных уравнений на метрическую функцию как двухточечный инвариант. Имеет смысл предварительно изучить методы решения подобных задач по доказательствам теорем 2 и 4 (или 3 и 5) из §11.

ГЛАВА III. Полиметрические физические структуры

§13. Полиметрические физические структуры, их феноменологическая и групповая симметрии

Изученные в первых двух главах геометрии были однометрическими, так как метрическая функция сопоставляла двум точкам только одно число. Однако можно привести физические примеры геометрий как на одном множестве, так и на двух, в которых метрическая функция сопоставляет паре точек не одно число, а несколько. Такие геометрии, с одной стороны, феноменологически симметричны, а с другой – наделены групповой симметрией, которая эквивалентна феноменологической.

Рассмотрим множество состояний некоторой термодинамической системы, задаваемых энтропией S и температурой T. Каждой паре состояний $< ij >$ сопоставим два числа, равные количествам тепла $Q^{TS}(ij)$ и $Q^{ST}(ij)$, которые система отдает внешним телам при ее переходе из состояния i в состояние j сначала по изотерме ($T = \mathrm{const}$), а затем по адиабате ($S = \mathrm{const}$), в первом случае – процесс TS и сначала по адиабате, а затем по изотерме, во втором – процесс ST:

$$Q^{TS}(ij) = (S_i - S_j)T_i, \quad Q^{ST}(ij) = (S_i - S_j)T_j. \tag{13.1}$$

Двухкомпонентная функция тепла $Q = (Q^{TS},\ Q^{ST})$ с выражениями (13.1) для ее компонент задает на плоскости (S, T) состояний термодинамической системы двуметрическую геометрию, которая, оказывается, феноменологически и в групповом смысле симметричной.

Возьмем на плоскости (S, T) три произвольные состояния $< ijk >$, порядок следования которых определяется записью тройки. Тогда дополнительно к двум количествам тепла (13.1) можно выписать еще четыре:

$$Q^{TS}(ik), \quad Q^{ST}(ik), \quad Q^{TS}(jk), \quad Q^{ST}(jk) \tag{13.1$'$}$$

для пар состояний $<ik>$, $<jk>$. Из шести величин (13.1), (13.1$'$) можно исключить все параметры S_i, T_i, S_j, T_j, S_k, T_k трех состояний i, j, k, в результате чего получаются две функциональные связи между ними, задаваемые двумя независимыми уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix} 0 & -Q^{ST}(ij) & -Q^{ST}(ik) \\ Q^{TS}(ij) & 0 & -Q^{ST}(jk) \\ Q^{TS}(ik) & Q^{TS}(jk) & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ \\ \begin{vmatrix} Q^{TS}(ij) & Q^{TS}(jk) & -Q^{ST}(ik) \\ Q^{TS}(ik) & 0 & -Q^{ST}(ik) \\ Q^{TS}(ik) & -Q^{ST}(ij) & -Q^{ST}(jk) \end{vmatrix} = 0. \end{array}\right\} \quad (13.2)$$

Соотношения (13.2), справедливые для любой тройки состояний $<ijk>$, выражают феноменологическую симметрию ранга 3 двуметрической геометрии, задаваемой на плоскости (S,T) двухкомпонентной функцией (13.1).

Группа движений метрической функции (13.1) состоит из всех тех преобразований

$$S' = \lambda(S,T), \quad T' = \sigma(S,T) \quad (13.3)$$

плоскости (S,T), которые удовлетворяют следующим двум функциональным уравнениям:

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(i) = (S_i - S_j)T_i, \\ (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(j) = (S_i - S_j)T_j, \end{array}\right\}$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(S_i, T_i)$, являющимся следствием инвариантности ее компонент. Решения этих уравнений легко находятся методом разделения переменных:

$$\lambda(S,T) = aS + b, \quad \sigma(S,T) = T/a, \quad (13.4)$$

где $a \neq 0$.

Множество всех преобразований (13.3) с решениями (13.4) является группой движений двухкомпонентной тепловой функции (13.1), определяя групповую симметрию степени 2 двуметрической геометрии, задаваемой на плоскости (S,T) этой функцией.

Простейший пример двуметрической физической структуры ранга (2,2) дает нам поступательное движение твердого тела с фиксированной по направлению осью вращения. Пусть на это тело оказывает воздействие ускоритель, который характеризуется силой F и моментом силы M. В результате твердое тело изменяет состояние движения. Ускорение поступательного движения a и угловое ускорение ε определяются из следующих уравнений:

$$a = F/m, \quad \varepsilon = M/I, \quad (13.5)$$

где m и I – масса и момент импульса твердого тела.

Замечаем, что закон вращательного движения подобен второму закону Ньютона для поступательного движения, в отношении которого мы уже знаем из §1, что он может быть записан в феноменологически симметричной форме:

$$a(i\alpha)a(j\beta) - a(i\beta)a(j\alpha) = 0, \quad (13.6)$$

то есть функция поступательного ускорения a задает на множестве тел и множестве ускорителей однометрическую физическую структуру ранга (2,2). Совершенно аналогично функция углового ускорения ε задает на тех же множествах параллельную однометрическую физическую структуру того же ранга, феноменологическая симметрия которой выражается подобным уравнением:

$$\varepsilon(i\alpha)\varepsilon(j\beta) - \varepsilon(i\beta)\varepsilon(j\alpha) = 0. \tag{13.7}$$

Таким образом, двухкомпонентная функция (a, ε) поступательного и углового ускорений на множестве тел и множестве ускорителей, каждое из которых является двумерным многообразием с координатами (m, I) и (F, M), задает *двуметрическую* физическую структуру ранга (2,2), причем ее феноменологическая симметрия выражается двумя уравнениями (13.6) и (13.7). Групповая же симметрия степени 2 определяется группами преобразований, сохраняющими оба ускорения:

$$m' = m/b, \quad I' = I/c, \quad F' = bF, \quad M' = cM, \tag{13.8}$$

где $b \neq 0,\ c \neq 0$ – непрерывные и независимые параметры.

Рассмотренный только что пример двуметрической физической структуры ранга (2,2) в математическом смысле представляет собой тривиальное наложение двух однометрических того же ранга. Забегая несколько вперед (см. §15), сообщим, что, кроме нее, имеется еще такая двуметрическая физическая структура ранга (2,2), которая не является наложением однометрических.

Перейдем к точным математическим определениям полиметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств (полиметрических физических структур) произвольного ранга.

Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, являющиеся sm-мерным и sn-мерным многообразиями, где s, m и n – натуральные числа, точки которых будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами соответственно, а также функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R^s$, сопоставляющая паре $< i\alpha > \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ из области ее определения $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ некоторую совокупность s вещественных чисел $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), \ldots, f^s(i\alpha)) \in R^s$. Заметим, что в общем случае $\mathfrak{S}_f \neq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, то есть функция f не всякой паре из $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляет s чисел, но в последующем изложении удобно в явной записи значения $f(i\alpha)$ этой функции для пары $<i\alpha>$ подразумевать, что $<i\alpha> \in \mathfrak{S}_f$. Обозначим через $U(i)$ и $U(\alpha)$ окрестности точек $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$, через $U(<i\alpha>)$ – окрестность пары $<i\alpha> \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ на себя или друг на друга.

Для некоторых кортежей $< \alpha_1 \ldots \alpha_m > \in \mathfrak{N}^m$ и $< i_1 \ldots i_n > \in \mathfrak{M}^n$ введем функции $f^m = f[\alpha_1 \ldots \alpha_m]$ и $f^n = f[i_1 \ldots i_n]$, сопоставляя точкам $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ точки $(f(i\alpha_1), \ldots, f(i\alpha_m)) \in R^{sm}$ и $(f(i_1\alpha), \ldots,\ f(i_n\alpha)) \in R^{sn}$, если пары $<i\alpha_1>, \ldots, <i\alpha_m>$ и $<i_1\alpha>, \ldots, <i_n\alpha>$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Заметим, что функции f^m и f^n не обязательно определены всюду на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. Область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ множество.

II. Функция f в области своего определения достаточно гладкая.

III. В $\mathfrak{N}^m$ и $\mathfrak{M}^n$ плотны множества таких кортежей длины m и n для которых функции f^m и f^n имеют максимальные ранги, равные sm и sn, в точках плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множеств соответственно.

Достаточная гладкость означает, что в области своего определения непрерывна как сама функция f, так и все ее производные достаточно высокого порядка. Гладкую функцию f, для которой выполняется условие III, будем называть *невырожденной.* Заметим также, что ограничения в аксиомах I, II, III открытыми и плотными подмножествами связано с тем, что исходные множества могут содержать исключительные подмножества меньшей размерности, где эти аксиомы не выполняются.

Введем еще функцию F, сопоставляя кортежу $< ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau >$ длины $m+n+2$ из $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ точку $(f(i\alpha), f(i\beta), \dots, f(v\tau)) \in R^{s(m+1)(n+1)}$, координаты которой в $R^{s(m+1)(n+1)}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью значений функции f для всех пар его элементов ($< i\alpha >$, $< i\beta >, \dots, < v\tau >$), если эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Область определения введенной функции есть, очевидно, открытое и плотное в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ множество, которое обозначим через $\mathfrak{S}_F$.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f = (f^1, \dots, f^s)$, удовлетворяющая аксиомам I, II, III, задает на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *s-метрическую физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга* $(n+1, m+1)$, если дополнительно выполняется следующая аксиома:

IY. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждого кортежа $<ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau>$ длины $m+n+2$ которого и некоторой его окрестности $U(<i \dots \tau>)$ найдется такая достаточно гладкая s-компонентная функция $\Phi : \mathcal{E} \to R^s$, определенная в некоторой области $\mathcal{E} \subset R^{s(m+1)(n+1)}$, содержащей точку $F(< i \dots \tau >)$, что в ней rang $\Phi = s$ и множество $F(U(< i \dots \tau >))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), \dots, f(v\tau)) = 0 \tag{13.9}$$

для всех кортежей из $U(<ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau>)$.

Аксиома IY составляет содержание принципа феноменологической симметрии. Уравнения (13.9) задают s функциональных связей между $s(m+1)(n+1)$ измеряемыми в опыте значениями физических величин $f = (f^1, \dots, f^s)$ и являются аналитическим выражением физического закона, записанного в феноменологически симметричной форме. Условие rang $\Phi = s$ означает, что уравнения $\Phi = 0$ (то есть $\Phi_1 = 0, \dots, \Phi_s = 0$) независимы.

Пусть $x = (x^1, \dots, x^{sm})$ и $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{sn})$ – локальные координаты в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Для исходной функции f в некоторой окрестности $U(i) \times U(\alpha)$ каждой пары $<i\alpha> \in \mathfrak{S}_f$ получаем тогда локальное координатное представление

$$f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha) = f(x_i^1, \dots, x_i^{sm}, \xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^{sn}), \tag{13.10}$$

свойства которого определяются аксиомами II и III. Поскольку по аксиоме III ранги функций f^m и f^n максимальны, координаты x и ξ входят в представление

(13.10) существенным образом. Последнее означает, что никакая гладкая локально обратимая замена координат не приведет к уменьшению их числа в представлении (13.10), то есть ни для какой локальной системы координат его невозможно записать в виде

$$f(i\alpha) = f(x_i^1, \ldots, x_i^{m'}, \xi_\alpha^1, \ldots, \xi_\alpha^{n'}),$$

где или $m' < sm$, или $n' < sn$. Действительно, если, например, $m' < sm$, то для любого кортежа $< \alpha_1 \ldots \alpha_m > \in (U(\alpha))^m$ длины m и для любой точки из $U(i)$ ранг функции $f^m = f[\alpha_1 \ldots \alpha_m]$ будет заведомо меньше sm, что противоречит аксиоме III. Заметим, однако, что существенная зависимость представления (13.10) от локальных коорддинат x_i и ξ_α еще не гарантирует выполнения аксиомы III. То есть при наличии всех координат в любом представлении (13.10) функция f может оказаться вырожденной.

Функцию $f = (f^1, \ldots, f^s)$ будем рассматривать как s-метрику в геометрии двух множеств. Но поскольку s расстояний $f(i\alpha)$ определены для точек разных множеств, обычные метрические аксиомы здесь не имеют смысла.

Используя представление (13.10), запишем локальное координатное задание для введенной выше функции F:

$$\left.\begin{array}{c} f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha), \\ f(i\beta) = f(x_i, \xi_\beta), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(v\tau) = f(x_v, \xi_\tau), \end{array}\right\} \tag{13.11}$$

функциональная матрица которого

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc} \dfrac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i} & 0 & ... & 0 & 0 & \dfrac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi_\alpha} & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & \dfrac{\partial f(v\tau)}{\partial x_v} & 0 & 0 & ... & 0 & \dfrac{\partial f(v\tau)}{\partial \xi_\tau} \end{array} \right\| \tag{13.12}$$

имеет $s(m+1)(n+1)$ строк и $s(2mn+m+n)$ столбцов. Здесь через $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial \xi$ кратко обозначены соответствующие функциональные матрицы для компонент функции $f = (f^1, \ldots, f^s)$ по координатам $x = (x^1, \ldots, x^{sm})$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{sn})$ соответственно:

$$\partial f/\partial x = \left\| \begin{array}{ccc} \partial f^1/\partial x^1 & \cdots & \partial f^1/\partial x^{sm} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial f^s/\partial x^1 & \cdots & \partial f^s/x^{sm} \end{array} \right\|,$$

$$\partial f/\partial \xi = \left\| \begin{array}{ccc} \partial f^1/\partial \xi^1 & \cdots & \partial f^1/\partial \xi^{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial f^s/\partial \xi^1 & \cdots & \partial f^s/\partial \xi^{sn} \end{array} \right\|.$$

Задание (13.11) для функции F представляет собой систему $s(m+1)(n+1)$ функций $f^1(i\alpha), \ldots, f^s(i\alpha), \ldots, f^1(v\tau), \ldots, f^s(v\tau)$, специальным образом зависящих от $s(2mn+m+n)$ переменных $x_i^1, \ldots, x_i^{sm}, \ldots, \xi_\tau^1, \ldots, \xi_\tau^{sn}$ – координат всех точек кортежа $<ijk...v, \alpha\beta\gamma...\tau>$ длины $m+n+2$. Поскольку число функций в системе (13.11) не больше общего числа переменных, наличие связи (13.9) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольных функций в этой системе.

Простые примеры геометрий одного и двух множеств показывают, что их феноменологическая и групповая симметрии взаимно обуславливают друг друга. Так, связь между шестью расстояниями для любых четырех точек в двумерной геометрии, не обязательно евклидовой, приводит к существованию в ней трехпараметрической группы движений. Но движение в геометрии двух множеств имеет свою специфику, отличную от привычных свойств движения в геометрии одного множества. Поэтому необходимо дать соответствующие точные определения.

Под локальным движением в геометрии двух множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ будем понимать такую пару взаимно однозначных гладких отображений (преобразований)

$$\lambda : U \to U' \quad \text{и} \quad \sigma : V \to V', \tag{13.13}$$

где $U, U' \subset \mathfrak{M}$ и $V, V' \subset \mathfrak{N}$ – открытые области, при которых функция f сохраняется. Последнее означает, что для каждой пары $<i\alpha> \in \mathfrak{S}_f$, такой что $i \in U,\ \alpha \in V$ и $<i'\alpha'> \in \mathfrak{S}_f$, где $i' = \lambda(i) \in U'$, $\alpha' = \sigma(\alpha) \in V'$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \sigma(\alpha)) = f(i\alpha), \tag{13.14}$$

выполняющееся для каждой из компонент $f^1, \ldots, f^s$ функции f.

Множество всех движений (13.13) есть локальная группа, для которой функция f, согласно равенству (13.14), является *двухточечным инвариантом.* Преобразования λ и σ в движениях (13.13) сами составляют две отдельные группы, а группа движений есть их взаимное расширение. Если функция f известна, например, в своем локальном координатном представлении (13.10), то равенство (13.14) представляет собой функциональное уравнение относительно преобразований λ и σ. Нам же о функции f известно только, что она невырождена и удовлетворяет некоторой системе s независимых уравнений (13.9). Но этого оказывается достаточно для установления факта существования группы ее движений, зависящей от smn параметров.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$, удовлетворяющая аксиомам I, II, III, задает на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *s-метрическую геометрию двух множеств, наделенную групповой симметрией степени smn*, если дополнительно выполняется следующая аксиома:

IY$'$. Существуют открытые и плотные в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множества, для всех точек i и α которых определены эффективные гладкие действия smn-мерной локальной группы Ли в некоторых окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$, такие что действия ее в окрестностях $U(i), U(j)$ и $U(\alpha), U(\beta)$ точек i, j и α, β совпадают в пересечениях $U(i) \cap U(j)$ и $U(\alpha) \cap U(\beta)$ и что функция f является двухточечным инвариантом по каждой из своих s компонент.

Напомним, что группы Ли преобразований гладких многообразий были описаны в §9 перед формулировкой аналогичной аксиомы IV$'$. Группы преобразований, о которых говорится в аксиоме IY$'$ настоящего параграфа, определяют своеобразную локальную подвижность жестких фигур ("твердых тел") в пространстве

$\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ с smn степенями свободы. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть. Множество пар $< i\alpha >$, для которых функция f определена и одновременно является двухточечным инвариантом, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.

Согласно аксиоме IY$'$, на открытых и плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множествах заданы smn-мерные линейные семейства гладких векторных полей X и Ξ, замкнутые относительно операции коммутирования, то есть алгебры Ли преобразований. В некоторых локальных системах координат в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ базисные векторные поля этих семейств запишем в операторной форме:

$$\left.\begin{array}{l} X_\omega = \lambda^\mu_\omega(x)\partial/\partial x^\mu, \\ \Xi_\omega = \sigma^\nu_\omega(\xi)\partial/\partial \xi^\nu, \end{array}\right\} \qquad (13.15)$$

где $\omega = 1, \ldots, smn$, а по "немым"индексам μ и ν производится суммирование от 1 до sm и от 1 до sn соответственно. По критерию инвариантности функция $f(i\alpha)$ будет инвариантом локальной группы преобразований некоторой окрестности $U(i) \times U(\alpha)$, то есть двухточечным инвариантом, в том и только в том случае, если она покомпонентно удовлетворяет системе smn уравнений

$$X_\omega(i)f(i\alpha) + \Xi_\omega(\alpha)f(i\alpha) = 0 \qquad (13.16)$$

с операторами (13.15):

$$\lambda^\mu_\omega(i)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x^\mu_i} + \sigma^\nu_\omega(\alpha)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi^\nu_\alpha} = 0, \qquad (13.17)$$

где $\lambda^\mu_\omega(i) = \lambda^\mu_\omega(x_i) = \lambda^\mu_\omega(x^1_i, \ldots, x^{sm}_i)$ и $\sigma^\nu_\omega(\alpha) = \sigma^\nu_\omega(\xi_\alpha) = \sigma^\nu_\omega(\xi^1_\alpha, \ldots, \xi^{sn}_\alpha)$.

Теорема 1. *Если функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$, удовлетворяющая аксиомам I,II,III, задает на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ s-метрическую геометрию двух множеств, наделенную групповой симметрией степени smn, то она на тех же многообразиях задает s-метрическую физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга $(n+1, m+1)$.*

Теорема 2. *Если функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$, удовлетворяющая аксиомам* I,II,III, *задает на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ s-метрическую физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга $(n+1, m+1)$, то она на тех же многообразиях задает s-метрическую геометрию двух множеств, наделенную групповой симметрией степени smn.*

Полные доказательства сформулированных выше теорем 1 и 2, каждая из которых является обратной по отношению к другой, можно найти в §1 монографии [2]. Их следствием является вывод об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий полиметрической геометрии двух множеств, задаваемой на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ s-компонентной метрической функциией $f = (f^1, \ldots, f^s)$.

Теорема 3. *Для того, чтобы функция* $f = (f^1, \ldots, f^s)$, *удовлетворяющая аксиомам* I, II, III, *задавала на* sm*-мерном и* sn*-мерном многообразиях* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ s*-метрическую геометрию двух множеств, наделенную групповой симметрией степени* smn, *необходимо и достаточно, чтобы она на тех же многообразиях задавала* s*-метрическую физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга* $(n + 1, m + 1)$.

В §10 для $s = 1$ и произвольных $m \geq 1$ и $n \geq 1$, таких что $m \leq n$, приведены все канонические выражения для функции f, задающей на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ однометрическую физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$, а также группы их движений как решения уравнения (10.9).

Заметим, что для s-метрических физических структур ранга $(n + 1, m + 1)$ в случае $s \geq 2$ полная классификация еще не построена. Однако и по ним получены некоторые предварительные результаты. В частности, устанавливаемая теоремой 3 эквивалентность феноменологической и групповой симметрий была использована [13] при построении классификации двуметрических физических структур ранга $(n + 1, 2)$, то есть для случая $s = 2$, $m = 1$ и $n \geq 1$. Эта классификация приведенна в §15. Кроме того, поскольку простейшие триметрические физические структуры ранга (2,2) допускают трехмерные группы движений, оказалось возможным по имеющейся классификации трехмерных алгебр Ли преобразований пространства [14] построить в §16 их классификацию.

Особый интерес представляют комплексные физические структуры. Ю.С. Владимировым [15] такая структура ранга (3,3) использовалась для обоснования размерности и сигнатуры классического пространства-времени. Комплексные физические структуры более высокого ранга были применены им для построения единой теории физических взаимодействий.

С математической точки зрения комплексные физические структуры есть частный случай вещественных двуметрических. Поэтому, если бы была построена полная классификация последних, то по ней можно было бы воспроизвести соответствующую классификацию первых. Комплексные физические структуры могут быть также получены из вещественных однометрических с помощью комплексификации, состоящей в замене вещественных координат и функций комплексными. Однако нет гарантии того, что получающаяся при этом классификация окажется полной.

§14. Метрическая функция как двухточечный инвариант

Согласно итоговой теореме 3 из предыдущего §13 s-компонентная метрическая функция (13.10), задающая на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга $(n+1, m+1)$, допускает smn-мерную группу движений (13.13), относительно которой она является двухточечным инвариантом, удовлетворяя по каждой своей компоненте функциональному уравнению (13.14), из которого получается система дифференциальных уравнений (13.16) с операторами (13.15), то есть система (13.17).

В настоящем параграфе будет более подробно разъяснен переход от функционалного уравнения (13.14) к системе дифференциальных (13.17), причем станет более понятным возникновение инфинитезимальных операторов (13.15).

Перепишем все перечисленные выше выражения и уравнения, опуская индексы i и α, смысл которых состоит в указании конкретных точек многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Метрическая функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$, имеющая s компонент, тогда в своем координатном представлении запишется так:

$$f = f(x, \xi), \tag{14.1}$$

где $x = (x^1, \ldots, x^{sm})$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{sn})$.

Группа движений, относительнл которой эта функция является двухточечным инвариантом, состоит из групп преобразований обоих многообразий:

$$x' = \lambda(x, a), \quad \xi' = \sigma(\xi, a), \tag{14.2}$$

зависящих от smn непрерывных параметров $a = (a^1, \ldots, a^{smn})$.

Будем предполагать, что нулевым значениям этих параметров соответствует покой, состоящий из тождественных преобразований:

$$x' = \lambda(x, 0) = x, \quad \xi' = \sigma(\xi, 0) = \xi, \tag{14.3}$$

а бесконечно малые (инфинитезимальное) движения, близкие к покою, с точностью до малых величин первого порядка при разложении в ряд Тейлора запишутся в следующем виде:

$$x' = x + \lambda(x)a, \quad \xi' = \xi + \sigma(\xi)a, \tag{14.4}$$

где $\lambda(x) = \partial\lambda(x, a)/\partial a|_{a=0}$, $\sigma(\xi) = \partial\sigma(\xi, a)/\partial a|_{a=0}$.

В более подробной записи с учетом того, что в общем случае число координат x, ξ и параметров a отлично от 1, для бесконечно малых движений (14.4) получим следующие уравнения:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \lambda^{\mu}_{\omega}(x)a^{\omega}, \quad \xi'^{\nu} = \xi^{\nu} + \sigma^{\nu}_{\omega}(\xi)a^{\omega}, \tag{14.5}$$

где $\mu = 1, \ldots, sm$, $\nu = 1, \ldots, sn$, а по немому индексу ω производится суммирование в пределах $1, \ldots, smn$.

Каждая компонента метрической функции (14.1) сохраняется, удовлетворяя равенству

$$f(x', \xi') = f(x, \xi). \tag{14.6}$$

Если группа движений (14.2) известна, то равенство (14.6) представляет собой функциональное уравнение на метрическую функцию, которая является ее двухточечным инвариантом. Для произвольной метрической функции множество таких инвариатов содержит, конечно, метрическую функцию, но, в общем случае, может сильно от нее отличаться. Если же метрическая функция задает физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$, то любой двухточечный инвариант совпадает с ней с точностью до масштабного преобразования.

Подставим в функциональное уравнение (14.6) бесконечно малые движения (14.5), продифференцируем его один раз по каждому из smn параметров $a = (a^1, \ldots, a^{smn})$ и придадим им нулевые значения, соответствующие покою:

$$\lambda^\mu_\omega(x)\partial f/\partial x^\mu + \sigma^\nu_\omega(\xi)\partial f/\partial \xi^\nu = 0, \tag{14.7}$$

где $\lambda^\mu_\omega(x) = \lambda^\mu_\omega(x^1, \ldots, x^{sm})$, $\sigma^\nu_\omega(\xi) = \sigma^\nu_\omega(\xi^1, \ldots, x^{sn})$, $\omega = 1, \ldots, smn$, а по немым индексам μ и ν производится суммирование в пределах $1, \ldots, sm$ и $1, \ldots, sn$ соответственно.

Таким образом, сделан переход от функционального уравнения (14.6) к системе дифференциальных уравнений (14.7), каждое из которых линейное однородное в частных производных первого порядка. Эта система совпадает с системой (13.17), если в ней опустить обозначения конкретных точек i и α, и может быть записана в операторной форме

$$X_\omega f + \Xi_\omega f = 0, \tag{14.8}$$

если ввести операторы

$$X_\omega = \lambda^\mu_\omega(x)\partial/\partial x^\mu, \quad \Xi_\omega = \sigma^\nu_\omega(\xi)\partial/\partial \xi^\nu. \tag{14.9}$$

Системы линейных операторов (14.9) составляют естестественные координатные базисы двух изоморфных с точностью до совпадения структурных констант smn-мерных алгебр Ли преобразований (14.2) sm-мерного и sn-мерного иногообразий. Произвольные операторы

$$X = \lambda^\mu(x)\partial/\partial x^\mu, \quad \Xi = \sigma^\nu(\xi)\partial/\partial \xi^\nu \tag{14.10}$$

этих алгебр Ли являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами базисных операторов (14.9), причем метрическая функция должна удовлетворять любому уравнению

$$Xf + \Xi f = 0 \tag{14.11}$$

с этими операторами.

При известной метрической функции f дифференциальное уравнение (14.11) становится функциональным относительно кооэффициентов $\lambda^\mu(x)$ и $\sigma^\nu(\xi)$ операторов (14.10). Напомним, что при известной метрической функции условие инвариантности (14.6) становится функциональным уравнением на движения

$$x' = \lambda(x), \quad \xi' = \sigma(\xi), \tag{14.12}$$

множество которых является smn-параметрической группой (14.2).

В заключение отметим, что система уравнений (14.7) является необходтмым следствием условия (14.6), согласно которому метрическая функция (14.1) сохраняется при преобразованиях из групп (14.2). То есть всякий двухточечный инвариант есть решение системы (14.7). С другой стороны, согласно инфинитезимальному критерию инвариантности (см. [7], стр. 229) всякое решение системы (14.7) удовлетворяет функциональному уравнению (14.6), то есть следствие (14.7) является для инвариантности метрической функции условием не только необходимым, но и достаточным.

§15. Двуметрические физические структуры ранга (n+1,2)

Краткое определение двуметрической физической структуры (феноменологически симметричной геометрии двух множеств) ранга $(n+1,2)$ получается из соответствующего общего определения s-метрической физической структуры ранга $(n+1,m+1)$, данного в начале §13, если положить $s=2$ и $m=1$.

Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, являющиеся 2-мерным и $2n$-мерным многообразиями соответственно, где n – натуральное число. Обозначим локальные координаты в этих многообразиях через $x=(x^1,x^2)$ и $\xi=(\xi^1,\dots,\xi^{2n})$. Пусть также имеется функция f с открытой и плотной в $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ областью определения $\mathfrak{S}_f$, сопоставляющая каждой паре из нее два вещественных числа, то есть $f:\mathfrak{S}_f\to R^2$. Двухкомпонентную функцию $f=(f^1,f^2)$ будем называть *двуметрикой.* Предполагается, что локальное координатное представление этой двуметрики задается достаточно гладкой невырожденной функцией

$$f=f(x,\xi)=f(x^1,x^2,\xi^1,\dots,\xi^{2n}), \tag{15.1}$$

выражение для которой получается из выражения (13.10) при $s=2$ и $m=1$. Невырожденность двуметрики (15.1) понимается в смысле аксиомы III из §13 и, вообще говоря, в отличие от случая $s=1$, то есть однометрических физических структур, означает нечто большее, чем просто ее существенную зависимость от координат $x=(x^1,x^2)$ и $\xi=(\xi^1,\dots,\xi^{2n})$. А именно, должны быть отличны от нуля якобианы $\partial f(i\alpha)/\partial x_i$ и $\partial(f(i_1\alpha),\dots,f(i_n\alpha))/\partial\xi_\alpha$ для плотных множеств пар $<i\alpha>\in\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ и кортежей $<i_1\dots i_n,\alpha>\in\mathfrak{M}^n\times\mathfrak{N}$ длины $n+1$.

Далее строим функцию F с естественной в $\mathfrak{M}^{n+1}\times\mathfrak{N}^2$ областью определения $\mathfrak{S}_F$, сопоставляя каждому кортежу длины $n+3$ из $\mathfrak{S}_F$ все $4(n+1)$ возможные по двуметрике $f=(f^1,f^2)$ расстояния. Будем говорить, что двухкомпонентная функция f с локальным координатным представлением (15.1) задает на 2-мерном и $2n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *двуметрическую физическую структуру* (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) *ранга* $(n+1,2)$, если локально множество значений $F(\mathfrak{S}_F)$ в $R^{4(n+1)}$ принадлежит множеству нулей некоторой достаточно гладкой двухкомпонентной функции $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ с независимыми компонентами Φ_1 и Φ_2, то есть имеет место уравнение

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), \ldots, f(v\alpha), f(v\beta)) = 0 \tag{15.2}$$

для всех кортежей $< ijk \ldots v, \alpha\beta >$ из некоторого плотного и открытого в $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^2$ множества. Таким образом, локально множество $F(\mathfrak{S}_F)$ принадлежит некоторой регулярной коразмерности 2 поверхности в $R^{4(n+1)}$, не обязательно совпадая с ней.

Заметим, что не всякая двухкомпонентная функция $f = (f^1, f^2)$ может задавать двуметрическую физическую структуру и потому основной задачей теории является их полная классификация, которая, как обычно, проводится с точностью до масштабного преобразования, в данном случае двумерного, и возможности выбора в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ любых допустимых систем локальных координат.

Теорема. *Двуметрические физические структуры (феноменологически симметричные геометрии двух множеств) ранга $(n+1, 2)$ существуют только для $n = 1, 2, 3, 4$, то есть ранга $(2, 2), (3, 2), (4, 2)$, $(5, 2)$, и не существуют для $n \geq 5$, то есть ранга $(6, 2), (7, 2)$ и т.д. С точностью до масштабного преобразования функция $f = (f^1, f^2)$, задающая на 2-мерном и $2n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ двуметрическую физическую структуру ранга $(n+1, 2)$, в надлежаще выбранных в них системах локальных координат $x = (x^1, x^2) = (x, y)$ и $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \ldots) = (\xi, \eta, \mu, \nu, \ldots)$ определяется следующими каноническими выражениями:*

для $n = 1$, то есть ранга $(2, 2)$:

$$f^1 = x + \xi, \;\; f^2 = y + \eta, \tag{15.3}$$

$$f^1 = (x + \xi)y, \;\; f^2 = (x + \xi)\eta; \tag{15.4}$$

для $n = 2$, то есть ранга $(3, 2)$:

$$f^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + \mu, \;\; f^2 = x\eta + y\xi + \nu, \;\; \varepsilon = 0, \pm 1, \tag{15.5}$$

$$f^1 = x\xi + \mu, \;\; f^2 = x\eta + y\xi^c + \nu, \;\; c \neq 1, \tag{15.6}$$

$$f^1 = x\xi + \mu, \;\; f^2 = x\eta + y\xi^2 + x^2\xi^2 \ln \xi + \nu, \tag{15.7}$$

$$f^1 = x\xi + y\mu, \;\; f^2 = x\eta + y\nu; \tag{15.8}$$

для $n = 3$, то есть ранга $(4, 2)$:

$$\left. \begin{aligned} f^1 &= \frac{(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu)(x + \rho) - \varepsilon(x\eta + y\xi + \nu)(y + \tau)}{(x + \rho)^2 - \varepsilon(y + \tau)^2}, \\ f^2 &= \frac{(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu)(y + \tau) - (x\eta + y\xi + \nu)(x + \rho)}{(x + \rho)^2 - \varepsilon(y + \tau)^2}, \end{aligned} \right\} \tag{15.9}$$

где $\varepsilon = 0, \pm 1$,

$$f^1 = \frac{x\xi + \mu}{x + \rho},\ f^2 = \frac{x\eta + y\nu + \tau}{x + \rho}, \tag{15.10}$$

$$f^1 = x\xi + y\mu + \rho,\ f^2 = x\eta + y\nu + \tau; \tag{15.11}$$

для $n = 4$, *то есть ранга* $(5, 2)$*:*

$$f^1 = \frac{x\xi + y\mu + \rho}{x\varphi + y + \omega},\ f^2 = \frac{x\eta + y\nu + \tau}{x\varphi + y + \omega}. \tag{15.12}$$

Доказательство только что сформулированной теоремы можно найти в §7 монографии [2], а также в работе [13].

Обратимся теперь к уравнению (15.2), которое выражает феноменологическую симметрию двуметрической физической структуры ранга $(n + 1, 2)$. Выпишем его для каждой из двуметрик (15.3) – (15.12) соответственно:

для двуметрики (15.3):

$$\left.\begin{aligned} &f^1(i\alpha) - f^1(i\beta) - f^1(j\alpha) + f^1(j\beta) = 0,\\ &f^2(i\alpha) - f^2(i\beta) - f^2(j\alpha) + f^2(j\beta) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{15.3$'$}$$

для двуметрики (15.4):

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) - f^1(i\beta) & f^1(i\alpha)f^2(j\alpha) \\ f^1(j\alpha) - f^1(j\beta) & f^1(j\alpha)f^2(i\alpha) \end{vmatrix} = 0,\\ &\begin{vmatrix} f^2(i\alpha) - f^2(j\alpha) & f^2(i\alpha)f^1(i\beta) \\ f^2(i\beta) - f^2(j\beta) & f^2(i\beta)f^1(i\alpha) \end{vmatrix} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{15.4$'$}$$

для двуметрики (15.5):

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon \begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^2(i\beta) & 1 \\ f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) & 1 \\ f^2(k\alpha) & f^2(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0,\\ &\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^2(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\beta) & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^2(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^2(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{15.5$'$}$$

для двуметрики (15.6):

$$\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\frac{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{(f^1(i\alpha) - f^1(j\alpha))^{c+1}} = 0, \quad \begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{15.6$'$}$$

где $\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)$ – оператор альтернирования (антисимметризации) по элементам α, β, то есть $\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha\beta) - \varphi(\beta\alpha)$;

для двуметрики (15.7):

$$\left.\begin{array}{c}
\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\[2ex]
\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\dfrac{1}{(f^1(i\alpha) - f^1(j\alpha))^3}\{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \end{vmatrix} - \\[2ex]
-\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & (f^1(i\alpha))^2 & 1 \\ f^1(j\alpha) & (f^1(j\alpha))^2 & 1 \\ f^1(k\alpha) & (f^1(k\alpha))^2 & 1 \end{vmatrix} \ln[f^1(i\alpha) - f^1(j\alpha)]\} = 0;
\end{array}\right\} \qquad (15.7')$$

для двуметрики (15.8):

$$\left.\begin{array}{c}
\hat{\mathbf{R}}(ij)\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) \\ f^2(k\alpha) & f^2(k\beta) \end{vmatrix} = 0, \\[2ex]
\hat{\mathbf{R}}(ik)\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f^2(k\alpha) & f^2(k\beta) \\ f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) \end{vmatrix} = 0;
\end{array}\right\} \qquad (15.8')$$

для двуметрики (15.9) уравнение (15.2) можно получить комплексификацией уравнения

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (15.9')$$

полагая в нем $f = f^1 + ef^2$, где $e^2 = \varepsilon = 0, \pm 1$, и отделяя затем реальную и мнимую части;

для двуметрики (15.10):

$$\left.\begin{array}{c}
\hat{R}(\alpha\beta)\dfrac{(f^1(j\alpha) - f^1(l\alpha))(f^1(i\alpha) - f^1(k\alpha))}{(f^1(i\alpha) - f^1(l\alpha))(f^1(j\alpha) - f^1(k\alpha))} = 0, \\[2ex]
\hat{R}(\alpha\beta)\dfrac{f^1(j\alpha) - f^1(l\alpha)}{f^1(i\alpha) - f^1(l\alpha)} \times \\[2ex]
\times\dfrac{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(k\alpha) - f^1(l\alpha) \\ f^2(i\alpha) & f^2(k\alpha) - f^2(l\alpha) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f^1(k\alpha) & f^1(l\alpha) \\ f^2(k\alpha) & f^2(l\alpha) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^1(k\alpha) - f^1(l\alpha) \\ f^2(j\alpha) & f^2(k\alpha) - f^2(l\alpha) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f^1(k\alpha) & f^1(l\alpha) \\ f^2(k\alpha) & f^2(l\alpha) \end{vmatrix}} = 0;
\end{array}\right\} \qquad (15.10')$$

для двуметрики (15.11):

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{\hat{R}}(ij)\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1\\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1\\ f^1(l\alpha) & f^1(l\beta) & 1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) & 1\\ f^2(k\alpha) & f^2(k\beta) & 1\\ f^2(l\alpha) & f^2(l\beta) & 1\end{vmatrix}=0,\\
&\mathbf{\hat{R}}(kl)\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1\\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1\\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^2(i\beta) & 1\\ f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) & 1\\ f^2(l\alpha) & f^2(l\beta) & 1\end{vmatrix}=0;
\end{aligned}\right\}\tag{15.11$'$}$$

для последней двуметрики (15.12), задающей единственную физическую структуру ранга (5,2):

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{R}(\alpha\beta)\frac{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1\\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1\\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1\\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1\\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1\end{vmatrix}}\cdot\frac{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1\\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1\\ f^1(m\alpha) & f^2(m\alpha) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1\\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1\\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1\end{vmatrix}}=0,\\
&\hat{R}(\alpha\beta)\frac{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1\\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1\\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1\\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1\\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1\end{vmatrix}}\cdot\frac{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1\\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1\\ f^1(m\alpha) & f^2(m\alpha) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1\\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1\\ f^1(m\alpha) & f^2(m\alpha) & 1\end{vmatrix}}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{15.12$'$}$$

Полная классификация двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств ранга $(n+1, m+1)$ для $n \geq m \geq 2$ еще не проведена.

§16. Триметрические физические структуры ранга (2,2)

По определению s-метрической физической структуры (феноменологически симметричной геометрии двух множеств) ранга $(n+1, m+1)$, данному в §13, триметрическая структура ранга (2,2), для которой $s = 3,\ m = 1,\ n = 1$, задается трехкомпонентной функцией $f = (f^1, f^2, f^3)$ на 3-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Обозначим локальные координаты в этих многообразиях через x, y, z и ξ, η, ϑ. Тогда координатное представление триметрики f запишется в следующем виде:

$$f = f(x, y, z, \xi, \eta, \vartheta), \tag{16.1}$$

причем для конкретной пары $<i\alpha>$ из области ее определения $\mathfrak{S}_f$ будем иметь:

$$f(i\alpha) = f(x_i, y_i, z_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \vartheta_\alpha). \tag{16.1$'$}$$

Невырожденность триметрики (16.1) означает отличие от нуля двух якобианов:

$$\frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^3(i\alpha))}{\partial(x_i, y_i, z_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^3(i\alpha))}{\partial(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \vartheta_\alpha)} \neq 0 \tag{16.2}$$

для плотных множеств пар $<i\alpha> \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.

Феноменологическая симметрия рассматриваемой геометрии двух множеств выражается уравнением

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) = 0, \tag{16.3}$$

в котором независимы все три компоненты функции $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$. А это означает, что множества значений функции $F : \mathfrak{S}_F \to R^{12}$, где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^3$ – естественная область ее определения, локально принадлежит девятимерной поверхности в R^{12}, задаваемой тремя уравнениями $\Phi = 0$.

По теореме 2 из §13 функция (16.1), задающая на 3-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ триметрическую физическую структуру ранга (2,2), допускает трехмерную группу движений, состоящую из двух действий группы G^3 в них. Выпишем явно действия этой группы в $\mathfrak{M}$:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \\ y' &= \sigma(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \\ z' &= \tau(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \end{aligned}\right\} \tag{16.4}$$

где $(a^1, a^2, a^3) \in G^3$. Ее действие во втором многообразии $\mathfrak{N}$ записывается аналогично:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \tilde{\lambda}(\xi, \eta, \vartheta; a^1, a^2, a^3), \\ \eta' &= \tilde{\sigma}(\xi, \eta, \vartheta; a^1, a^2, a^3), \\ \vartheta' &= \tilde{\tau}(\xi, \eta, \vartheta; a^1, a^2, a^3), \end{aligned}\right\} \tag{16.4$'$}$$

причем функции $\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau}$, задающие это действие, не обязательно совпадают с функциями λ, σ, τ в действии (16.4). Но если действия (16.4) и (16.4$'$) эквивалентны, то всегда можно найти такие системы координат в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, для которых $\lambda = \tilde{\lambda},\ \sigma = \tilde{\sigma},\ \tau = \tilde{\tau}$.

Инвариантность триметрики (16.1) относительно группы движений, состоящей из действий (16.4) и (16.4$'$), означает ее сохранение согласно уравнению

$$f(x', y', z', \xi', \eta', \vartheta') = f(x, y, z, \xi, \eta, \vartheta), \tag{16.5}$$

которое для каждой ее компоненты f^1, f^2, f^3 выполняется тождественно по координатам точек многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, а также параметрам a^1, a^2, a^3 группы G^3.

Теорема. *С точностью до масштабного преобразования метрическая функция $f = (f^1, f^2, f^3)$, задающая на 3-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ триметрическую физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию* *двух множеств) ранга* $(2,2)$, *в надлежаще выбранных в них системах локальных координат* x, y, z *и* ξ, η, ϑ *определяется следующими одиннадцатью каноническими выражениями:*

$$f^1 = x + \xi,\ f^2 = y + \eta,\ f^3 = z + \vartheta; \tag{16.6}$$

$$f^1 = y - \eta,\ f^2 = (x+\xi)y + z + \vartheta,\ f^3 = (x+\xi)\eta + z + \vartheta; \tag{16.7}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= (x+\xi)^2 \exp(2\frac{y+\eta}{x+\xi}), \\ f^2 &= (x+\xi)z,\ f^3 = (x+\xi)\vartheta; \end{aligned}\right\} \tag{16.8}$$

$$f^1 = \frac{x+\xi}{y+\eta},\ f^2 = (x+\xi)z,\ f^3 = (x+\xi)\vartheta; \tag{16.9}$$

$$f^1 = (x+\xi)(y+\eta),\ f^2 = (x+\xi)z,\ f^3 = (x+\xi)\vartheta; \tag{16.10}$$

$$f^1 = y + \eta,\ f^2 = (x+\xi)z,\ f^3 = (x+\xi)\vartheta; \tag{16.11}$$

$$f^1 = \frac{(x+\xi)^p}{y+\eta},\ f^2 = (x+\xi)z,\ f^3 = (x+\xi)\vartheta; \tag{16.12}$$

$$\left.\begin{aligned} &f^1 = (x+\xi)^2 + (y+\eta)^2, \\ &f^2 = z + arctg\frac{y+\eta}{x+\xi}, \quad f^3 = \vartheta + arctg\frac{y+\eta}{x+\xi}; \end{aligned}\right\} \tag{16.13}$$

$$\left.\begin{aligned} &f^1 = ((x+\xi)^2 + (y+\eta)^2)\exp(2\gamma arctg\frac{y+\eta}{x+\xi}), \\ &f^2 = z + arctg\frac{y+\eta}{x+\xi}, \quad f^3 = \vartheta + arctg\frac{y+\eta}{x+\xi}; \end{aligned}\right\} \tag{16.14}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= \sin y \sin\eta \cos(x+\xi) + \cos y \cos\eta, \\ f^2 &= z + \arcsin\frac{\sin(x+\xi)\sin\eta}{\sqrt{1-(f^1)^2}}, \\ f^3 &= \vartheta + \arcsin\frac{\sin(x+\xi)\sin y}{\sqrt{1-(f^1)^2}}; \end{aligned}\right\} \tag{16.15}$$

$$f^1=(x+\xi)y\eta, \quad f^2=z+\frac{1}{(x+\xi)y^2}, \quad f^3=\vartheta+\frac{1}{(x+\xi)\eta^2}, \tag{16.16}$$

где $0<|p|<1$ *и* $0<\gamma<\infty$.

Доказательство этой теоремы можно найти в §8 монографии [2]. Дополнительно отметим, что самая сложная по структуре триметрика (16.15) с точностью до масштабного преобразования и замен координат в трехмерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ может быть записана еще в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} f^1&=x\sqrt{1-\xi^2-\eta^2-\vartheta^2}-\xi\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}+z\eta-y\vartheta,\\ f^2&=y\sqrt{1-\xi^2-\eta^2-\vartheta^2}-\eta\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}+x\vartheta-z\xi,\\ f^3&=z\sqrt{1-\xi^2-\eta^2-\vartheta^2}-\vartheta\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}+y\xi-x\eta, \end{aligned}\right\} \tag{16.17}$$

Перейдем теперь к уравнению (16.3), выражающему феноменологическую симметрию триметрических физических структур ранга (2,2), задаваемых на трехмерных многообразиях метрическими функциями (16.6)–(16.16):

для триметрики (16.6):

$$\left.\begin{aligned} f^1(i\alpha)-f^1(i\beta)-f^1(j\alpha)+f^1(j\beta)=0,\\ f^2(i\alpha)-f^2(i\beta)-f^2(j\alpha)+f^2(j\beta)=0,\\ f^3(i\alpha)-f^3(i\beta)-f^3(j\alpha)+f^3(j\beta)=0; \end{aligned}\right\} \tag{16.6$'$}$$

для триметрики (16.7):

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & a(i\alpha) & a(i\beta)\\ 1 & a(j\alpha) & a(j\beta) \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & b(i\alpha) & b(i\beta)\\ 1 & b(j\alpha) & b(j\beta) \end{vmatrix}=0,\\ &\begin{vmatrix} a(i\alpha) & b(i\alpha) & 1\\ a(j\alpha) & b(j\alpha) & 1\\ a(j\beta) & b(j\beta) & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & c(i\alpha) & c(i\beta)\\ 1 & c(j\alpha) & c(j\beta) \end{vmatrix}=0, \end{aligned}\right\} \tag{16.7$'$}$$

где $a=f^1,\ b=(f^2-f^3)/f^1,\ c=f^2+f^3$.

для триметрики (16.8):

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha)\\ a(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} c(i\alpha) & c(i\beta)\\ c(j\alpha) & c(j\beta) \end{vmatrix}=0,\\ &\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\{\begin{vmatrix} b(i\alpha) & c(i\alpha)\\ b(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha)\ln c(i\alpha)\\ a(j\alpha) & c(j\alpha)\ln c(j\alpha) \end{vmatrix}\}=0, \end{aligned}\right\} \tag{16.8$'$}$$

где $a = \sqrt{f^2 f^3}$, $b = \sqrt{f^2 f^3} \ln \sqrt{f^1/f^2 f^3}$, $c = \sqrt{f^2/f^3}$ и $\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)$ – оператор альтернирования (антисимметризации) по элементам α, β;

для триметрики (16.9):

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha) \\ a(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix} = 0, \ \begin{vmatrix} c(i\alpha) & c(j\alpha) \\ c(i\beta) & c(j\beta) \end{vmatrix} = 0, \\ \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\begin{vmatrix} b(i\alpha) & c(i\alpha) \\ b(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{16.9'}$$

где $a = \sqrt{f^2 f^3}$, $b = \sqrt{f^2 f^3}/f^1$, $c = \sqrt{f^2/f^3}$;

для триметрики (16.10):

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha) \\ a(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix} = 0, \ \begin{vmatrix} c(i\alpha) & c(j\alpha) \\ c(i\beta) & c(j\beta) \end{vmatrix} = 0, \\ \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\begin{vmatrix} b(i\alpha) & 1/c(i\alpha) \\ b(j\alpha) & 1/c(j\alpha) \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{16.10'}$$

где $a = \sqrt{f^2 f^3}$, $b = f^1/\sqrt{f^2 f^3}$, $c = \sqrt{f^2/f^3}$;

для триметрики (16.11):

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha) \\ a(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix} = 0, \ \begin{vmatrix} c(i\alpha) & c(j\alpha) \\ c(i\beta) & c(j\beta) \end{vmatrix} = 0, \\ \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\begin{vmatrix} b(i\alpha) & 1 \\ b(j\alpha) & 1 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{16.11'}$$

где $a = \sqrt{f^2 f^3}$, $b = f^1$, $c = \sqrt{f^2/f^3}$;

для триметрики (16.12):

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha) \\ a(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix} = 0, \ \begin{vmatrix} c(i\alpha) & c(j\alpha) \\ c(i\beta) & c(j\beta) \end{vmatrix} = 0, \\ \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\begin{vmatrix} b(i\alpha) & c^p(i\alpha) \\ b(j\alpha) & c^p(j\alpha) \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{16.12'}$$

где $a = \sqrt{f^2 f^3}$, $b = (\sqrt{f^2 f^3})^p/f^1$, $c = \sqrt{f^2/f^3}$;

для триметрик (16.13), (16.14) и (16.15) уравнения (16.3) еще не найдены;

для триметрики (16.16):

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha) \\ a(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix} = 0, \\ \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\frac{1}{a(j\alpha)}[b(j\alpha)\begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha) \\ a(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix} - a(i\alpha)] = 0. \\ \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\{\frac{a(i\alpha)+b(i\alpha)}{a(i\alpha)a(j\alpha)}[b(j\alpha)\begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha) \\ a(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix} - a(i\alpha)] + \frac{b(j\alpha)}{a(i\alpha)}\} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{16.16'}$$

где $a = f^1,\ b = f^1 f^2,\ c = f^1 f^3$.

§17. Некоторые примеры и задачи

Полиметрические физические структуры представляют возможность сформулировать большое число учебных и исследовательских задач, которые могут быть решены аналитическими методами с использованием компьютерных математических пакетов (например, Maple).

Пример 1. Установить невырожденность двуметрики (15.4).

Решение. Если двуметрика невырожденная, то для нее должны выполняться следующие два условия:

$$\frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha))}{\partial(\xi_\alpha, \eta_\alpha)} \neq 0. \tag{17.1}$$

При подстановке компонент двуметрики (15.4) в якобианы (17.1) получаем два выражения: $-(x+\xi)\eta$ и $(x+\xi)y$, которые явно отличны от нуля, то есть ранг соответствующих функциональных матриц, будучи равен двум, максимален.

Пример 2. Найти множество движений феноменологически симметричной геометрии двух множеств, задаваемой метрической функцией (15.4), доказать что оно является группой и определить базисные операторы алгебр Ли преобразований многообразий в этой группе.

Решение. Преобразования двумерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$:

$$\left.\begin{aligned} x' = \lambda(x,y), \quad y' = \sigma(x,y), \\ \xi' = \rho(\xi,\eta), \quad \eta' = \tau(\xi,\eta), \end{aligned}\right\} \tag{17.2}$$

где вследствие их обратимости

$$\frac{\partial(\lambda,\sigma)}{\partial(x,y)} \neq 0, \quad \frac{\partial(\rho,\tau)}{\partial(\xi,\eta)} \neq 0, \tag{17.3}$$

подставим в уравнения инвариантности $f(x', y', \xi', \eta') = f(x, y, \xi, \eta)$ для метрической функции (15.4):

$$(\lambda+\rho)\sigma = (x+\xi)y, \quad (\lambda+\rho)\tau = (x+\xi)\eta. \tag{17.4}$$

Исключим из них суммы в скобках и разделим переменные: $y/\sigma = \eta/\tau = a$, где $a \neq 0$ – постоянная, откуда получаем: $\sigma = y/a,\ \tau = \eta/a$. Эти два выражения подставим в первое функциональное уравнение системы (17.4) и разделим переменные: $\lambda -$

$ax = -\rho + a\xi = b$, где b – произвольная постоянная, откуда находим: $\lambda = ax+b$, $\rho = a\xi - b$.

Таким образом, множество движений (17.2) с найденными только что функциями $\lambda, \sigma, \rho, \tau$ как решениями системы функциональных уравнений (17.4) представится следующим образом:

$$x' = ax + b, \quad y' = y/a, \qquad \xi' = a\xi - b, \quad \eta' = \eta/a, \tag{17.5}$$

где, напомним, $a \neq 0$, b – произвольные постоянные.

Групповой характер множества движений (17.5) очевиден, так как легко проверяется выполнение всех четырех аксиом группы (композиция движений есть движение, имеются покой и обратное движение, операция композиции ассоциативна).

Покой как отсутствие движения задается параметрами $a = 1$, $b = 0$, поэтоому бесконечно малое движение (17.5) с точностью до первого порядка малости можно получить, полагая $a = 1 + \alpha$, $b = \beta$:

$$x' = x + \alpha x + \beta, \quad y' = y - \alpha y, \quad \xi' = \xi + \alpha\xi - \beta, \quad \eta' = \eta - \alpha\eta, \tag{17.5$'$}$$

а по ним и базисные операторы соответствующих двумерных алгебр Ли преобразований (17.5) обоих многообразий:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x - y\partial_y, \qquad \Xi_1 = -\partial_\xi, \quad \Xi_2 = \xi\partial_\xi - \eta\partial_\eta. \tag{17.6}$$

Структурные константы алгебр Ли в этих базисах определяются из легко вычисляемых коммутаторов

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [\Xi_1, \Xi_2] = \Xi_1, \tag{17.7}$$

то есть алгебры Ли оказываются изоморфными с точностью до совпадения структурных констант в сопряженных координатных базисах.

Пример 3. По явному координатному представлению двуметрики (15.4) найти базисные операторы алгебр Ли преобразований двумерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в группе ее движений, после чего восстановить саму двуметрику как двухточечный инвариант.

Решение. Любые инфинитезимальные операторы X и Ξ как элементы алгебр Ли преобразаваний двумерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имеют следующее координатное представление:

$$X = \lambda(x,y)\partial_x + \sigma(x,y)\partial_y, \quad \Xi = \rho(\xi,\eta)\partial_\xi + \tau(\xi,\eta)\partial_\eta, \tag{17.8}$$

причем сама метрическая функция f должна быть решением дифференциального уравнения $Xf + \Xi f = 0$ с этими операторами:

$$\lambda f_x + \sigma f_y + \rho f_\xi + \tau f_\eta = 0. \tag{17.9}$$

Если выражение для нее известно, то уравнение (17.9) становится функциональным уравнением на коэффициенты операторов (17.8). Подставим в уравнение (17.9) обе компоненты метрической функции (15.4):

$$y\lambda + (x+\xi)\sigma + y\rho = 0, \quad \eta\lambda + \eta\rho + (x+\xi)\tau = 0, \tag{17.10}$$

откуда, исключая сумму $\lambda + \rho$, получаем разделение переменных: $\sigma/y = \tau/\eta = a$, где a – произвольная постоянная. Воспользовавшись этим результатом, можно в уравнениях системы (17.10) снова разделить переменные: $\lambda + ax = -\rho - a\xi = b$, где b – также произвольная постоянная. Таким образом, решением системы функциональных уравнений (17.10) являются следующие функции:

$$\lambda = -ax + b, \quad \sigma = ay, \qquad \rho = -a\xi - b, \quad \tau = a\eta,$$

с помощью которых получаются выражения для линейных дифференциальных операторов (17.8) как элементов соответствующих алгебр Ли:

$$X = -(ax - b)\partial_x + ay\partial_y, \quad \Xi = -(a\xi + b)\partial_\xi + a\eta\partial_\eta, \tag{17.11}$$

где, напомним, a, b – произвольные константы.

Базисные операторы этих алгебр определятся двумя линейно независимыми ненулевыми значениями вектора (a, b). Выбирая значения $(0, 1)$ и $(-1, 0)$, получим базис (17.6) с коммутаторами (17.7).

Как двухточечный инвариант метрическая функция f должна быть решением системы двух дифференциальных уравнений: $X_1 f + \Xi_1 f = 0, \quad X_2 f + \Xi_2 f = 0$ с операторами (17.6):

$$f_x - f_\xi = 0, \quad xf_x - yf_y + \xi f_\xi - \eta f_\eta = 0. \tag{17.12}$$

Решением первого из них будет выражение $f = \theta(x+\xi, y, \eta)$, где $\theta(u, y, \eta)$ – произвольная функция трех переменных, а $u = x+\xi$. Подставляя его во второе, получаем уже на функцию θ уравнение: $u\theta_u - y\theta_y - \eta\theta_\eta = 0$, которое может быть решено методом характеристик. Соответствующие уравнения характеристик: $du/u = -dy/y = -d\eta/\eta$ имеют два независимых интеграла: $uy = \text{const}$, $u\eta = \text{const}$, которыми и определяются компоненты метрической функции (15.4). Общее же выражение для произвольного двухточечного инварианта будет следующим: $f = \chi((x+\xi)y, (x+\xi)\eta)$, где χ – произвольная функция двух переменных. Если функция χ двухкомпонентная ранга 2, то соответствующие два инварианта будут определять невырожденную метрическую функцию, которая совпадает с исходной, задаваемой выражениями (15.4), с точностью до двумерного масштабного преобразования $\chi^{-1}(f) \to f$.

Задача 1. Установить невырожденность следующих двуметрик: (15.5)–(15.8), (15.9)–(15.11) и (15.12).

Указание к решению. Для двуметрик (15.5)–(15.8) необходимо проверить выполнение условий:

$$\frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^1(j\alpha), f^2(j\alpha))}{\partial(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \mu_\alpha, \nu_\alpha)} \neq 0; \tag{17.13}$$

для двуметрик (15.9)–(15.11) – условий: $\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha))/\partial(x_i, y_i) \neq 0$ и

$$\frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^1(j\alpha), f^2(j\alpha), f^1(k\alpha), f^2(k\alpha))}{\partial(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \mu_\alpha, \nu_\alpha, \rho_\alpha, \tau_\alpha)} \neq 0, \qquad (17.14)$$

а для последней двуметрики (15.12) – условий: $\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha))/\partial(x_i, y_i) \neq 0$ и

$$\frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^1(j\alpha), f^2(j\alpha), f^1(k\alpha), f^2(k\alpha), f^1(l\alpha), f^2(l\alpha))}{\partial(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \mu_\alpha, \nu_\alpha, \rho_\alpha, \tau_\alpha, \varphi_\alpha, \omega_\alpha)} \neq 0. \qquad (17.15)$$

Ясно, что при вычислении таких якобианов без математических пакетов типа Maple не обойтись.

Задача 2. Доказать, что двуметрики (15.5)–(15.8) задают физические структуры (феноменологически симметричные геометрии двух множеств) ранга (3,2), двуметрики (15.9)–(15.11) – ранга (4,2), а двуметрика (15.12) – ранга (5,2).

Указание к решению. Необходимо установить для указанных двуметрик $f = (f^1, f^2)$ существовование двух уравнений (15.2), выражающих феноменологическую симметрию задаваемых ими геометрий. Хорошо известно из математического анализа, что в некоторой системе функций имеются две связи в том и только в том случае, когда ранг функциональной матрицы для нее по всем переменным хотя бы на две единицы меньше числа функций в системе. Поэтому для двуметрик (15.5)–(15.8) надо найти ранг функциональной матрицы системы 12 функций $f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta)$ от 14 переменных $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \mu_\alpha, \nu_\alpha, \xi_\beta, \eta_\beta, \mu_\beta, \nu_\beta$ – координат точек кортежа $<ijk, \alpha\beta>$. Соответственно, для двуметрик (15.9)–(15.11) – системы 16 функций $f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta), f(l\alpha), f(l\beta)$ от 20 переменных $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \mu_\alpha, \nu_\alpha, \rho_\alpha, \tau_\alpha, \xi_\beta, \eta_\beta, \mu_\beta, \nu_\beta, \rho_\beta, \tau_\beta$ – координат точек кортежа $<ijkl, \alpha\beta>$. И для последней двуметрики (15.12) – системы 20 функций от 26 переменых, которые легко определяются по кортежу $<ijklm, \alpha\beta>$.

Для решения задачи 2 также придется воспользоваться компьтерными математическими пакетами, например, Maple.

Задача 3. Установить, что уравнения $(15.5')-(15.9')$, $(15.11')$, выражающие феноменологическую симметрию геометрий двух множеств, задаваемых каждой из соответствующих метрических функций (15.5)–(15.9), (15.11), выполняются тождественно.

Указание к решению. В перечисленные уравнения необходимо подставить соответствующие метрические функции и на компьютере, используя иатематические пакеты, проверить, что левая их часть действительно обращается в нуль.

Задача 4. Найти множество движений феноменологически симметричной геометрии двух множеств, задаваемой одной из метрических функций (15.5)–(15.8), доказать что оно является группой и определить базисные операторы алгебр Ли преобразований многообразий в этой группе.

Указание к решению. Эта задача отличается от примера 2 только тем, что второе многообразие $\mathfrak{N}$, не двумерно, а четырехмерно. Поэтому движение состоит из преобразований двумерного и четырехмерного многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$:

$$\left.\begin{array}{c} x' = \lambda(x,y), \quad y' = \sigma(x,y), \quad \xi' = \rho(\xi,\eta,\mu,\nu), \\ \eta' = \tau(\xi,\eta,\mu,\nu), \quad \mu' = \varphi(\xi,\eta,\mu,\nu), \quad \nu' = \omega(\xi,\eta,\mu,\nu), \end{array}\right\} \tag{17.16}$$

где вследствие их обратимости выполняются условия:

$$\frac{\partial(\lambda,\sigma)}{\partial(x,y)} \neq 0, \quad \frac{\partial(\rho,\tau,\varphi,\omega)}{\partial(\xi,\eta,\mu,\nu)} \neq 0. \tag{17.17}$$

Преобразования (17.16) надо подставить в уравнение инвариантности

$$f(x',y',\xi',\eta',\mu',\nu') = f(x,y,\xi,\eta,\mu,\nu) \tag{17.18}$$

для обеих компонент одной из метрических функций (15.5)–(15.8) и решить получающиеся при этом функциональные уравнения. Таким образом может быть получено все множество движений, которое должно быть четырехпараметрическим. Далее надо установить, что по композиции движений оно является группой, записать бесконоечно малые движения и по ним найти базисные операторы X_1, X_2, X_3, X_4 и $\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, \Xi_4$ соответствующих алгебр Ли преобразований двумерного и четырехмерного многообразий, составляющих группу движений.

Задача 5. По явному координатному представлению двуметрик (15.5)–(15.8) найти для одной из них базисные операторы алгебр Ли преобразований двумерного и четырехмерного многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в группе ее движений, после чего восстановить саму двуметрику как двухточечный инвариант.

Указание к решению. Общее координатное представление операторов алгебр Ли преобразований этих многообразий будет следующим:

$$\left.\begin{array}{c} X = \lambda(x,y)\partial_x + \sigma(x,y)\partial_y, \\ \Xi = \rho(\xi,\eta,\mu,\nu)\partial_\xi + \tau(\xi,\eta,\mu,\nu)\partial_\eta + \varphi(\xi,\eta,\mu,\nu)\partial_\mu + \omega(\xi,\eta,\mu,\nu)\partial_\nu. \end{array}\right\} \tag{17.19}$$

Поскольку двухкомпонентная метрическая функция должна удовлетворять дифференциальному уравнению $Xf + \Xi f = 0$ с операторами (17.19), на их коэффициенты λ, σ и $\rho, \tau, \varphi, \omega$ возникают два функциональных уравнения

$$\lambda f_x + \sigma f_y + \rho f_\xi + \tau f_\eta + \varphi f_\mu + \omega f_\nu = 0, \tag{17.20}$$

явный вид котрых определится конкретной метрической функцией из списка (15.5)–(15.8). В решении этих уравнений должен появиться вектор (a,b,c,d). Придавая ему четыре различные линейно независимые ненулевые значения (например: (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)), получим по выражениям (17.19) две системы базисных операторов соответствующих четырехмерных алгебр Ли. Метрическая функция как двухточечный инвариант является решением системы четырех дифференциальных уравнений вида $Xf + \Xi f = 0$ с найденными базисными операторами и восстанавливается с точностью до масштабного преобразования, задаваемого некоторой двухкомпонентной функцией ранга 2. Полезно предваритеьно изучить аналогичный пример 3.

Задача 6. Установить невырожденность триметрик – трехкомпонентных метрических функций (16.7)–(16.17).

Указание к решению. Необходимо проверить выполнение условий (16.2), в которых удобно опустить индексы i и α, указывающие на конкретные точки трехмерных многообразий:

$$\frac{\partial(f^1, f^2, f^3)}{\partial(x, y, z)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f^1, f^2, f^3)}{\partial(\xi, \eta, \vartheta)} \neq 0. \tag{17.21}$$

Задача 7. Доказать, что триметрики (16.7)–(16.17) задают физические структуры (феноменологически симметричные геометрии двух множеств) ранга (2,2).

Указание к решению. Необходимо установить, что ранг функциональной матрицы

$$||\frac{\partial(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta))}{\partial(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \vartheta_\alpha, \xi_\beta, \eta_\beta, \vartheta_\beta)}||, \tag{17.22}$$

где $f = (f^1, f^2, f^3)$, для двенадцати функций от двенадцати переменных, определяемых по кортежу $< ij, \alpha\beta >$, равен 9, что, естественно, сподручнее делать на компьютере, используя математический пакет Maple.

Задача 8. Установить, что уравнения $(16.7')$–$(16.12')$, $(16.16')$, выражающие феноменологическую симметрию геометрий двух множеств, задаваемых каждой из соответствующих трехкомпонентных метрических функций (16.7)–(16.12), (16.16), выполняются тождественно по координатам всех точек кортежа $<ij, \alpha\beta>$.

Указание к решению. Необходимо подставить в эти уравнения соответствующие компоненты триметрик или указанные их комбинации.

Задача 9. Найти множество движений феноменологически симметричной геометрии двух множеств, задаваемой одной из трехкомпонентных метрических функций (16.7)–(16.17), доказать что оно является группой и определить базисные операторы алгебр Ли преобразований обоих трехмерных многообразий в этой группе.

Указание к решению. Преобразования трехмерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в движении:

$$\left.\begin{array}{l} x' = \lambda(x, y, z), \quad y' = \sigma(x, y, z), \quad z' = \rho(x, y, z), \\ \xi' = \tau(\xi, \eta, \vartheta), \quad \eta' = \varphi(\xi, \eta, \vartheta), \quad \vartheta' = \omega(\xi, \eta, \vartheta) \end{array}\right\} \tag{17.23}$$

надо подставить в условие $f(x', y', z', \xi', \eta', \vartheta') = f(x, y, z, \xi, \eta, \vartheta)$, превратив его в функциональное уравнение, и, решая его, найти множество всех движений, которое должно зависеть от трех параметров. Затем следует установить, что оно является группой, записать бесконечно малые движения и по ним определить базисные операторы X_1, X_2, X_3 и Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 алгебр Ли преобразований трехмерных многообразий, на которых задана триметрическая физическая структура ранга (2,2). Рекомендуется проанализировать сходный по сути пример 2 и познакомиться с указаниями к решению задачи 4.

Задача 10. По явному координатному представлению триметрик (16.7)–(16.17) найти для одной из них базисные операторы алгебр Ли преобразований трехмерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в группе ее движений, после чего восстановить саму триметрику как двухточечный инвариант.

Указание к решению. Следует сначала в деталях изучить сходный по сути пример 3 и продумать указание к решению подобной задачи 5. Координатное выражение для операторов алгебр Ли преобразований трехмерных многообразий будет таким:

$$\left.\begin{array}{l} X = \lambda(x,y,z)\partial_x + \sigma(x,y,z)\partial_y + \rho(x,y,z)\partial_z, \\ \Xi = \tau(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\xi + \varphi(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\eta + \omega(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\vartheta. \end{array}\right\} \qquad (17.24)$$

Поскольку трехкомпонентная метрическая функция должна удовлетворять дифференциальному уравнению $Xf + \Xi f = 0$ с операторами (17.24), на их коэффициенты λ, σ, ρ и τ, φ, ω возникают три функциональных уравнения:

$$\lambda f_x + \sigma f_y + \rho f_z + \tau f_\xi + \varphi f_\eta + \omega f_\vartheta = 0, \qquad (17.25)$$

явный вид котрых определится компонентами конкретной триметрики из списка (16.7)–(16.17). В их решении должен появиться вектор (a, b, c). Придавая ему три различные линейно независимые ненулевые значения (например: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)), получим по выражениям (17.24) системы базисных операторов X_1, X_2, X_3 и Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 соответствующих трехмерных алгебр Ли. Метрическая функция как двухточечный инвариант является решением системы трех дифференциальных уравнений вида $Xf + \Xi f = 0$ с найденными базисными операторами. Восстанавливается она с точностью до масштабного преобразования, задаваемого некоторой трехкомпонентной функцией $\chi : R^3 \to R^3$ ранга 3.

ГЛАВА IV. Полиметрические физические структуры, квазигруппы и гиперкомплексные числа

§18. Квазигруппы и феноменологическая симметрия двуметрических физических структур ранга (n+1,2)

Для уяснения сути данного параграфа рассмотрим сначала однометрические физические структуры того же ранга, которые задаются на одномерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ однокомпонентной метрической функцией

$$f = f(x, \xi) = f(x, \xi^1, \ldots, \xi^n). \tag{18.1}$$

Согласно основной классификационной теореме, сформулированной в §10, они существуют только для $n = 1, 2, 3$ и не существуют для $n > 3$. Метрическая функция (18.1) с точностью до масштабного преобразования и замены локальных координат в многообразиях, а также функциональная связь, выражающая феноменологическую симметрию соответстсвующей геометрии двух множеств, задаются следующими каноническими выражениями и уравнениями:

для $n = 1$:

$$f = x + \xi, \tag{18.2}$$

$$f(i\alpha) - f(i\beta) - f(j\alpha) + f(j\beta) = 0, \tag{18.2$'$}$$

где $\xi = \xi^1$ и, например, $f(i\alpha) = x_i + \xi_\alpha$;

для $n = 2$:

$$f = x\xi + \eta, \tag{18.3}$$

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{18.3$'$}$$

где $\xi = \xi^1$, $\eta = \xi^2$ и, например, $f(i\alpha) = x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha$;

для $n = 3$:

$$f = \frac{x\xi + \eta}{x + \vartheta}, \tag{18.4}$$

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{18.4$'$}$$

где $\xi = \xi^1$, $\eta = \xi^2$, $\vartheta = \xi^3$ и, например, $f(i\alpha) = (x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha)/(x_i + \vartheta_\alpha)$.

Приведенные выше канонические выражения и уравнения, естественно, не являются единственно возможными. Метрические функции (18.2–4) всегда можно записать в таком виде, что они будут определять групповую операцию в R^1, R^2, R^3, а соответствующие функциональные связи (18.2′–4′) при этом найдутся с помощью нейтрального и обратного элементов. Оказывается, однако, что более удобно записывать эти метрические функции в форме, дающей им возможность определять там же квазигрупповую операцию с правой единицей и правым обратным элементом, совпадающим с исходным. Тогда формы записи метрических функций и соответствующих им функциональных связей будут подобными по своему строению:

для $n = 1$:

$$f = x - \xi, \tag{18.5}$$

$$\hat{R}(\alpha\beta)(f(i\alpha) - f(j\alpha)) = 0; \tag{18.5′}$$

для $n = 2$:

$$f = \frac{x - \eta}{\xi - \eta}, \tag{18.6}$$

$$\hat{R}(\alpha\beta)\frac{f(i\alpha) - f(k\alpha)}{f(j\alpha) - f(k\alpha)} = 0; \tag{18.6′}$$

для $n = 3$:

$$f = \frac{x - \eta}{\xi - \eta} \cdot \frac{\xi - \vartheta}{x - \vartheta}, \tag{18.7}$$

$$\hat{R}(\alpha\beta)\frac{f(i\alpha) - f(k\alpha)}{f(j\alpha) - f(k\alpha)} \cdot \frac{f(j\alpha) - f(l\alpha)}{f(i\alpha) - f(l\alpha)} = 0, \tag{18.7′}$$

где $\hat{R}(\alpha\beta)$ - оператор альтернирования или антисимметризации по элементам α, β.

Поясним более подробно как, например, из выражения (18.3) получить метрическую функцию (18.6), также задающую физическую структуру ранга (3,2). Исходная метрическая функция (18.3) определяет в плоскости R^2 квазигрупповую операцию $(x, y) \otimes (\xi, \eta) = (x\xi + \eta, y\xi + \eta)$ с правым нейтральным элементом $e = (1, 0)$ и правым обратным к (x, y) элементом $(x, y)^{-1} = (1/(x - y), -y/(x - y))$. Если компоненты обратного элемента рассмотреть как формулы перехода к новым локальным координатам в многообразии $\mathfrak{N}$, то есть, если в выражении (18.3) сделать общую замену координат $x \to x$, $\xi \to 1/(\xi - \eta)$, $\eta \to -\eta/(\xi - \eta)$, то получим выражение (18.6). Заметим, что в новой квазигрупповой операции $(x, y) \otimes (\xi, \eta) = ((x - \eta)/(\xi - \eta), (y - \eta)/(\xi - \eta))$, определяемой метрической функцией (18.6), правый нейтральный элемент тот же самый: $e = (1, 0)$, а правый обратный совпадает с исходным: $(x, y)^{-1} = (x, y)$. Обратим также внимание на то, что соответствующее метрической функции (18.6) уравнение (18.6′), выражающее феноменологическую симметрию задаваемой ею физической структуры ранга $(3,2)$, имеет под оператором альтернирования $\hat{R}(\alpha\beta)$ подобное ей выражение, которое можно получить следующим переходом: $x \to f(i\alpha)$, $\xi \to f(j\alpha)$, $\eta \to f(k\alpha)$.

Аналогичное подобие имеет место также и в отношении двух других метрических функций (18.5) и (18.7), что можно выразить следующей теоремой:

Теорема 1. *Если метрическая функция $f = f(x, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ задает на одномерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга $(n+1,2)$, то с точностью до масштабного преобразования и замены координат в многообразиях она определяет в пространстве R^n такую квазигрупповую операцию с правой единицей, что правый обратный элемент совпадает с исходным и в уравнении, выражающем феноменологическую симметрию, под оператором альтернирования $\hat{R}(\alpha\beta)$ стоит выражение, подобное метрической функции.*

Использованный выше в классификации однометрических физических структур ранга $(n+1,2)$ метод записи метрической функции f и соответствующей ей функциональной связи $\Phi = 0$, при котором они имеют подобную форму, оказывается применим и для полиметрических физических структур того же ранга, в частности, двуметрических, классификация которых представлена в §15 выражениями (15.3)–(15.12).

Теорема 2. *Если двухкомпонентная метрическая функция*

$$f = f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu, \ldots) \tag{18.8}$$

задает на 2-мерном и $2n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ двуметрическую физическую структуру (феноменологически симметричную геометрию двух множеств) ранга $(n+1,2)$, то с точностью до масштабного преобразования и замены координат в многообразиях она определяет в R^{2n} такую квазигрупповую операцию с правой единицей, что правый обратный элемент совпадает с исходным и в уравнении, выражающем феноменологическую симметрию, под оператором альтернирования $\hat{R}(\alpha\beta)$ стоит выражение, подобное метрической функции:

$$\hat{R}(\alpha\beta) f(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^1(j\alpha), f^2(j\alpha), f^1(k\alpha), f^2(k\alpha), \ldots) = 0; \tag{18.8$'$}$$

для $n = 1$, то есть ранга $(2,2)$:

$$f^1 = x - \xi, \quad f^2 = y - \eta, \tag{18.9}$$

$$\hat{R}(\alpha\beta)(f^1(i\alpha) - f^1(j\alpha)) = 0, \quad \hat{R}(\alpha\beta)(f^2(i\alpha) - f^2(j\alpha)) = 0; \tag{18.9$'$}$$

$$f^1 = (x - \xi)\eta, \quad f^2 = y/\eta, \tag{18.10}$$

$$\hat{R}(\alpha\beta)(f^1(i\alpha) - f^1(j\alpha)) f^2(j\alpha) = 0, \quad \hat{R}(\alpha\beta) f^2(i\alpha)/f^2(j\alpha) = 0; \tag{18.10$'$}$$

для $n=2$, *то есть ранга* $(3,2)$:

$$f^1=\frac{\begin{vmatrix} x & \xi-\mu \\ \mu & \xi-\mu\end{vmatrix}-\varepsilon\begin{vmatrix} y & \eta-\nu \\ \nu & \eta-\nu\end{vmatrix}}{(\xi-\mu)^2-\varepsilon(\eta-\nu)^2},\quad f^2=\frac{\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ \eta & \xi & 1 \\ \nu & \mu & 1\end{vmatrix}}{(\xi-\mu)^2-\varepsilon(\eta-\nu)^2},\tag{18.11}$$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{R}(\alpha\beta)\frac{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha) \\ f^1(k\alpha) & f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha)\end{vmatrix}-\varepsilon\begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^2(j\alpha)-f^2(k\alpha) \\ f^2(k\alpha) & f^2(j\alpha)-f^2(k\alpha)\end{vmatrix}}{(f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha))^2-\varepsilon(f^2(j\alpha)-f^2(k\alpha))^2}=0,\\ &\hat{R}(\alpha\beta)\frac{\begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^1(i\alpha) & 1 \\ f^2(j\alpha) & f^1(j\alpha) & 1 \\ f^2(k\alpha) & f^1(k\alpha) & 1\end{vmatrix}}{(f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha))^2-\varepsilon(f^2(j\alpha)-f^2(k\alpha))^2}=0,\end{aligned}\right\}\tag{18.11$'$}$$

где $\varepsilon=0,\pm1$;

$$f^1=\frac{x-\mu}{\xi-\mu},\quad f^2=\frac{\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ \eta & \xi & 1 \\ \nu & \mu & 1\end{vmatrix}}{(\xi-\mu)^{c+1}},\tag{18.12}$$

$$\hat{R}(\alpha\beta)\frac{f^1(i\alpha)-f^1(k\alpha)}{f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha)}=0,\quad \hat{R}(\alpha\beta)\frac{\begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^1(i\alpha) & 1 \\ f^2(j\alpha) & f^1(j\alpha) & 1 \\ f^2(k\alpha) & f^1(k\alpha) & 1\end{vmatrix}}{(f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha))^{c+1}}=0,\tag{18.12$'$}$$

где $c\neq1$;

$$f^1=\frac{x-\mu}{\xi-\mu},\quad f^2=\frac{\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ \eta & \xi & 1 \\ \nu & \mu & 1\end{vmatrix}-\ln(\xi-\mu)\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ \xi^2 & \xi & 1 \\ \mu^2 & \mu & 1\end{vmatrix}}{(\xi-\mu)^3},\tag{18.13}$$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{R}(\alpha\beta)\frac{f^1(i\alpha)-f^1(k\alpha)}{f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha)}=0,\\ &\hat{R}(\alpha\beta)(f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha))^{-3}\left(\begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^1(i\alpha) & 1 \\ f^2(j\alpha) & f^1(j\alpha) & 1 \\ f^2(k\alpha) & f^1(k\alpha) & 1\end{vmatrix}-\right.\\ &\left.-\ln(f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha))\begin{vmatrix} (f^1(i\alpha))^2 & f^1(i\alpha) & 1 \\ (f^1(j\alpha))^2 & f^1(j\alpha) & 1 \\ (f^1(k\alpha))^2 & f^1(k\alpha) & 1\end{vmatrix}\right)=0;\end{aligned}\right\}\tag{18.13$'$}$$

$$f^1 = \frac{x\nu - y\mu}{\xi\nu - \eta\mu}, \quad f^2 = \frac{x\eta - y\xi}{\xi\nu - \eta\mu}, \tag{18.14}$$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{R}(\alpha\beta)\frac{f^1(i\alpha)f^2(k\alpha) - f^2(i\alpha)f^1(k\alpha)}{f^1(j\alpha)f^2(k\alpha) - f^2(j\alpha)f^1(k\alpha)} = 0, \\ &\hat{R}(\alpha\beta)\frac{f^1(i\alpha)f^2(j\alpha) - f^2(i\alpha)f^1(j\alpha)}{f^1(j\alpha)f^2(k\alpha) - f^2(j\alpha)f^1(k\alpha)} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{18.14$'$}$$

для $n = 3$, *то есть ранга* $(4, 2)$:

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{(x-\mu)(\xi-\rho) + \varepsilon(y-\nu)(\eta-\tau)}{(x-\rho)(\eta-\nu) + (y-\tau)(\xi-\mu)} & 1 \\ \dfrac{\varepsilon((x-\mu)(\eta-\tau) + (y-\nu)(\xi-\rho))}{(x-\rho)(\xi-\mu) + \varepsilon(y-\tau)(\eta-\nu)} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{(x-\rho)(\xi-\mu) + \varepsilon(y-\tau)(\eta-\nu)}{(x-\rho)(\eta-\nu) + (y-\tau)(\xi-\mu)} & 1 \\ \dfrac{\varepsilon((x-\rho)(\eta-\nu) + (y-\tau)(\xi-\mu))}{(x-\rho)(\xi-\mu) + \varepsilon(y-\tau)(\eta-\nu)} & 1 \end{vmatrix}}, \\ f^2 &= \frac{\begin{vmatrix} x^2 & y & x & 1 \\ \xi^2 & \eta & \xi & 1 \\ \mu^2 & \nu & \mu & 1 \\ \rho^2 & \tau & \rho & 1 \end{vmatrix} - \varepsilon \begin{vmatrix} y^2 & y & x & 1 \\ \eta^2 & \eta & \xi & 1 \\ \nu^2 & \nu & \mu & 1 \\ \tau^2 & \tau & \rho & 1 \end{vmatrix}}{((x-\rho)^2 - \varepsilon(y-\tau)^2)((\xi-\mu)^2 - \varepsilon(\eta-\nu)^2)}, \end{aligned}\right\} \tag{18.15}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{(f^1(i\alpha)-f^1(k\alpha))(f^1(j\alpha)-f^1(l\alpha))+\varepsilon(f^2(i\alpha)-f^2(k\alpha))(f^2(j\alpha)-f^2(l\alpha))}{(f^1(i\alpha)-f^1(l\alpha))(f^2(j\alpha)-f^2(k\alpha))+(f^2(i\alpha)-f^2(l\alpha))(f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha))} & 1 \\ \dfrac{\varepsilon((f^1(i\alpha)-f^1(k\alpha))(f^2(j\alpha)-f^2(l\alpha))+(f^2(i\alpha)-f^2(k\alpha))(f^1(j\alpha)-f^1(l\alpha)))}{(f^1(i\alpha)-f^1(l\alpha))(f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha))+\varepsilon(f^2(i\alpha)-f^2(l\alpha))(f^2(j\alpha)-f^2(k\alpha))} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{(f^1(i\alpha)-f^1(l\alpha))(f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha))+\varepsilon(f^2(i\alpha)-f^2(l\alpha))(f^2(j\alpha)-f^2(k\alpha))}{(f^1(i\alpha)-f^1(l\alpha))(f^2(j\alpha)-f^2(k\alpha))+(f^2(i\alpha)-f^2(l\alpha))(f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha))} & 1 \\ \dfrac{\varepsilon((f^1(i\alpha)-f^1(l\alpha))(f^2(j\alpha)-f^2(k\alpha))+(f^2(i\alpha)-f^2(l\alpha))(f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha)))}{(f^1(i\alpha)-f^1(l\alpha))(f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha))+\varepsilon(f^2(i\alpha)-f^2(l\alpha))(f^2(j\alpha)-f^2(k\alpha))} & 1 \end{vmatrix}} = \\
&\qquad = |\alpha\to\beta|, \\
&\frac{\begin{vmatrix} (f^1(i\alpha))^2 & f^2(i\alpha) & f^1(i\alpha) & 1 \\ (f^1(j\alpha))^2 & f^2(j\alpha) & f^1(j\alpha) & 1 \\ (f^1(k\alpha))^2 & f^2(k\alpha) & f^1(k\alpha) & 1 \\ (f^1(l\alpha))^2 & f^2(l\alpha) & f^1(l\alpha) & 1 \end{vmatrix} - \varepsilon \begin{vmatrix} (f^2(i\alpha))^2 & f^2(i\alpha) & f^1(i\alpha) & 1 \\ (f^2(j\alpha))^2 & f^2(j\alpha) & f^1(j\alpha) & 1 \\ (f^2(k\alpha))^2 & f^2(k\alpha) & f^1(k\alpha) & 1 \\ (f^2(l\alpha))^2 & f^2(l\alpha) & f^1(l\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{((f^1(i\alpha)-f^1(l\alpha))^2-\varepsilon(f^2(i\alpha)-f^2(l\alpha))^2)((f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha))^2-\varepsilon(f^2(j\alpha)-f^2(k\alpha))^2)} = \\
&\qquad = |\alpha\to\beta|,
\end{aligned}\right\} \tag{18.15'}$$

где $\varepsilon = 0, \pm 1;$

$$f^1 = \frac{(x-\mu)(\xi-\rho)}{(x-\rho)(\xi-\mu)}, \quad f^2 = \frac{(\mu-\rho)(\xi-\rho)}{(x-\rho)(\xi-\mu)} \cdot \frac{\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ \eta & \xi & 1 \\ \nu & \mu & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{vmatrix}}, \tag{18.16}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{R}(\alpha\beta)\frac{(f^1(i\alpha)-f^1(k\alpha))(f^1(j\alpha)-f^1(l\alpha))}{(f^1(i\alpha)-f^1(l\alpha))(f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha))} = 0, \\
&\hat{R}(\alpha\beta)\frac{(f^1(k\alpha)-f^1(l\alpha))(f^1(j\alpha)-f^1(l\alpha))}{(f^1(i\alpha)-f^1(l\alpha))(f^1(j\alpha)-f^1(k\alpha))} \cdot \frac{\begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^1(i\alpha) & 1 \\ f^2(j\alpha) & f^1(j\alpha) & 1 \\ f^2(k\alpha) & f^1(k\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \end{vmatrix}} = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{18.16'}$$

$$f^1 = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{vmatrix}}, \quad f^2 = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \xi & \eta & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{vmatrix}}, \tag{18.17}$$

$$\hat{R}(\alpha\beta)\frac{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \end{vmatrix}} = 0, \quad \hat{R}(\alpha\beta)\frac{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \end{vmatrix}} = 0; \tag{18.17$'$}$$

для $n = 4$, то есть ранга $(5,2)$:

$$f^1 = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \rho & \tau & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \rho & \tau & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{vmatrix}}, \quad f^2 = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \xi & \eta & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \mu & \nu & 1 \\ \rho & \tau & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \rho & \tau & 1 \\ \varphi & \omega & 1 \end{vmatrix}}, \tag{18.18}$$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{R}(i\alpha)\frac{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(m\alpha) & f^2(m\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(m\alpha) & f^2(m\alpha) & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \\ f^1(m\alpha) & f^2(m\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \\ f^1(m\alpha) & f^2(m\alpha) & 1 \end{vmatrix}} = 0, \\ &\hat{R}(i\alpha)\frac{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \\ f^1(m\alpha) & f^2(m\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^2(l\alpha) & 1 \\ f^1(m\alpha) & f^2(m\alpha) & 1 \end{vmatrix}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18.18$'$}$$

Рассмотрим последовательно каждый случай.

Получим из выражения (15.3) метрической функции f эквивалентное ему выражение (18.9) для неё же, также задающей двуметрическую физическую структуру ранга $(2,2)$. Двуметрика (15.3) определяет на плоскости R^2 квазигрупповую операцию $(x,y) \otimes (\xi,\eta) = (x+\xi, y+\eta)$ с правым нейтральным элементом $e = (0,0)$ и правым обратным к (x,y) элементом $(x,y)^{-1} = (-x,-y)$. Если компоненты обратного элемента рассмотреть как формулы перехода к новым локальным координатам в множестве $\mathfrak{N}$, то есть если в выражении (15.3) сделать общую замену координат $x \to x$, $y \to y$, $\xi \to -\xi$, $\eta \to -\eta$, то получим метрическую функцию (18.9). Заметим, что в новой квазигрупповой операции $(x,y) \otimes (\xi,\eta) = (x-\xi, y-\eta)$, определяемой этой функцией, правый нейтральный элемент тот же: $e = (0,0)$, а правый обратный совпадает с исходным: $(x,y)^{-1} = (x,y)$. Соответствующее же двуметрике (18.9) уравнение (18.9′), выражающее феноменологическую симметрию, задаваемой ею физической структуры ранга $(2,2)$, имеет под оператором альтернирования $\hat{R}(\alpha\beta)$ подобное ей выражение, которое можно получить переходом $x \to f^1(i\alpha)$, $y \to f^2(i\alpha)$, $\xi \to f^1(j\alpha)$, $\eta \to f^2(j\alpha)$.

Думетрика (15.4) определяет на плоскости R^2 квазигрупповую операцию $(x,y)\otimes(\xi,\eta) = ((x+\xi)y,(x+\xi)\eta)$, но, в отличие от предыдущего случая, в ней отсутствует правый нейтральный элемент. Чтобы он появился, надо предварительно осуществить масштабное преобразование $f^2 \to f^1,\ f^1/f^2 \to f^2$. Тогда с новой квазигрупповой операцией $(x,y)\otimes(\xi,\eta) = ((x+\xi)\eta, y/\eta)$ в плоскости R^2 появляются правый нейтральный элемент $e = (0,1)$ и правый обратный $(x,y)^{-1} = (-x,y)$. Далее используем компоненты обратного элемента для задания формул перехода в множестве $\mathfrak{N}$ к новым локальным координатам. Произведя замену $x \to x, y \to y, \xi \to -\xi$, $\eta \to \eta$, получаем метрическую функцию (18.10). В определяемой ею квазигрупповой операции $(x,y)\otimes(\xi,\eta) = ((x-\xi)\eta, y/\eta)$ правый нейтральный элемент будет тот же: $e = (0,1)$, а правый обратный элемент будет совпадать с исходным: $(x,y)^{-1} = (x,y)$. Запись функциональной связи (18.10′) осуществляется по той же схеме, что и для предыдущей двуметрики (18.9).

Заметим на будущее, что во всех локальных квазигрупповых операциях, задаваемых полученными выше и получаемыми ниже двуметриками (18.9) – (18.18), обратный правый элемент совпадает с исходным, а нейтральный элемент при соответствующей изотопии (масштабном преобразовании и замене координат в многообразиях) не меняется, кроме случая вывода выражения (18.10), когда нейтрального элемента вообще не было. Поэтому в дальнейшем изложении мы не будем всякий раз обращать внимание на указанные обстоятельства в отношении нейтрального и обратного элементов.

Двуметрика (15.5) в пространстве R^4 определяет квазигрупповую операцию $(x,y,u,v)\otimes(\xi,\eta,\mu,\nu) = (x\xi+\varepsilon y\eta+\mu, x\eta+y\xi+\nu, u\xi+\varepsilon v\eta+\mu, u\eta+v\xi+\nu)$ с правым нейтральным элементом $e = (1,0,0,0)$ и правым обратным элементом $(x,y,u,v)^{-1} = (\dfrac{x-u}{(x-u)^2-\varepsilon(y-v)^2}, \dfrac{v-y}{(x-u)^2-\varepsilon(y-v)^2}, \dfrac{u(u-x)-\varepsilon v(v-y)}{(x-u)^2-\varepsilon(y-v)^2}$, $\dfrac{yu-xv}{(x-u)^2-\varepsilon(y-v)^2})$. По компонентам обратного элемента записываются формулы $\xi \to \dfrac{\xi-\mu}{(\xi-\mu)^2-\varepsilon(\eta-\nu)^2}$, $\eta \to \dfrac{\nu-\eta}{(\xi-\mu)^2-\varepsilon(\eta-\nu)^2}$, $\mu \to \dfrac{\mu(\mu-\xi)-\varepsilon\nu(\nu-\eta)}{(\xi-\mu)^2-\varepsilon(\eta-\nu)^2}$, $\nu \to \dfrac{\eta\mu-\xi\nu}{(\xi-\mu)^2-\varepsilon(\eta-\nu)^2}$ соответствующей замены локальных координат в четырехмерном многообразии $\mathfrak{N}$. Используя эту замену, перейдем от выражения (15.5) к выражению (18.11) для двуметрики, которая определяет новую квазигрупповую операцию: $(x,y,u,v)\otimes(\xi,\eta,\mu,\nu) = (f^1, f^2, f^1_{u,v},\ f^2_{u,v})$, где f^1, f^2, – компоненты метрической функции (18.11), а $f^1_{u,v}$, $f^2_{u,v}$ – те же компоненты, только с заменой координат x, y на u, v. Уравнение (18.11′), выражающее феноменологическую симметрию, получается так же, как и для двуметрики (18.9), с добавлением перехода $\mu \to f^1(k\alpha)$, $\nu \to f^2(k\alpha)$. Заметим, что двуметрику (18.11) можно получить комплексификацией однокомпонентной метрической функции (18.6).

Двуметрика (15.6) определяет квазигрупповую операцию $(x,y,u,v)\otimes(\xi,\eta,\mu,\nu) = (x\xi+\mu, x\eta+y\xi^c+\nu, u\xi+\mu, u\eta+v\xi^c+\nu)$ в R^4 с правым нейтральным элементом $e = (1,0,0,0)$ и правым обратным $(x,y,u,v)^{-1} = \left(\frac{1}{x-u}, \frac{v-y}{(x-u)^{c+1}}, -\frac{u}{x-u}, \frac{uy-vx}{(x-u)^{c+1}}\right)$. Используя соответствующую ему замену $\xi \to \frac{1}{\xi-\mu}$, $\eta \to \frac{\nu-\eta}{(\xi-\mu)^{c+1}}$, $\mu \to -\frac{\mu}{\xi-\mu}$, $\nu \to \frac{\mu\eta-\nu\xi}{(\xi-\mu)^{c+1}}$ локальных координат в многообразии $\mathfrak{N}$, получаем двуметрику (18.12), определяющую в R^4 квазигрупповую операцию $(x,y,u,v)\otimes(\xi,\eta,\mu,\nu) = (f^1, f^2, f^1_{u,v}, f^2_{u,v})$. Уравнение (18.12′) получается аналогично уравнению (18.11′).

Для двуметрики (15.7) имеем квазигрупповую операцию $(x,y,u,v)\otimes(\xi,\eta,\mu,\nu) = (x\xi+\mu, x\eta+y\xi^2+x^2\xi^2\ln\xi+\nu, u\xi+\mu, u\eta+v\xi^2+u^2\xi^2\ln\xi+\nu)$ в R^4 с правым нейтральным элементом $e = (1,0,0,0)$ и правым обратным $(x,y,u,v)^{-1} = (\frac{1}{x-u}, \frac{(x^2-u^2)\ln(x-u)+v-y}{(x-u)^3}, -\frac{u}{x-u}, -\frac{xu(x-u)\ln(x-u)+uy-xv}{(x-u)^3})$, которому соответствует замена $\xi \to \frac{1}{\xi-\mu}$, $\eta \to \frac{(\xi^2-\mu^2)\ln(\xi-\mu)+\nu-\eta}{(\xi-\mu)^3}$, $\mu \to -\frac{\mu}{\xi-\mu}$, $\nu \to -\frac{\xi\mu(\xi-\mu)\ln(\xi-\mu)+\mu\eta-\xi\nu}{(\xi-\mu)^3}$ локальных координат в многообразии $\mathfrak{N}$. Произведя эту замену, получаем двуметрику (18.13), которая определяет квазигрупповую операция $(x,y,u,v)\otimes(\xi,\eta,\mu,\nu) = (f^1, f^2, f^1_{u,v}, f^2_{u,v})$. Функциональная связь (18.13′) получается таким же переходом, как и связь (18.11′).

Двуметрика (15.8) определяет квазигрупповую операцию $(x,y,u,v)\otimes(\xi,\eta,\mu,\nu) = (x\xi+y\mu, x\eta+y\nu, u\xi+v\mu, u\eta+v\nu)$ в R^4 с правым нейтральным элементом $e = (1,0,0,1)$ и правым обратным $(x,y,u,v)^{-1} = (v/(xv-yu), -y/(xv-yu), -u/(xv-yu), x/(xv-yu))$. Остальные рассуждения точно такие же как и для предыдущей двуметрики (15.7).

Двуметрика (15.9) задает двуметрическую физическую структуру ранга (4.2). Этой метрической функции соответствует в R^6 квазигрупповая операция $(x,y,u,v,s,t)\otimes(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau) = (\frac{(x\xi+\varepsilon y\eta+\mu)(x+\rho)-\varepsilon(x\eta+y\xi+\nu)(y+\tau)}{(x+\rho)^2-\varepsilon(y+\tau)^2}, \frac{(x\xi+\varepsilon y\eta+\mu)(y+\tau)-(x\eta+y\xi+\nu)(x+\rho)}{(x+\rho)^2-\varepsilon(y+\tau)^2}, (x,y)\to(u,v), (x,y)\to(u,v), (x,y)\to(s,t), (x,y)\to(s,t))$ с правым нейтральным элементом $e = (1,0,0,0,\infty,\infty)$ и правым обратным элементом $(x,y,u,v,s,t)^{-1} = (\frac{(x-u)(x-s)-\varepsilon(y-v)(y-t)}{(x-u)^2-\varepsilon(y-v)^2}, \frac{x(v-t)-u(y-t)+s(y-v)}{(x-u)^2-\varepsilon(y-v)^2}, \frac{u(u-x)(x-s)-\varepsilon(xv(v-t)-yu(y-t)+vs(y-v))}{(x-u)^2-\varepsilon(y-v)^2}, \frac{ut(x-u)-xv(x-s)+yu(u-s)+\varepsilon v(y-v)(y-t)}{(x-u)^2-\varepsilon(y-v)^2}, -s, -t)$. Практически повторяя рассуждения для двуметрики (18.11), получаем метрическую функцию (18.15) и соответствующую ей функциональную связь (18.15′), если дополнительно осуществим переход $\rho \to f^1(l\alpha)$, $\tau \to f^2(l\alpha)$. Заметим, что двуметрика (18.15) может быть получена комплексификацией однокомпонентной метрической функции (18.7).

Двуметрике (15.10) соответствует в R^6 квазигрупповая операция $(x,y,u,v,s,t,)\otimes(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau) = (\frac{x\xi+\mu}{x+\rho}, \frac{x\eta+y\nu+\tau}{x+\rho}, \frac{u\xi+\mu}{u+\rho}, \frac{u\eta+v\nu+\tau}{u+\rho}, \frac{s\xi+\mu}{s+\rho}, \frac{s\eta+t\nu+\tau}{s+\rho})$ с правым нейтральным элементом $e=(1,0,0,0,\infty,\infty)$ и правым обратным элементом $(x,y,u,v,s,t)^{-1} = (\frac{x-s}{x-u}, \frac{(x-s)(s-u)(y-v)}{(x-u)(x(v-t)-u(y-t)+s(y-v))}, \frac{u(s-x)}{x-u}, \frac{(u-s)(x-s)}{x(v-t)-u(y-t)+s(y-v)}, -s, \frac{(s-u)(x-s)(xv-yu)}{(x-u)(x(v-t)-u(y-t)+s(y-v))})$. Действуя далее аналогично предыдущему случаю, получим двуметрику (18.16) и соответствующее ей уравнение (18.16′).

Для двуметрики (15.11) квазигрупповая операция $(x,y,u,v,s,t)\otimes(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau) = (x\xi+y\mu+\rho,\ x\eta+y\nu+\tau,\ u\xi+v\mu+\rho,\ u\eta+v\nu+\tau,\ s\xi+t\mu+\rho,\ s\eta+t\nu+\tau)$ с правым нейтральным элементом $e=(1,0,0,1,0,0)$ и правым обратным элементом $(x,y,u,v,s,t)^{-1} = (\frac{v-t}{x(v-t)-u(y-t)+s(y-v)}, \frac{t-y}{x(v-t)-u(y-t)+s(y-v)}, \frac{s-u}{x(v-t)-u(y-t)+s(y-v)}, \frac{x-s}{x(v-t)-u(y-t)+s(y-v)}, \frac{ut-vs}{x(v-t)-u(y-t)+s(y-v)}, \frac{ys-xt}{x(v-t)-u(y-t)+s(y-v)})$. Двуметрика (18.17) и уравнение (18.17′), выражающее феноменологическую симметрию, находятся тем же способом, что и в случае двуметрики (18.15).

Двуметрика (15.12) задает физическую структуру ранга $(5,2)$ и определяет в R^8 квазигрупповую операцию $(x,y,u,v,s,t,g,h)\otimes(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau,\varphi,\omega) = (\frac{x\xi+y\mu+\rho}{x\varphi+y+\omega}, \frac{x\eta+y\nu+\tau}{x\varphi+y+\omega}, \frac{u\xi+v\mu+\rho}{u\varphi+v+\omega}, \frac{u\eta+v\nu+\tau}{u\varphi+v+\omega}, \frac{s\xi+t\mu+\rho}{s\varphi+t+\omega}, \frac{s\eta+t\nu+\tau}{s\varphi+t+\omega}, \frac{g\xi+h\mu+\rho}{g\varphi+h+\omega}, \frac{g\eta+h\nu+\tau}{g\varphi+h+\omega})$ с правым нейтральным элементом $e=(1,0,0,1,\infty_1,\infty_2,\infty_2,\infty_1)$ и правым обратным элементом $(x,y,u,v,s,t,g,h)^{-1}= (\frac{(v-h)(x(t-h)-s(y-h)+g(y-t))}{(g-s)(x(v-h)-u(y-h)+g(y-v))}, \frac{(y-t)(u(t-h)-s(v-h)+g(v-t))}{(s-g)(x(v-t)-u(y-t)+s(y-v))}, \frac{(u-g)(x(t-h)-s(y-h)+g(y-t))}{(s-g)(x(v-h)-u(y-h)+g(y-v))}, \frac{(x-s)(u(t-h)-s(v-h)+g(v-t))}{(g-s)(x(v-t)-u(y-t)+s(y-v))}, \frac{(uh-gv)(x(t-h)-s(y-h)+g(y-t))}{(g-s)(x(v-h)-u(y-h)+g(y-v))}, \frac{(ys-xt)(u(t-h)-s(v-h)+g(v-t))}{(g-s)(x(v-t)-u(y-t)+s(y-v))}, \frac{t-h}{g-s}, \frac{sh-gt}{g-s})$. Двуметрика (18.18) и соответствующая ей функциональная связь (18.18′) находятся аналогично тому, как это делалось для двуметрики (18.15) с включением дополнительного перехода $\varphi \to f^1(m\alpha)$, $\omega \to f^2(m\alpha)$.

Заметим, что в доказательстве теоремы 2 настоящего §18, особенно при выводе обратного элемента и проверке всех уравнений (18.9′)–(18.18′), выражающих феноменологическую симметрию геометрий двух множеств (физических структур), задаваемых соответственно двуметриками (18.9)–(18.18), активно использовались пакеты программ Maple-9 и Mathematica-5.0.

§19. Квазигруппы и феноменологическая симметрия триметрических физических структур ранга (2,2)

Краткое определение триметрических физических структур ранга (2,2) было дано в §16 и там же приведена их полная классификациия (16.6)–(16.16). Доказательством того, что все метрические функции этой классификации действительно задают на трехмерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физические структуры ранга (2,2), могла бы быть явная запись для каждой из них уравнения (16.3), выражающего феноменологическую симметрию соответствующей геометрии двух множеств. Однако использованные формы записи сделали это невозможным для метрических функций (16.13), (16.14), (16.15). Все же уравнения (16.3) удалось найти, перейдя с помощью масштабного преобразования и замены координат в многообразиях к такой форме записи метрических функций, при которой они в R^3 определяют квазигрупповую операцию с правой единицей и правым обратным элементом, совпадающим с исходным. Тогда уравнение (16.3) можно легко воспроизвести по самой метрической функции. Напомним, что аналогичная ситуация имеет место и для двуметрических физических структур ранга $(n+1,2)$, феноменологическая симметрия которых была рассмотрена в предыдущем §18.

Теорема. *Если трехкомпонентная метрическая функция*

$$f = f(x, y, z, \xi, \eta, \vartheta) \tag{19.1}$$

задаёт на 3-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ триметрическую физическую структуру ранга $(2,2)$, то с точностью до масштабного преобразования и замены координат в многообразиях она определяет в R^3 такую квазигрупповую операцию с правым единичным элементом и правым обратным, совпадающим с исходным, что в уравнении, выражающем феноменологическую симметрию соответствующей геометрии двух множеств, под знаком оператора альтернирования $\hat{R}(\alpha\beta)$ стоит выражение, подобное самой метрической функции и получаемое из нее при подстанвках $x \to f^1(i\alpha)$, $y \to f^2(i\alpha)$, $z \to f^3(i\alpha)$, $\xi \to f^1(j\alpha)$, $\eta \to f^2(j\alpha), \vartheta \to f^3(j\alpha)$:

$$\hat{R}(\alpha\beta) f(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^3(i\alpha), f^1(j\alpha), f^2(j\alpha), f^3(j\alpha)) = 0; \tag{19.1$'$}$$

$$f^1 = x - \xi, \quad f^2 = y - \eta \quad f^3 = z - \vartheta, \tag{19.2}$$

$$\left.\begin{array}{c} \hat{R}(\alpha\beta)(f^1(i\alpha) - f^1(j\alpha)) = 0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)(f^2(i\alpha) - f^2(j\alpha)) = 0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)(f^3(i\alpha) - f^3(j\alpha)) = 0; \end{array}\right\} \tag{19.2$'$}$$

$$f^1 = x - \xi, \quad f^2 = y - \eta, \quad f^3 = (x - \xi)\eta + z - \vartheta, \tag{19.3}$$

$$\left.\begin{array}{c} \hat{R}(\alpha\beta)(f^1(i\alpha) - f^1(j\alpha)) = 0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)(f^2(i\alpha) - f^2(j\alpha)) = 0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)((f^1(i\alpha) - f^1(j\alpha)) f^2(j\alpha) + f^3(i\alpha) - f^3(j\alpha)) = 0; \end{array}\right\} \tag{19.3$'$}$$

$$f^1 = (x-\xi)\vartheta, \quad f^2 = (y-\eta-(x-\xi)\ln\vartheta)\vartheta, \ \ f^3 = z/\vartheta, \tag{19.4}$$

$$\left.\begin{array}{c} \hat{R}(\alpha\beta)(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))f^3(j\alpha)=0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)(f^2(i\alpha)-f^2(j\alpha)-(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))\ln f^3(j\alpha))f^3(j\alpha)=0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)f^3(i\alpha)/f^3(j\alpha)=0; \end{array}\right\} \tag{19.4$'$}$$

$$f^1 = (x-\xi)\vartheta, \quad f^2 = (y-\eta)\vartheta, \quad f^3 = z/\vartheta, \tag{19.5}$$

$$\left.\begin{array}{c} \hat{R}(\alpha\beta)(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))f^3(j\alpha)=0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)(f^2(i\alpha)-f^2(j\alpha))f^3(j\alpha)=0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)f^3(i\alpha)/f^3(j\alpha)=0; \end{array}\right\} \tag{19.5$'$}$$

$$f^1 = (x-\xi)\vartheta, \quad f^2 = (y-\eta)/\vartheta, \quad f^3 = z/\vartheta, \tag{19.6}$$

$$\left.\begin{array}{c} \hat{R}(\alpha\beta)(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))f^3(j\alpha)=0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)(f^2(i\alpha)-f^2(j\alpha))/f^3(j\alpha)=0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)f^3(i\alpha)/f^3(j\alpha)=0; \end{array}\right\} \tag{19.6$'$}$$

$$f^1 = (x-\xi)\vartheta, \quad f^2 = y-\eta, \quad f^3 = z/\vartheta, \tag{19.7}$$

$$\left.\begin{array}{c} \hat{R}(\alpha\beta)(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))f^3(j\alpha)=0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)(f^2(i\alpha)-f^2(j\alpha))=0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)f^3(i\alpha)/f^3(j\alpha)=0; \end{array}\right\} \tag{19.7$'$}$$

$$f^1 = (x-\xi)\vartheta, \quad f^2 = (y-\eta)\vartheta^p, \quad f^3 = z/\vartheta, \tag{19.8}$$

$$\left.\begin{array}{c} \hat{R}(\alpha\beta)(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))f^3(j\alpha)=0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)(f^2(i\alpha)-f^2(j\alpha))(f^3(j\alpha))^p=0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)f^3(i\alpha)/f^3(j\alpha)=0, \end{array}\right\} \tag{19.8$'$}$$

где $0 < |p| < 1$;

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = (x-\xi)\cos\vartheta-(y-\eta)\sin\vartheta, \\ f^2 = (x-\xi)\sin\vartheta+(y-\eta)\cos\vartheta, \\ f^3 = z-\vartheta, \end{array}\right\} \tag{19.9}$$

$$\left.\begin{array}{c} \hat{R}(\alpha\beta)((f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))\cos f^3(j\alpha)-(f^2(i\alpha)-f^2(j\alpha))\sin f^3(j\alpha))=0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)((f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))\sin f^3(j\alpha)+(f^2(i\alpha)-f^2(j\alpha))\cos f^3(j\alpha))=0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)(f^3(i\alpha)-f^3(j\alpha))=0; \end{array}\right\} \tag{19.9$'$}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1 = \frac{(x-\xi)\cos\vartheta - (y-\eta)\sin\vartheta}{\exp(\gamma\vartheta)}, \\ f^2 = \frac{(x-\xi)\sin\vartheta + (y-\eta)\cos\vartheta}{\exp(\gamma\vartheta)}, \\ f^3 = z - \vartheta, \end{aligned}\right\} \tag{19.10}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{R}(\alpha\beta)\frac{(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))\cos f^3(j\alpha) - (f^2(i\alpha)-f^2(j\alpha))\sin f^3(j\alpha)}{\exp(\gamma f^3(j\alpha))} = 0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)\frac{(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))\sin f^3(j\alpha) + (f^2(i\alpha)-f^2(j\alpha))\cos f^3(j\alpha)}{\exp(\gamma f^3(j\alpha))} = 0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)(f^3(i\alpha)-f^3(j\alpha)) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{19.10'}$$

где $0 < \gamma < \infty$;

$$\left.\begin{aligned} f^1 = x\sqrt{1-\xi^2-\eta^2-\vartheta^2} - \xi\sqrt{1-x^2-y^2-z^2} + y\vartheta - z\eta, \\ f^2 = y\sqrt{1-\xi^2-\eta^2-\vartheta^2} - \eta\sqrt{1-x^2-y^2-z^2} + z\xi - x\vartheta, \\ f^1 = z\sqrt{1-\xi^2-\eta^2-\vartheta^2} - \vartheta\sqrt{1-x^2-y^2-z^2} + x\eta - y\xi, \end{aligned}\right\} \tag{19.11}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{R}(\alpha\beta)(f^1(i\alpha)\sqrt{1-(f^1(j\alpha))^2-(f^2(j\alpha))^2-(f^3(j\alpha))^2}- \\ -f^1(j\alpha)\sqrt{1-(f^1(i\alpha))^2-(f^2(i\alpha))^2-(f^3(i\alpha))^2}+ \\ +f^2(i\alpha)f^3(j\alpha)-f^3(i\alpha)f^2(j\alpha)) = 0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)(f^2(i\alpha)\sqrt{1-(f^1(j\alpha))^2-(f^2(j\alpha))^2-(f^3(j\alpha))^2}- \\ -f^2(j\alpha)\sqrt{1-(f^1(i\alpha))^2-(f^2(i\alpha))^2-(f^3(i\alpha))^2}+ \\ +f^3(i\alpha)f^1(j\alpha)-f^1(i\alpha)f^3(j\alpha)) = 0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)(f^3(i\alpha)\sqrt{1-(f^1(j\alpha))^2-(f^2(j\alpha))^2-(f^3(j\alpha))^2}- \\ -f^3(j\alpha)\sqrt{1-(f^1(i\alpha))^2-(f^2(i\alpha))^2-(f^3(i\alpha))^2}+ \\ +f^1(i\alpha)f^2(j\alpha)-f^2(i\alpha)f^1(j\alpha)) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{19.11'}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1 = \frac{(x-\xi)\eta^2}{1-(x-\xi)\vartheta\eta^2}, \quad f^2 = \frac{(1-(x-\xi)\vartheta\eta^2)y}{\eta}, \\ f^3 = z - \frac{\vartheta\eta^2}{(1-(x-\xi)\vartheta\eta^2)y^2}; \end{aligned}\right\} \tag{19.12}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{R}(\alpha\beta)\frac{(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))(f^2(j\alpha))^2}{1-(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))f^3(j\alpha)(f^2(j\alpha))^2} = 0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)\frac{(1-(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))f^3(j\alpha)(f^2(j\alpha))^2)f^2(i\alpha)}{f^2(j\alpha)} = 0, \\ \hat{R}(\alpha\beta)(f^3(i\alpha)- \\ -\frac{f^3(j\alpha)(f^2(j\alpha))^2}{(1-(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))f^3(j\alpha)(f^2(j\alpha))^2)(f^2(i\alpha))^2}) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{19.12'}$$

Триметрика (16.6) определяет в пространстве R^3 квазигрупповую операцию $(x,y,z)\otimes(\xi,\eta,\vartheta)=(x+\xi,y+\eta,z+\vartheta)$ с правым нейтральным элементом $e=(0,0,0)$ и правым обратным элементом $(x,y,z)^{-1}=(-x,-y,-z)$. Если по компонентам последнего определить переход к новой системе локальных координат в многообразии $\mathfrak{N}$, то есть если в выражениях (16.6) сделать замену $\xi\to-\xi$, $\eta\to-\eta$, $\vartheta\to-\vartheta$, то получим триметрику (19.2), которая определяет новую квазигрупповую операцию $(x,y,z)\otimes(\xi,\eta,\vartheta)=(x-\xi,y-\eta,z-\vartheta)$ с тем же правым нейтральным элементом $e=(0,0,0)$, но другим правым обратным элементом $(x,y,z)^{-1}=(x,y,z)$, уже совпадающим с исходным. Соответствующее триметрике (19.2) уравнение (19.2$'$), выражающее феноменологическую симметрию задаваемой ею триметрической физической структуры ранга $(2,2)$, имеет под оператором альтернирования $\hat{R}(\alpha\beta)$ подобное ей выражение.

Триметрика (16.7) определяет в R^3 квазигрупповую операцию без нейтрального элемента. Чтобы его получить, надо предварительно в выражениях (16.7) сделать следующее масштабное преобразование: $(f^2-f^3)/f^1\to f^1$, $f^1\to f^2$, $f^3\to f^3$. С новой квазигрупповой операцией $(x,y,z)\otimes(\xi,\eta,\vartheta)=(x+\xi,y-\eta,(x+\xi)\eta+z+\vartheta)$ пространство R^3 уже имеет правый нейтральны1 элемент $e=(0,0,0)$ и правый обратный элемент $(x,y,z)^{-1}=(-x,y,-z)$. Рассуждая далее аналогично случаю (19.2), придём к триметрике (19.3) и соответствующему ей уравнению (19.3$'$).

В выражении триметрики (16.8) предварительно осуществим следующее масштабное преобразование: $f^3\to f^1$, $f^3\ln(f^1/(f^3)^2)/2\to f^2$, $f^2/f^3\to f^3$. Возникающая при этом в R^3 квазигрупповая операция $(x,y,z)\otimes(\xi,\eta,\vartheta)=((x+\xi)\vartheta,(y+\eta-(x+\xi)\ln\vartheta)\vartheta,z/\vartheta)$ имеет правый нейтральный элемент $e=(0,0,1)$ и правый обратный элемент $(x,y,z)^{-1}=(-x,-y,z)$. Триметрика (19.4) и уравнение (19.4$'$), выражающее феноменологическую симметрию задаваемой ею геометрии двух множеств, находятся точно так же, как триметрика (19.2) и уравнение (19.2$'$).

В отношении триметрик (16.9), (16.10) и (16.11) заметим, что они будут частными случаями триметрики (16.12), если множество значений параметра p в ее выражении дополнить значениями $+1,-1$ и 0 соответственно. Поэтому, если при преобразовании триметрики (16.12) на параметр p никаких дополнительных ограничений не возникнет, то соответствующие результаты можно будет перенести и на три предшествующие триметрики. Используя для триметрики (16.12) масштабное преобразование $f^3\to f^1$, $(f^3)^p/f^1\to f^2$, $f^2/f^3\to f^3$, получаем в пространстве R^3 для любых значений параметра p из промежутка $-1\le p\le+1$ квазигрупповую операцию $(x,y,z)\otimes(\xi,\eta,\vartheta)=((x+\xi)\vartheta,(y+\eta)\vartheta^p,z/\vartheta)$ с правым нейтральным элементом $e=(0,0,1)$ и правым обратным элементом $(x,y,z)^{-1}=(-x,-y,z)$. Триметрика (19.8) и уравнение (19.8$'$), выражающее феноменологическую симметрию задаваемой ею физической структуры, находятся аналогично триметрике (19.2) и уравнению (19.2$'$). Триметрики (19.5), (19.6) и (19.7), а также уравнения (19.5$'$), (19.6$'$) и (19.7$'$), очевидно, получаются из триметрики (19.8) и уравнения (19.8$'$), если в них положить соответственно $p=+1$, $p=-1$ и $p=0$.

Аналогичная предыдущему случаю ситуация возникает в отношении триметрики (16.13), которую можно будет рассматривать как частный случай триметрики (16. 14), если для параметра γ в ее выражении допустить значение 0. Предварительно в отношении триметрики (16.14) произведем масштабное преобразование $\sqrt{f^1}\exp(-\gamma f^3)\cos f^3 \to f^1$, $\sqrt{f^1}\exp(-\gamma f^3)\sin f^3 \to f^2$, $f^2 - f^3 \to f^3$. Воозникающая при этом в пространстве R^3 квазигрупповая операция $(x, y, z) \otimes (\xi, \eta, \vartheta) = (((x+\xi)\cos\vartheta - (y+\eta)\sin\vartheta)\exp(-\gamma\vartheta),\ ((x+\xi)\sin\vartheta + (y+\eta)\cos\vartheta)\exp(-\gamma\vartheta),\ z-\vartheta)$, имеет при всех значениях параметра γ правый нейтральный элемент $e = (0, 0, 0)$ и правый обратный элемент $(x, y, z)^{-1} = (-x, -y, z)$. Триметрика (19.10) и уравнение (19.10′), выражающее феноменологическую симметрию задаваемой ею геометрии двух множеств, находятся аналогично триметрике (19.2) и уравнению (19.2′). Преобразования триметрики (16.13) воспроизводятся по преобразованиям триметрики (16.14), в которых надо положить $\gamma = 0$. Поэтому триметрика (19.9) и уравнение (19.9′) получаются из выражения (19.10) и уравнения (19.10′), если в них параметру γ придать нулевое значение.

Для триметрики (16.15) пока не найдены масштабное преобразование и замены координат в многообразиях, при которых она переходит в триметрику (16.17) или (19.11) по нумерации настоящего параграфа. Однако существование такой изотопии следует из локального изоморфизма транзитивных групп движений обеих триметрик, вследствие чего оказываются изоморфными их трехмерные алгебры Ли. Эти алгебры в некотором координатном базисе имеют совпадающие структурные константы, причем соответствующая абстрактная алгебра с точностью до замены координат в преобразуемом трехмерном многообразии имеет единственное представление (см. [2], §8). Триметрика (19.11) в пространстве R^3 определяет квазигрупповую операцию с правым нейтральным элементом $e = (0, 0, 0)$ и правым обратным $(x, y, z)^{-1} = (x, y, z)$, совпадающим с исходным. Поэтому уравнение (19.11′) получается как обычно из самой метрической функции подстановками $x \to f^1(i\alpha)$, $y \to f^2(i\alpha)$, $z \to f^3(i\alpha)$, $\xi \to f^1(j\alpha)$, $\eta \to f^2(j\alpha)$, $\vartheta \to f^3(j\alpha)$.

Наконец, для последней триметрики (16.16) после масштабного преобразования $1/f^3 \to f^1$, $f^1 f^3 \to f^2$, $f^2 - 1/(f^1)^2 f^3 \to f^3$ в пространстве R^3 получаем квазигрупповую операцию $(x, y, z) \otimes (\xi, \eta, \vartheta) = (\dfrac{(x+\xi)\eta^2}{(x+\xi)\eta^2\vartheta + 1}, \dfrac{((x+\xi)\eta^2\vartheta + 1)y}{\eta}, z + \dfrac{\eta^2\vartheta}{((x+\xi)\eta^2\vartheta + 1)y^2})$ с правым нейтральным элементом $e = (0, 1, 0)$ и правым обратным элементом $(x, y, z)^{-1} = (-x, y, -z)$. Триметрику (19.12) и соответствующую ей функциональную связь (19.12′), выражающую феноменологическую симметрию задаваемой ею геометрии двух множеств, находим после соответствующей замены координат $\xi \to -\xi$, $\eta \to \eta$, $\vartheta \to -\vartheta$, определяемой в многообразии $\mathfrak{N}$ обычным образом компонентами обратного элемента.

Справедливость всех уравнений (19.1′), выражающих феноменологическую симметрию триметрических физических структур ранга (2,2), задаваемых каждой из перечисленных в теореме триметрик (19.1), была проверена с помощью математических пакетов Maple-9 и Mathematica-5.0.

Заметим, что общий результат доказанных в этом и предыдущем параграфах теорем, можно расспространить на любую полиметрическую физическую структуру ранга $(n + 1, 2)$.

§20. Двуметрические физические структуры и гиперкомплексные числа ранга 2

Гиперкомплексные числа ранга два задаются выражением

$$z = x + y\mathbf{i}, \tag{20.1}$$

где x, y – произвольные действительные числа, а $\mathbf{i}$ – так называемая мнимая единица как второй элемент в базисе $(\mathbf{1}, \mathbf{i})$ соответствующей двумерной алгебры. Сложение обычное, а умножение, связанное со сложением законом дистрибутивности, определяется квадратом мнимой единицы:

$$\mathbf{i}^2 = a + b\mathbf{i}, \tag{20.2}$$

где a, b – некоторые действительные числа. Так определённое умножение коммутативно и ассоциативно. Переходя к другому базису, для квадрата мнимой единицы вместо выражения (20.2) получаем всего три не сводимые друг к другу варианта [16]:

$$\mathbf{i}^2 = -1, +1, 0. \tag{20.3}$$

Таким образом, гиперкомплексные числа ранга два распадаются на три различных типа: обычные комплексные числа с $\mathbf{i}^2 = -1$ и без делителей нуля; двойные числа с $\mathbf{i}^2 = +1$ и наличием делителей нуля, задаваемых выражением $z = x \pm x\mathbf{i}$; дуальные числа с $\mathbf{i}^2 = 0$ и чисто мнимыми делителями нуля $z = y\mathbf{i}$.

В теории физических структур гиперкомплексные числа ранга два впервые появились при классификации двумерных феноменологически симметричных геометрий (см. [4], §3), задаваемых на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ с локальными координатами x, y метрической функцией

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{20.4}$$

где $<ij> \in \mathfrak{M}^2$. Феноменологическая симметрия выражается уравнением

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)) = 0, \tag{20.5}$$

устанавливающим связь шести "расстояний"для четвёрки $<ijkl> \in \mathfrak{M}^4$.

Метрические функции (20.4) для трёх двумерных геометрий из их полной классификации, а именно, плоскости Гельмгольца:

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \exp(2\gamma arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}), \tag{20.6}$$

где $\gamma \geq 0$; псевдогельмгольцевой плоскости:

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2] \exp(2\beta ar(c)th \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}), \tag{20.7}$$

где $\beta \geq 0$, $\beta \neq 1$, и дуальногельмгольцевой плоскости:

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp(2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}) \tag{20.8}$$

можно записать единообразно, используя комплексные, двойные и дуальные числа $z = x + y\mathbf{i}$ соответственно:

$$f(ij) = (z_i - z_j)\overline{(z_i - z_j)} \exp\left(2\gamma \arg(z_i - z_j)\right), \tag{20.9}$$

где $\overline{z} = x - y\mathbf{i}$ – число, сопряжённое числу $z = x + y\mathbf{i}$. Для плоскости Гельмгольца $\mathbf{i}^2 = -1$, $\gamma \geq 0$ и $\arg z = arctg(y/x)$, причем плоскость Евклида с метрической функцией

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \tag{20.10}$$

является ее частным случаем, когда $\gamma = 0$. Представление точек плоскости Евклида комплексными числами хорошо известно. Для псевдогельмгольцевой плоскости $\mathbf{i}^2 = +1$, $\gamma \geq 0$ и $\gamma \neq 1$, $\arg z = ar(c)th(y/x)$, причем выбор между обратными гиперболическими функциями $arth$ и $arcth$ определяется областью значений дроби y/x. Заметим, что псевдоевклидовая плоскость Минковского с метрической функцией

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 \tag{20.11}$$

является частным случаем псевдогельмгольцевой плоскости, когда $\gamma = 0$. Представление точек плоскости Минковского двойными числами также хорошо известно, причём делители нуля задают её изотропные конусы, для точек образующих которого значение метрической функции (20.11) равно нулю. И наконец, для дуальногельмгольцевой плоскости $\mathbf{i}^2 = 0$, $\arg z = y/x$ и $\gamma = 1$. Обратим внимание на то, что ни в одной из известных двумерных геометрий с невырожденной метрической функцией (20.4) дуальные числа не появились как естественное представление её точек, задавая, однако, точки "экзотической"двумерной феноменологически симметричной геометрии, которая поэтому была названа нами дуальногельмгольцевой плоскостью.

На возможность единой формы записи (20.9) для трёх метрических функций (20.6), (20.7) и (20.8), задающих двумерные феноменологически симметричные геометрии, указал профессор А.М.Широков (кафедра геометрии Казанского университета). Заметим, что все три типа гиперкомплексных чисел ранга два (комплексные, двойные и дуальные) в классификацию двумерных геометрий вошли равноправно, безотносительно к надичию или отсутствию в их системах делителей нуля.

В другой раз комплексные, двойные и дуальные числа появляются в классификации двуметрических физических структур (см. §15). Например, двуметрическая физическая структура ранга $(3, 2)$ задается на двумерном и четырехмерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с локальными координатами x, y и ξ, η, μ, ν двухкомпонентной метрической функцией

$$f = f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu), \tag{20.12}$$

где $f = (f^1, f^2)$. Ее феноменологическая симметрия выражается уравнением

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta)) = 0, \tag{20.13}$$

где $<ijk, \alpha\beta> \in \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^2$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ – некоторая двухкомпонентная функция двенадцати переменных и, в частности, $f(i\alpha) = f(x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \mu_\alpha, \nu_\alpha)$.

В полной классификации двуметрических физических структур ранга $(3, 2)$ имеются шесть различных метрических функций, для трех из которых каноническое координатное представление может быть записано в следующем виде:

$$f^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi + \nu, \tag{20.14}$$

где $\varepsilon = -1, +1, 0$. Две компоненты функции (20.14) могут быть получены гиперкомплексификацией числами ранга 2 однокомпонентной метрической функции

$$f = x\xi + \mu, \tag{20.15}$$

задающей на одномерном и двумерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с локальными координатами x и ξ, μ однометрическую физическую структуру ранга $(3, 2)$ (см. §10). Гиперкомплексификация функции (20.15) числами ранга 2 состоит в переходе от действительной функции f и ее аргументов x, ξ, μ к гиперкомплексным по схеме: $f \to f^1 + f^2\mathbf{i}$, $x \to x + y\mathbf{i}$, $\xi \to \xi + \eta\mathbf{i}$, $\mu \to \mu + \nu\mathbf{i}$ и последующем выделении действительной и мнимой частей.

Для метрических функций (20.14), задающих три различные двуметрические физические структуры ранга $(3, 2)$, уравнение (20.13) может быть получено гиперкомплексификацией числами ранга 2 уравнения

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{20.16}$$

выражающего феноменологическую симметрию однометрической физической структуры ранга $(3, 2)$, задаваемой метрической функцией (20.15). Выделяя действительную и мнимую части, приходим к двум уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon \begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^2(i\beta) & 1 \\ f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) & 1 \\ f^2(k\alpha) & f^2(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^2(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\beta) & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^2(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^2(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{20.17}$$

которые выражают феноменологическую симметрию двуметрической физической структуры того же ранга $(3, 2)$, задаваемой двухкомпонентной метрической функцией (20.14).

Аналогичная ситуация имеет место и для двуметрической физической структуры ранга $(4,2)$, которую на двумерном и шестимерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с локальными координатами x, y и ξ, η, μ, ν, ρ, τ задает двухкомпонентная метрическая функция

$$f = f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau), \tag{20.18}$$

где $f = (f^1, f^2)$. Ее феноменологическая симметрия выражается уравнением

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta), f(l\alpha), f(l\beta)) = 0, \tag{20.19}$$

где $<ijkl, \alpha\beta> \in \mathfrak{M}^4 \times \mathfrak{N}^2$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ – некоторая двухкомпонентная функция шестнадцати переменных и, например, $f(i\alpha) = f(x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \mu_\alpha, \nu_\alpha, \rho_\alpha, \tau_\alpha)$.

Три метрические функции из пяти, задающих различные двуметрические физические структуры ранга $(4,2)$, имеют следующее каноническое координатное представление:

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= \frac{(x+\rho)(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu) - \varepsilon(y+\tau)(x\eta + y\xi + \nu)}{(x+\rho)^2 - \varepsilon(y+\tau)^2}, \\ f^2 &= \frac{(x+\rho)(x\eta + y\xi + \nu) - (y+\tau)(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu)}{(x+\rho)^2 - \varepsilon(y+\tau)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{20.20}$$

где $\varepsilon = -1. +1, 0$. Метрическая функция (20.20), а также уравнение (20.19), выражающее феноменологическую симметрию соответствующей физической структуры ранга (4,2), могут быть получены описанной выше гиперкомплексификацией числами ранга 2 (с добавлением координатного перехода $\rho \to \rho + \tau\mathbf{i}$) однокомпонентной метрической функции

$$f = \frac{x\xi + \mu}{x + \rho}, \tag{20.21}$$

которая задает на одномерном и трехмерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с локальными координатами x и ξ, μ, ρ однометрическую физическую структуру ранга $(4,2)$, и уравнения

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{20.22}$$

выражающего ее феноменологическую симметрию (см. §10).

Гиперкомплексификация числами ранга 2 в описанном выше смысле позволяет найти некоторые двухкомпонентные метрические функции $f = (f^1, f^2)$, задающие двуметрические физические структуры других рангов, и соответствующие уравнения $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) = 0$, выражающие их феноменологическую симметрию. Рассмотрим, например, двуметрическую физическую структуру ранга $(3,3)$, которую на четырёхмерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с локальными координатами x, y, u, v и ξ, η, μ, ν задает двухкомпонентная метрическая функция

$$f = f(x, y, u, v, \xi, \eta, \mu, \nu), \tag{20.23}$$

где $f = (f^1, f^2)$. Ее феноменологическая симметрия выражается уравнением

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(i\gamma), f(j\alpha), f(j\beta), f(j\gamma), f(k\alpha), f(k\beta), f(k\gamma)) = 0, \tag{20.24}$$

где $<ijk, \alpha\beta\gamma> \in \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^3$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ – некоторая двухкомпонентная функция восемнадцати переменных и, например, $f(i\alpha) = f(x_i, y_i, u_i, v_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \mu_\alpha, \nu_\alpha)$.

Классификация двуметрических физических структур ранга $(3, 3)$ ещё не построена, но известна классификация однометрических физических структур того же ранга (см. [2], §5). Произведем гиперкомплексификацию числами ранга 2 двух метрических функций этой классификации

$$f = x\xi + u\mu, \tag{20.25}$$

$$f = x\xi + u + \mu, \tag{20.26}$$

задающих однометрические физические структуры ранга $(3, 3)$, и соответствующих уравнений

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\gamma) \end{vmatrix} = 0, \tag{20.27}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) \\ 1 & f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\gamma) \end{vmatrix} = 0, \tag{20.28}$$

выражающих их феноменологическую симметрию, по следующей схеме: $f \to f^1 + f^2\mathbf{i}$, $x \to x + y\mathbf{i}$, $u \to u + v\mathbf{i}$, $\xi \to \xi + \eta\mathbf{i}$, $\mu \to \mu + \nu\mathbf{i}$. Выделяя действительную и мнимую части, получаем шесть двухкомпонентных метрческих функций

$$f^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + u\mu + \varepsilon v\nu, \quad f^2 = x\eta + y\xi + u\nu + v\mu, \tag{20.29}$$

$$f^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + u + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi + v + \nu, \tag{20.30}$$

задающих на четырехмерных многообразиях двуметрические физические структуры ранга $(3, 3)$, и соответствующие пары уравнений (20.24), выражающих их феноменологическую симметрию, которые, по причине громоздкости, мы явно выписывать не будем.

Имеется ещё одна, седьмая, двухкомпонентная функция

$$f^1 = x\xi + u\mu, \quad f^2 = y\eta + v + \nu, \tag{20.31}$$

для двуметрической физической структуры ранга $(3, 3)$, являющаяся тривиальным наложением однокомпонентных метрических функций (20.25) и (20.26), которая, однако, не может быть получена гиперкомплексификацией числами ранга 2 какой-то одной из них. Соответствующее уравнение (20.24) для такой физической структуры включает уравнение (20.27) с компонентой f^1 и уравнение (20.28) с компонентой f^2 двуметрики (20.31).

По-видимому, приведенная классификация двуметрических физических структур ранга $(3,3)$ не полна, однако другие метрические функции, не сводимые к семи перечисленным, то есть к функциям (20.29), (20.30) и (20.31), пока неизвестны. Тем более не известна еще полная классификация двуметрических физических структур произвольного ранга $(n+1, m+1)$, где $m \leq n$, кроме случая, когда $m = 1$. Но уже сейчас можно построить частичную классификацию таких структур, дополнительную к той, что была проведена выше, с помощью гиперкомплексификации числами ранга 2 однокомпонентных метрических функций (10.5), (10.6) и (10.7) из классификации однометрических физических структур соответствующего ранга, приведенной в §10.

Теорема. *Существуют такие двуметрические физические структуры ранга* $(n{+}1, m{+}1)$*, которые могут быть получены из однометрических структур того же ранга с помощью гиперкомплексификации числами ранга 2 выражений (10.5), (10.6) и (10.7) по следующей схеме* $f \to f^1 + f^2\mathbf{i}$, $x \to x + y\mathbf{i}$, $\xi \to \xi + \eta\mathbf{i}$. *С точностью до масштабного преобразования* $\psi(f) \to f$ *двухкомпонентная метрическая функция* $f = (f^1, f^2)$*, задающая на* $2m$*-мерном и* $2n$*-мерном многообразиях* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *такую двуметрическую физическую структуру ранга* $(n+1, m+1)$*, в надлежаще выбранных в них системах локальных координат* $(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^m)$ *и* $(\xi^1, \ldots, \xi^n, \eta^1, \ldots, \eta^n)$ *определяется следующими каноническими выражениями:*

для $m = n \geq 3$*, то есть рангов* $(4,4)$*,* $(5,5)$ *и т.д.:*

$$\left.\begin{array}{r} f^1 = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m + \varepsilon(y^1\eta^1 + \ldots + y^m\eta^m), \\ f^2 = x^1\eta^1 + \ldots + x^m\eta^m + y^1\xi^1 + \ldots + y^m\xi^m, \end{array}\right\} \tag{20.32}$$

а также:

$$\left.\begin{array}{r} f^1 = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + \varepsilon(y^1\eta^1 + \ldots + y^{m-1}\eta^{m-1}) + x^m + \xi^m, \\ f^2 = x^1\eta^1 + \ldots + x^{m-1}\eta^{m-1} + y^1\xi^1 + \ldots + y^{m-1}\xi^{m-1} + y^m + \eta^m; \end{array}\right\} \tag{20.33}$$

для $m = n - 1 \geq 2$*, то есть рангов* $(4,3)$*,* $(5,4)$ *и т.д.:*

$$\left.\begin{array}{r} f^1 = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m + \varepsilon(y^1\eta^1 + \ldots + y^m\eta^m) + \xi^{m+1}, \\ f^2 = x^1\eta^1 + \ldots + x^m\eta^m + y^1\xi^1 + \ldots + y^m\xi^m + \eta^{m+1}. \end{array}\right\} \tag{20.34}$$

где $\varepsilon = -1, +1, 0$.

Уравнения, выражающие феноменологическую симметрию физических структур, задаваемых двуметриками (20.32), (20.33) и (20.34), получаются гиперкомплексификацией уравнений $(10.5')$, $(10.6')$ и $(10.7')$ соответственно.

§21. Гиперкомплексные числа ранга 3

Рассматривая в предыдущем §20 двуметрические физические структуры, мы установили их связь с комплексными, двойными и дуальными числами, т.е. гиперкомплексными числами ранга 2. Этот факт дает основание предположить, что полиметрические физические структуры будут связаны с гиперкомплексными числами более высокого ранга. Имея в виду это обстоятельство, начнем с их определения, следуя [16].

Пусть n – натуральное число. Рассмотрим выражения вида

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + \ldots + a_n\mathbf{i}_n, \tag{21.1}$$

где $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ – произвольные действительные числа, а $\mathbf{i}_1,\ \mathbf{i}_2,\ \ldots,\ \mathbf{i}_n$ – некоторые символы, которые называются мнимыми единицами. Равенство двух таких выражений:

$$a_0 + a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + \ldots + a_n\mathbf{i}_n = b_0 + b_1\mathbf{i}_1 + b_2\mathbf{i}_2 + \ldots + b_n\mathbf{i}_n,$$

означает, по определению, что

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n.$$

Операции сложения и вычитания определяются формулами

$$(a_0+a_1\mathbf{i}_1+\ldots+a_n\mathbf{i}_n)+(b_0+b_1\mathbf{i}_1+\ldots+b_n\mathbf{i}_n) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)\mathbf{i}_1+\ldots+(a_n+b_n)\mathbf{i}_n,$$

$$(a_0+a_1\mathbf{i}_1+\ldots+a_n\mathbf{i}_n)-(b_0+b_1\mathbf{i}_1+\ldots+b_n\mathbf{i}_n) = (a_0-b_0)+(a_1-b_1)\mathbf{i}_1+\ldots+(a_n-b_n)\mathbf{i}_n,$$

а умножение вводится следующим образом: задаётся матрица умножения, т.е. указывается, чему равны всевозможные произведения $\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_\beta$, где $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$. Каждое такое произведение должно представлять собой снова выражение вида (21.1):

$$\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_\beta = p_{\alpha\beta,\,0} + p_{\alpha\beta,\,1}\mathbf{i}_1 + p_{\alpha\beta,\,2}\mathbf{i}_2 + \ldots + p_{\alpha\beta,\,n}\mathbf{i}_n. \tag{21.2}$$

Набор $n^2(n+1)$ действительных чисел $p_{\alpha\beta,\,0}, p_{\alpha\beta,\,1}, \ldots, p_{\alpha\beta,\,n}$ и задает матрицу умножения (21.2).

Например, в случае обычных комплексных чисел матрица умножения состоит из единственного равенства

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -1.$$

Используя матрицу умножения, можно определить произведение двух произвольных выражений (21.1):

$$(a_0 + a_1\mathbf{i}_1 + \ldots + a_n\mathbf{i}_n)(b_0 + b_1\mathbf{i}_1 + \ldots + b_n\mathbf{i}_n)$$

по обычному правилу умножения суммы на сумму, причем произведения вида $(a_\alpha\mathbf{i}_\alpha)(b_\beta\mathbf{i}_\beta)$ переписывается как $a_\alpha b_\beta(\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_\beta)$ по формуле (21.2). Далее приводятся подобные члены и в итоге получается снова некоторое выражение вида (21.1).

Множество всех выражений вида (21.1), в котором операции сложения и умножения введены, как указано выше, называется *гиперкомплексной системой ранга* $n+1$, а сами выражения (21.1) называются *гиперкомплексными числами.* Как следует из приведённого выше описания, гиперкомплексная система данного ранга полностью определяется матрицей умножения (21.2).

Отметим некоторые свойства операции умножения, справедливые в любой гиперкомплексной системе:

1. Умножение вещественного числа a, рассматриваемого как гиперкомплексное число $a + 0\mathbf{i}_1 + \ldots + 0\mathbf{i}_n$, на произвольное число $\mathbf{b} = b_0 + b_1\mathbf{i}_1 + \ldots + b_n\mathbf{i}_n$ сводится к умножению всех коэффициентов b_0, b_1, ..., b_n на a:

$$(a + 0\mathbf{i}_1 + \ldots + 0\mathbf{i}_n)(b_0 + b_1\mathbf{i}_1 + \ldots + b_n\mathbf{i}_n) = ab_0 + ab_1\mathbf{i}_1 + \ldots + ab_n\mathbf{i}_n$$

и

$$(b_0 + b_1\mathbf{i}_1 + \ldots + b_n\mathbf{i}_n)(a + 0\mathbf{i}_1 + \ldots + 0\mathbf{i}_n) = ab_0 + ab_1\mathbf{i}_1 + \ldots + ab_n\mathbf{i}_n,$$

в частности,

$$1 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \quad \text{и} \quad \mathbf{b} \cdot 1 = \mathbf{b}.$$

2. Если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ – гиперкомплексные числа, то

$$(a\mathbf{u})(b\mathbf{v}) = (ab)(\mathbf{uv}),$$

где a и b - произвольные вещественные числа.

3. Справедливы левый и правый законы дистрибутивности:

$$\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{uv} + \mathbf{uw},$$

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w})\mathbf{u} = \mathbf{vu} + \mathbf{wu}.$$

Свойства **1, 2, 3** очевидным образом следуют из самой процедуры умножения и справедливы в любой гиперкомплексной системе.

В противоположность указанным выше свойствам другие "хорошие"свойства операции умножения, такие, как коммутативность и ассоциативность:

$$\mathbf{uv} = \mathbf{vu} \tag{21.3}$$

$$(\mathbf{uv})\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{vw}) \tag{21.4}$$

выполняются далеко не в каждой гиперкомплексной системе. Например, системы комплексных, двойных и дуальных чисел являются коммутативными, а система кватернионов не коммутативна.

Согласно определению гиперкомплексных чисел, над ними можно производить действия сложения, вычитания и умножения. Что же касается деления, то оно возможно для очень немногих гиперкомплексных систем. Определим для них операцию деления.

Говорят, что данная гиперкомплексная система есть *система с делением*, если каждое из уравнений

$$\mathbf{vx} = \mathbf{u} \quad \text{и} \quad \mathbf{yv} = \mathbf{u} \tag{21.5}$$

имеет единственное решение для любых $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v} \neq 0$. Решение первого уравнения называется *левым частным* от деления $\mathbf{u}$ на $\mathbf{v}$, решение второго – *правым частным*. Вообще говоря, левое и правое частные не совпадают. Примерами систем с делением являются комплексные числа, а без деления – двойные и дуальные. В системах с делением каждое из уравнений (21.5) при нулевой правой части и $\mathbf{v} \neq 0$ имеет только нулевое решение. В системах же без деления такие уравнения могут иметь ненулевые решения, которые называются *делителями нуля*.

От двуметрических физических структур, рассмотренных в предыдущем §20, естественно перейти к триметрическим, задаваемым трёхкомпонентной метрической функцией $f = (f^1, f^2, f^3)$. Их феноменологическая симметрия выражается уравнением $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = 0$, устанавливающим связь всех значений метрической функции для фиксированных по числу и упорядоченных наборов точек исходных множеств. Полная классификация триметрических физических структур, приведенная в §16, проведена только для минимального ранга $(2, 2)$ (см. [2], §8), поэтому при построении их классификации для более высоких рангов, например, $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(3, 3)$ и т.д., можно использовать гиперкомплексные числа ранга 3, задаваемые выражением
$$\mathbf{u} = x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j}, \tag{21.6}$$
где x, y, z – произвольные действительные числа, а $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – мнимые единицы.

Система гиперкомплексных чисел ранга 3 определяется таблицей умножения ее двух мнимых единиц $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$. В самом общем случае при соответствующем выборе базы эта таблица имеет следующий вид:

$$\mathbf{i}^2 = a + b\mathbf{j},\ \mathbf{j}^2 = c + d\mathbf{i},\ \mathbf{ij} = f + g\mathbf{i} + h\mathbf{j},\ \mathbf{ji} = p + q\mathbf{i} + r\mathbf{j}, \tag{21.7}$$

где все десять коэффициентов a, b, c, d, f, g, h, p, q, r являются некоторыми действительными числами. Умножение, задаваемое таблицей (21.7), некоммутативно и неассоциативно, но с обычным сложением связано законом дистрибутивности. Известно, что в любой системе гиперкомплексных чисел ранга 3 имеются делители нуля, чем и обусловлено невнимание к ним со стороны математиков, подобное почти полному забвению двойных и дуальных чисел. Однако наличие делителей нуля не может препятствовать их появлению в классификации триметрических физических структур, как не мешало оно появлению двойных и дуальных чисел с делителями нуля в классификации двумерных геометрий и двуметрических физических структур.

Гиперкомплексификацию однокомпонентных метрических функций числами ранга 3 имеет смысл проводить только ассоциативными числами, так как трехкомпонентные метрические функции, полученные гиперкомплексификацией неассоциативными числами, не задают триметрические физические структуры. Последнее обстоятельство было установлено при определении ранга соответствующей функциональной матрицы достаточно большого размера для системы функций, входящих в уравнение (13.9), с использованием современных возможностей ЭВМ.

Гиперкомплексные ассоциативные числа ранга 3 удобно разбить на два класса

– коммутативные с таблицей умножения:

$$\mathbf{i}^2 = bg + h^2 + b\mathbf{j},\ \mathbf{j}^2 = dh + g^2 + d\mathbf{i},\ \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = bd - gh + g\mathbf{i} + h\mathbf{j} \tag{21.8}$$

и некоммутативные с таблицами умножения:

$$\mathbf{i}^2 = 1,\ \mathbf{j}^2 = 1,\ \mathbf{ij} = -1 + \mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{ji} = -1 - \mathbf{i} - \mathbf{j}; \tag{21.9}$$

$$\mathbf{i}^2 = 1,\ \mathbf{j}^2 = 0,\ \mathbf{ij} = \mathbf{j},\ \mathbf{ji} = -\mathbf{j}. \tag{21.10}$$

Для коммутативных и ассоциативных чисел ранга три с таблицей умножения (21.8) была проведена более тонкая классификация, которую воспроизведем ниже по работе [17]:

$$\left.\begin{array}{c}
\mathbf{1}.\ \mathbf{i}^2 = 0,\ \mathbf{j}^2 = 0,\ \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = 0;\\
\mathbf{2}.\ \mathbf{i}^2 = 1,\ \mathbf{j}^2 = 1,\ \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = -1 + \mathbf{i} + \mathbf{j};\\
\mathbf{3}.\ \mathbf{i}^2 = 1,\ \mathbf{j}^2 = \varepsilon(1 + \mathbf{i}), \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = \mathbf{j},\ \varepsilon = 0, \pm 1;\\
\mathbf{4}.\ \mathbf{i}^2 = 1,\ \mathbf{j}^2 = 1 + \delta(1 + \mathbf{i}),\ \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = -1 + \mathbf{i} + \mathbf{j},\ \delta \neq 0;\\
\mathbf{5}.\ \mathbf{i}^2 = \mathbf{j},\ \mathbf{j}^2 = 0,\ \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = 0;\\
\mathbf{6}.\ \mathbf{i}^2 = \mathbf{j},\ \mathbf{j}^2 = \delta\mathbf{i},\ \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = \delta,\ \delta \neq 0;\\
\mathbf{7}.\ \mathbf{i}^2 = 1 + \mathbf{j},\ \mathbf{j}^2 = 0,\ \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = \mathbf{j};\\
\mathbf{8}.\ \mathbf{i}^2 = 1 + \mathbf{j},\ \mathbf{j}^2 = \delta(1 + \mathbf{i}),\ \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = \delta + \mathbf{j},\ \delta \neq 0;\\
\mathbf{9}.\ \mathbf{i}^2 = 1 + \lambda(1 + \mathbf{j}),\ \mathbf{j}^2 = 1 + \delta(1 + \mathbf{i}),\ \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = -1 + \delta\lambda + \mathbf{i} + \mathbf{j},\\
\delta \neq 0,\ \lambda \neq 0.
\end{array}\right\} \tag{21.8'}$$

§22. Триметрические физические стркутуры и гиперкомплексные числа ранга 3

Триметрические физические структуры ранга $(n + 1, m + 1)$ являются частным случаем полиметрических, определенных в §13, и задаются на $3m$-мерном и $3n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ трехкомпонентной метрической функцией $f = (f^1, f^2, f^3)$. Ее феноменологическая симметрия выражается уравнением (13.9): $\Phi = 0$, в котором $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ – трехкомпонентная функция. Триметрика f может быть получена гиперкомплексификацией числами ранга 3 однокомпонентных метрических функций, задающих физические структуры. Ранг структуры при этом сохраняется, однако уравнение, выражающее феноменологическую симметрию, не всегда удается найти с помощью гиперкомплексификации соответствующего уравнения для однометрической физической структуры. Дело в том. что для некоммутативных гиперкомплексных чисел неопределенной становится сама гиперкомплексификация. Если же гиперкомплексная система коммутативна, то гиперкомплексификация числами ранга 3 позволяет найти и уравнение, выражающее феноменологическую симметрию. В любом случае существование этого уравнения можно установить по рангу функциональной матрицы размера $3(n+1)(m+1) \times (3m(n+1)+3n(m+1))$ для $3(n+1)(m+1)$ функций, входящих в уравнение (13.9) и зависящих от $3m(n+1)+3n(m+1)$ переменных – координат всех точек кортежа $<ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau>$.

Проведем, например, гиперкомплексификацию числами ранга 3 с матрицами умножения (21.8), (21.9) и (21.10) однокомпонентной метрической функции (20.15) по схеме $f \to f^1 + f^2\mathbf{i} + f^3\mathbf{j}$, $x \to x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j}$, $\xi \to \xi + \eta\mathbf{i} + \rho\mathbf{j}$, $\mu \to \mu + \nu\mathbf{i} + \tau\mathbf{j}$. После выделения одной действительной и двух мнимых частей приходим к трем классам триметрик:

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= x\xi + (bg+h^2)y\eta + (bd-gh)(y\rho+z\eta) + (dh+g^2)z\rho + \mu, \\ f^2 &= x\eta + y\xi + g(y\rho+z\eta) + dz\rho + \nu, \\ f^3 &= x\rho + z\xi + h(y\rho+z\eta) + by\eta + \tau; \end{aligned}\right\} \tag{22.1}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= x\xi + (y-z)(\eta-\rho) + \mu, \\ f^2 &= (x-z)\eta + y(\xi+\rho) + \nu, \\ f^3 &= (x+y)\rho + z(\xi-\eta) + \tau; \end{aligned}\right\} \tag{22.2}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= x\xi + y\eta + \mu, \\ f^2 &= x\eta + y\xi + \nu, \\ f^3 &= (x+y)\rho + z(\xi-\eta) + \tau. \end{aligned}\right\} \tag{22.3}$$

Теорема. *Трехкомпонентные метрические функции (22.1), (22.2) и (22.3) задают на трехмерном и шестимерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ триметрические физические структуры ранга (3,2).*

Существование уравнения $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = 0$, выражающего феноменологическую симметрию триметрических физических структур ранга (3,2), задаваемых перечисленными в теореме триметриками, устанавливается по рангу соответствующей функциональной матрицы размера 18×21 системы шести трехкомпонентных функций, входящих в него, от 21 переменной – координат точек кортежа $< ijk, \alpha\beta >$. При вычислении ранга этой матрицы использовались пакеты программ Maple-9 и Mathematika-5.0. Ранг оказался ровно на три единицы меньше числа функций в их системе, что и доказывает существование уравнения $\Phi = 0$. Заметим, что для триметрики (22.1) можно найти и явную запись этого уравнения, если провести гиперкомплексификацию числами ранга 3 с матрицей коммутативного умножения (21.8) однокомпонентного уравнения (20.16). Для случая некоммутативного умножения (21.9) или (21.10) гиперкомплексификация уравнения (20.16) становится не совсем ясной, так как возникает неопределенность при раскрытии определителя в правой его части.

Проведение аналогичной гиперкомплексификации числами ранга 3 однокомпонентных метрических функций (20.21) и (20.25), (20.26) по описанной выше схеме не представляет большого труда, также как и проверка того, что получающиеся трехкомпонентные метрические функции задают триметрические физические структуры ранга (4,2) и ранга (3,3) соответственно.

Справочно сообщим, что была проведена гиперкомплексификация однокомпонентной метрической функции (20.15) также и кватернионами, то есть гиперкомплексными числами ранга 4, задаваемыми выражением

$$\mathbf{v} = x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + u\mathbf{k}, \tag{22.4}$$

где x, y, z, u – произвольные действительные числа, а $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – разные мнимые единицы со следующей матрицей умножения:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1,\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k},\ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i},\ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}. \tag{22.5}$$

Гиперкомплексификация выражения (20.15) была проведена по схеме $f \to f^1 + f^2\mathbf{i} + f^3\mathbf{j} + f^4\mathbf{k}$, $x \to x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, $\xi \to \xi + \eta\mathbf{i} + \rho\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$, $\mu \to \mu + \nu\mathbf{i} + \tau\mathbf{j} + \sigma\mathbf{k}$, и установлено, что полученная четырёхкомпонентная метрическая функция

$$\left.\begin{array}{l} f^1 = x\xi - y\eta - z\rho - u\lambda + \mu, \\ f^2 = x\eta + y\xi + z\lambda - u\rho + \nu, \\ f^3 = x\rho - y\lambda + z\xi + u\eta + \tau, \\ f^4 = x\lambda + y\rho - z\eta + u\xi + \sigma \end{array}\right\} \tag{22.6}$$

на четырехмерном и восьмимерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ действительно задает четыреметрическую физическую структуру ранга $(3, 2)$.

Таким образом, для построения классификации полиметрических физических структур можно использовать ассоциативные гиперкомплексные числа различных рангов, безотносительно к наличию или отсутствию в них делителей нуля.

§23. Некоторые примеры и задачи

Гиперкомплексификация метрических функций числами различных рангов состоит в переходе от действительных функций и их переменных к гиперкомплексным с последующим выделением реальной и мнимых частей. В результате получаются полиметрики, задающие физические структуры, однако проверка этого не всегда проста. В силу сложности уравнений, выражающих феноменологическую симметрию, и большого размера соответствующих функциональных матриц, при проверке необходимо использовать современные возможности ЭВМ в виде различных математических пакетов, позволяющих значительно ускорить соответствующие вычисления.

Пример 1. Провести гиперкомплексификацию метрической функции (20.15) кватернионами (22.4) с матрицей умножения (22.5), сравнив полученные при этом выражения для компонет четыреметрики с приведенными в предыдущем §22.

Решение. Первый этап гиперкомплексификации состоит в замене функции f и ее координат x, ξ, μ в выражении (20.15):

$$f = x\xi + \mu$$

на соответствующие кватернионные по схеме, описанной в конце §22:

$$f \to f^1 + f^2\mathbf{i} + f^3\mathbf{j} + f^4\mathbf{k},\ x \to x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + u\mathbf{k},$$

$$\xi \to \xi + \eta\mathbf{i} + \rho\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k},\ \mu \to \mu + \nu\mathbf{i} + \tau\mathbf{j} + \sigma\mathbf{k}.$$

Воспроизведем в деталях все соответствующие выкладки, используя таблицу умножения (22.5):

$$f^1 + f^2\mathbf{i} + f^3\mathbf{j} + f^4\mathbf{k} =$$

$$= (x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + u\mathbf{k})(\xi + \eta\mathbf{i} + \rho\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}) + \mu + \nu\mathbf{i} + \tau\mathbf{j} + \sigma\mathbf{k} =$$

$$= x\xi + x\eta\mathbf{i} + x\rho\mathbf{j} + x\lambda\mathbf{k} + y\xi\mathbf{i} + y\eta\mathbf{i}^2 + y\rho\mathbf{ij} + y\lambda\mathbf{ik} + z\xi\mathbf{j} + z\eta\mathbf{ji} + z\rho\mathbf{j}^2 + z\lambda\mathbf{jk} +$$

$$+ u\xi\mathbf{k} + u\eta\mathbf{ki} + u\rho\mathbf{kj} + u\lambda\mathbf{k}^2 + \mu + \nu\mathbf{i} + \tau\mathbf{j} + \sigma\mathbf{k} =$$

$$= x\xi + x\eta\mathbf{i} + x\rho\mathbf{j} + x\lambda\mathbf{k} + y\xi\mathbf{i} - y\eta + y\rho\mathbf{k} - y\lambda\mathbf{j} + z\xi\mathbf{j} - z\eta\mathbf{k} - z\rho + z\lambda\mathbf{i} +$$

$$+ u\xi\mathbf{k} + u\eta\mathbf{j} - u\rho\mathbf{i} - u\lambda + \mu + \nu\mathbf{i} + \tau\mathbf{j} + \sigma\mathbf{k} =$$

$$x\xi - y\eta - z\rho - u\lambda + \mu + (x\eta + y\xi + z\lambda - u\rho + \nu)\mathbf{i} +$$

$$+ (x\rho - y\lambda + z\xi + u\eta + \tau)\mathbf{j} + (x\lambda + y\rho - z\eta + u\xi + \sigma)\mathbf{k}.$$

Выделяя в полученном равенстве одну реальную часть и три мнимые, получаем, очевидно, выражения (22.6) компонент четыреметрики. То, что эта четырехкомпонентная метрическая функция действительно задает физическую структуру ранга (3,2), проверяется по рангу соответствующей функциональной матрицы размера 24×28 системы 24 функций – компонет четыреметрики для шести пар точек кортежа $<ijk, \alpha\beta>$, зависящих в общем случае от 28 переменных – координат всех его точек. Ранг должен быть равен 20, но его вычисление вручную без ЭВМ, конечно же, невозможно.

Задача 1. Провести гиперкомплексификацию метрической функции $f = \xi x + \mu$ кватернионами (22.4) с матрицей умножения (22.5), сравнив полученные при этом выражения для компонет четыреметрики с выражениями (22.6), полученными при гиперкомплексификации теми же кватернионами метрической функции (20.15): $f = x\xi + \mu$, в которой порядок следования координат x и ξ обычный, учитывая некоммутативность умножения кватернионов. Установить, задает ли она четыреметрическую физическую структуру ранга (3,2).

Указание к решению. Изучить пример 1, воспроизведя самостоятельно его решение.

Задача 2. Используя математические пакеты Maple-9 или Mathematica-5.0, установить, задают ли триметрики (22.1), (22.2), (22.3) и четыреметрика (22.6) физические структуры ранга (3,2).

Указание к решению. Прочитать внимательно доказательство теоремы из предыдущего §22. Для четыреметрики (22.6) соответствующая функциональная матрица имеет размер 24×28, а уравнение $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) = 0$, выражающее феноменологическую симметрию, будет существовать только в том случае, если ранг этой матрицы окажется равным 20, то есть на четыре единицы меньше числа функций – компонет четыреметрики для шести пар точек кортежа $< ijk, \alpha\beta >$, зависящих в общей сложности от 28 переменных – координат всех его точек.

Задача 3. Провести гиперкомплексификацию метрических функций (20.21) и (20.25), (20.26) числами ранга 3 с матрицами умножения (21.8), (21.9) (21.10). Установить, задают ли получающиеся триметрики физические структуры рангов (4,2) и (3,3).

Указание к решению. Смотри решение примера 1 и указание к задаче 2. Соответствующие функциональные матрицы будут иметь размер 24×30 и 27×36, а их ранги должны быть равны 21 и 24, то есть на три единицы меньше числа функций – компонет триметрик для всех пар точек кортежей $< ijkl, \alpha\beta >$ и $< ijk, \alpha\beta\gamma >$. Заметим, что в общем случае эти функции зависят от 30 и 36 переменных – координат всех точек этих кортежей.

Задача 4. Получить двухкомпонентные метрические функции (18.11)–(18.18). Используя различные математические пакеты для ЭВМ, например, Maple-9 или Mathematica-5.0, установить, что уравнения (18.11′)–(18.18′) действительно выражают феноменологическую симметрию физических структур, задаваемых двуметриками (18.11)–(18.18) соответственно.

Указание к решению. Сначала надо изучить выбранный для вычисления пакет и освоить навыки работы с ним. Затем подставить в каждое из уравнений (18.11′)–(18.18′) соответствующую метрическую функцию и убедиться в том. что по координатам всех точек кортежа оно выполняется тождественно. Для вывода выражений (18.11)–(18.18) следует обратиться к доказательству теоремы 2 §18.

Задача 5. Получить трехкомпонентные метрические функции (19.4)–(19.12). Используя различные математические пакеты для ЭВМ, например, Maple-9 или Mathematica-5.0, установить, что уравнения (19.4′)–(19.12′) действительно выражают феноменологическую симметрию физических структур ранга (2,2), задаваемых триметриками (19.4)–(19.12) соответственно.

Указание к решению. Смотри указание к решению задачи 4. Для вывода выражений (19.4)–(19.12) следует обратиться к доказательству теоремы §19.

Заключение

Итак, феноменологически симметричные геометрии двух множеств, наделенные групповой симметрией, действительно содержательны в физическом и математическом смыслах. Естественно, что основными задачами являются их полная классификация и изучение свойств каждой из них. Решение этих задач еще далеко от завершения, что дает большой простор для исследования каждому, кто имеет творческие способности. Их выявлению и развитию должно послужить предлагаемое пособие, особенно выполнение помещенных ниже контрольных заданий. Перечень нерешенных к настоящему времени проблем геометрии двух множеств можно найти в монографии "Групповая симметрия физических структур"(см. [2], стр. 189-190), которая для данного пособия является теоретическим фундаментом.

Варианты контрольных заданий

Вариант 1: §7, задача 1 – (7.23); §17, задача 4 – (15.7).

Вариант 2: §7, задача 1 – (7.24); §17, задача 4 – (15.8).

Вариант 3: §7, задача 1 – (7.25); §17, задача 5 – (15.5).

Вариант 4: §7, задача 1 – (7.26); §17, задача 5 – (15.6).

Вариант 5: §7, задача 1 – (7.27); §17, задача 5 – (15.7).

Вариант 6: §7, задача 1 – (7.28); §17, задача 5 – (15.8).

Вариант 7: §7, задача 1 – (7.29); §17, задача 6 – (16.7).

Вариант 8: §7, задача 1 – (7.30); §17, задача 6 – (16.8).

Вариант 9: §7, задача 1 – (7.31); §17, задача 6 – (16.9).

Вариант 10: §7, задача 1 – (7.32); §17, задача 6 – (16.10).

Вариант 11: §7, задача 2 – (7.33); §17, задача 6 – (16.11).

Вариант 12: §7, задача 2 – (7.34); §17, задача 6 – (16.12).

Вариант 13: §7, задача 2 – (7.35); §17, задача 6 – (16.13).

Вариант 14: §7, задача 2 – (7.36); §17, задача 6 – (16.14).

Вариант 15: §7, задача 2 – (7.37); §17, задача 6 – (16.15).

Вариант 16: §7, задача 2 – (7.38); §17, задача 6 – (16.16).

Вариант 17: §7, задача 2 – (7.39); §17, задача 6 – (16.17).

Вариант 18: §7, задача 2 – (7.40); §17, задача 7 – (16.7).

Вариант 19: §7, задача 2 – (7.41); §17, задача 7 – (16.8).

Вариант 20: §7, задача 2 – (7.42); §17, задача 7 – (16.9).

Вариант 21: §7, задача 2 – (7.43); §17, задача 7 – (16.10).

Вариант 22: §7, задача 2 – (7.44); §17, задача 7 – (16.11).

Вариант 23: §7, задача 2 – (7.45); §17, задача 7 – (16.12).

Вариант 24: §7, задача 3 – (7.46); §17, задача 7 – (16.13).

Вариант 25: §7, задача 3 – (7.47); §17, задача 7 – (16.14).

Вариант 26: §7, задача 3 – (7.48); §17, задача 7 – (16.15).

Вариант 27: §7, задача 3 – (7.49); §17, задача 7 – (16.16).

Вариант 28: §7, задача 3 – (7.50); §17, задача 7 – (16.17).

Вариант 29: §7, задача 3 – (7.51); §17, задача 8 – (16.7), (16.7′).

Вариант 30: §7, задача 3 – (7.52); §17, задача 8 – (16.8), (16.8′).

Вариант 31: §7, задача 3 – (7.53); §17, задача 8 – (16.9), (16.9′).

Вариант 32: §7, задача 3 – (7.54); §17, задача 8 – (16.10), (16.10′).

Вариант 33: §7, задача 3 – (7.55); §17, задача 8 – (16.11), (16.11′).

Вариант 34: §7, задача 4 – (7.56); §17, задача 8 – (16.12), (16.12′).

Вариант 35: §7, задача 4 – (7.57); §17, задача 8 – (16.16), (16.16′).

Вариант 36: §7, задача 4 – (7.58); §17, задача 9 – (16.7).

Вариант 37: §7, задача 4 – (7.59); §17, задача 9 – (16.8).

Вариант 38: §7, задача 4 – (7.60); §17, задача 9 – (16.9).

Вариант 39: §7, задача 4 – (7.61); §17, задача 9 – (16.10).

Вариант 40: §7, задача 4 – (7.62); §19, задача 9 – (16.11).

Вариант 41: §7, задача 4 – (7.63); §17, задача 9 – (16.12).

Вариант 42: §7, задача 4 – (7.64); §17, задача 9 – (‘6.13).

Вариант 43: §7, задача 4 – (7.65); §17, задача 9 – (16.14).

Вариант 44: §7, задача 4 – (7.66); §17, задача 9 – (16.15).

Вариант 45: §7, задача 4 – (7.67); §17, задача 9 – (16.16).

Вариант 46: §7, задача 4 – (7.68); §17, задача 9 – (16.17).

Вариант 47: §7, задача 4 – (7.69); §17, задача 10 – (16.7).

Вариант 48: §7, задача 4 – (7.70); §17, задача 10 – (16.8).

Вариант 49: §7, задача 4 – (7.71); §17, задача 10 – (16.9).

Вариант 50: §7, задача 4 – (7.72); §17, задача 10 – (16.10).

Вариант 51: §7, задача 4 – (7.73); §17, задача 10 – (16.11).

Вариант 52: §12, задача 1 – (12.8); §17, задача 10 – (16.12).

Вариант 53: §12, задача 1 – (12.9); §17, задача 10 – (16.13).

Вариант 54: §12, задача 1 – (12.10); §17, задача 10 – (16.14).

Вариант 55: §12, задача 1 – (12.11); §17, задача 10 – (16.15).

Вариант 56: §12, задача 1 – (12.12); §17, задача 10 – (16.16).

Вариант 57: §12, задача 1 – (12.13); §17, задача 10 – (16.17).

Вариант 58: §12, задача 1 – (12.14); §23, задача 1 – (22.4).

Вариант 59: §12, задача 1 – (12.15); §23, задача 2 – (22.1).

Вариант 60: §12, задача 1 – (12.16); §23, задача 2 – (22.2).

Вариант 61: §12, задача 2 – (12.13); §23, задача 2 – (22.3).

Вариант 62: §12, задача 2 – (12.14); §23, задача 2 – (22.6).

Вариант 63: §12, задача 2 – (12.15); §23, задача 3 – (20.21), (21.8).

Вариант 64: §12, задача 2 – (12.16); §23, задача 3 – (20.21), (21.9).

Вариант 65: §17, задача 1 – (15.5); §23, задача 3 – (20.21), (21.10).

Вариант 66: §17, задача 1 – (15.6); §23, задача 3 – (20.25), (21.8).

Вариант 67: §17, задача 1 – (15.7); §23, задача 3 – (20.25), (21.9).

Вариант 68: §17, задача 1 – (15.8); §23, задача 3 – (20.25), (21.10).

Вариант 69: §17, задача 1 – (15.9); §23, задача 3 – (20.26), (21.8).

Вариант 70: §17, задача 1 – (15.10); §23, задача 3 – (20.26), (21.9).

Вариант 71: §17, задача 1 – (15.11); §23, задача 3 – (20.26), (21.10).

Вариант 72: §17, задача 1 – (15.12); §23, задача 4 – (18.11), (18.11′).

Вариант 73: §17, задача 2 – (15.5); §23, задача 4 – (18.12), (18.12′).

Вариант 74: §17, задача 2 – (15.6); §23, задача 4 – (18.13), (18.13′).

Вариант 75: §17, задача 2 – (15.7); §23, задача 4 – (18.14), (18.14′).

Вариант 76: §17, задача 2 – (15.8); §23, задача 4 – (18.15), (18.15′).

Вариант 77: §17, задача 2 – (15.9); §23, задача 4 – (18.16), (18.16′).

Вариант 78: §17, задача 2 – (15.10); §23, задача 4 – (18.17), (18.17′).

Вариант 79: §17, задача 2 – (15.11); §23, задача 4 – (18.18), (18.18′).

Вариант 80: §17, задача 2 – (15.12); §23, задача 5 – (19.4), (19.4′).

Вариант 81: §17, задача 3 – (15.5), (15.5′); §23, задача 5 – (19.5), (19.5′).

Вариант 82: §17, задача 3 – (15.6), (15.6′); §23, задача 5 – (19.6), (19.6′).

Вариант 83: §17, задача 3 – (15.7),(15.7′); §23, задача 5 – (19.7), (19.7′).

Вариант 84: §17, задача 3 – (15.8), (15.8′); §23, задача 5 – (19.8), (19.8′).

Вариант 85: §17, задача 3 – (15.9). (15.9′); §23, задача 5 – (19.9), (19.9′).

Вариант 86: §17, задача 3 – (15.11), (15.11′); §23, задача 5 – (19.10), (19.10′).

Вариант 87: §17, задача 4 – (15.5); §23, задача 5 – (19.11), (19.11′).

Вариант 88: §17, задача 4 – (15.6); §23, задача 5 – (19.12), (19.12′).

Литература

1. Кулаков Ю.И. Теория физических структур. М.: Доминико, 2004.

2. Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия физических структур. Барнаул: БГПУ, Горно-Алтайск: ГАГУ, 2003.

3. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. Новосибирск: НГУ, 1968.

4. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии. Горно-Алтайск: ГАГУ, Барнаул: БГПУ, 2004.

5. Михайличенко Г.Г. Бинарная физическая структура ранга (3,2) // Сиб.мат. журн., 1973, Т.14, №5, С.1057-1064.

6. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

7. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

8. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947.

9. Михайличенко Г.Г. Групповые свойства физических структур / Ред. "Сиб.мат. журн.", 1989, 35с., деп. в ВИНИТИ 10.03.89, №1584–В89 (Реферат // Сиб.мат. журн., 1990, Т.31, №3, С.210).

10. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР, 1972, Т.206, №5, С.1056–1058.

11. Михайличенко Г.Г. Математический аппарат теории физических структур. Горно-Алтайск: ГАГУ, 1997.

12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.

13. Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические структуры ранга $(n+1,2)$ // Сиб.мат.журн., 1993, Т.34, №3, С.132–143.

14. Михайличенко Г.Г. Трехмерные алгебры Ли локально транзитивных преобразований пространства // Известия вузов. Математика, 1997, №9, С.41–48.

15. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. М.: МГУ, 1996. Часть 2. Теория физических взаимодействий. М.: МГУ, 1998.

16, Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973.

17. Мурадов Р.М. Гиперкоплексные числа ранга 3 // Наука. Культура. Образование, 2004, №15/16, С.107.

В.А. Кыров

Классификация четыреметрических физических структур ранга (2,2)

В теории физических структур исключительно важное значение имеет классификация невырожденных метрических функций, задающих эти структуры. Метрическая функция, согласно теореме об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий, доказаной Г.Г.Михайличенко [3,4], является двухточечным инвариантом некоторой локальной группы Ли преобразований. Согласно этой теореме для нахождения всех метрических функций достаточно построить полную классификацию локальных групп Ли преобразований многообразий определенной размерности. В данной работе проводится полная классификация четырехмерных алгебр Ли локально просто транзитивных групп Ли преобразований пространства R^4, а затем находятся все метрические функции как невырожденные двухточечные инварианты.

1. Четырехмерные алгебры Ли. Базисные операторы четырехмерной алгебры Ли локальной группы Ли преобразований пространства R^4 имеют вид:

$$X_\mu = \lambda_\mu(x,y,z,w)\partial_x + \sigma_\mu(x,y,z,w)\partial_y + \tau_\mu(x,y,z,w)\partial_z + \theta_\mu(x,y,z,w)\partial_w, \qquad (1)$$

где $\mu = 1,2,3,4$, причем $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_z = \partial/\partial z$, $\partial_w = \partial/\partial w$. Нас будут интересовать только локально транзитивные группы Ли преобразований пространства R^4. Как хорошо известно, необходимым и достаточным условием локальной транзитивности группы Ли преобразований является отличие от нуля определителя матрицы коэффициентов в выражениях (1) для операторов X_μ:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \sigma_1 & \tau_1 & \theta_1 \\ \lambda_2 & \sigma_2 & \tau_2 & \theta_2 \\ \lambda_3 & \sigma_3 & \tau_3 & \theta_3 \\ \lambda_4 & \sigma_4 & \tau_4 & \theta_4 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2)$$

Коммутаторы базисных операторов алгебры Ли линейно выражаются через них же [1]. С точностью до изоморфизма коммутаторы $[X_1,X_2]$, $[X_3,X_1]$, $[X_2,X_3]$, $[X_1,X_4]$, $[X_2,X_4]$, $[X_3,X_4]$ четырехмерных вещественных алгебр Ли задаются соответственно следующими выражениями [2,3]:

$$0,\ 0,\ 0,\ \varepsilon X_1,\ kX_2,\ lX_3; \qquad (3)$$

$$0,\ 0,\ 0,\ kX_1+X_2,\ -X_1+kX_2,\ lX_3; \qquad (4)$$

$$0,\ 0,\ 0,\ kX_1+X_2,\ kX_2,\ \varepsilon X_3; \qquad (5)$$

$$0,\ 0,\ 0,\ kX_1+X_2,\ kX_2+X_3,\ \varepsilon X_3; \qquad (6)$$

$$0,\ 0,\ X_1,\ cX_1,\ X_2,\ (c-1)X_3; \tag{7}$$

$$0,\ 0,\ X_1,\ 2X_1,\ X_2,\ X_2+X_3; \tag{8}$$

$$0,\ 0,\ X_1,\ qX_1,\ X_3,\ -X_2+qX_3; \tag{9}$$

$$0,\ -X_1,\ 0,\ 0,\ X_2,\ 0; \tag{10}$$

$$0,\ -X_1,\ X_2,\ X_2,\ -X_1,\ 0; \tag{11}$$

$$X_3,\ X_2,\ X_1,\ 0,\ 0,\ 0; \tag{12}$$

$$X_3,\ X_2,\ -X_1,\ 0,\ 0,\ 0, \tag{13}$$

где $\varepsilon = 0, 1$; $q^2 < 4$; k, l, c – произвольные числа.

Заметим, что по сравнению с [2] здесь в алгебрах (10) и (13) произведен переход к другому базису (в алгебре (10) была осуществленна только перестановка операторов X_1 и X_2, а в алгебре (13) переход к новому базису был следующий: $(X_1 + X_3)/2 \to X_1$, $X_2 \to X_2$, $(X_1 - X_3)/2 \to X_3$, $X_4 \to X_4$. Этот переход к другим базисам в алгебрах Ли был предложен Г.Г. Михайличенко [3] для удобства классификации их представлений инфинитезимальными операторами.

В дальнейших рассуждениях нам понадобится утверждение, доказательство которого можно найти, например, в [1]:

Теорема 1. *Пусть имеется r-мерная вещественная алгебра Ли с базисом $X_1, ..., X_r$ и следующей структурой коммутационных соотношений в этом базисе: $[X_\beta, X_\gamma] = C^\alpha_{\beta\gamma} X_\alpha$, где $\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., r$, причем α – немой индекс суммирования, и $C^\alpha_{\beta\gamma}$ – так называемые структурные константы. Подпространство размерности s с базисом $X_1, ..., X_s$ является подалгеброй r-мерной алгебры Ли тогда и только тогда, когда $C^{\alpha''}_{\beta'\gamma'} = 0$, где $\beta', \gamma' = 1, ..., s$; $\alpha'' = s+1, ..., r$, и идеалом – тогда и только тогда, когда $C^{\alpha''}_{\beta'\gamma} = 0$, где $\beta' = 1, ..., s$; $\alpha'' = s+1, ..., r$; $\gamma = 1, ..., r$.*

Сформулированная выше теорема позволяет выделить в четырехмерных алгебрах Ли (3) – (13) трехмерные подалгебры. Запишем соответствующие выражения для трех возможных коммутаторов $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_1]$, $[X_2, X_3]$ базисных операторов X_1, X_2, X_3 этих подалгебр:

$$0,\ 0,\ 0; \tag{14}$$

$$0,\ 0,\ X_1; \tag{15}$$

$$0,\ -X_1,\ X_2; \tag{16}$$

$$0,\ -X_1,\ 0; \tag{17}$$

$$X_3,\ X_2,\ X_1; \tag{18}$$

$$X_3,\ X_2,\ -X_1. \tag{19}$$

Заметим, что алгебры (3) – (6) содержат подалгебру (14), алгебры (7) – (9) – подалгебру (15), алгебра (10) – подалгебру (17), алгебра (11) – подалгебру (16) и, наконец, алгебры (12) и (13) – подалгебры (18) и (19) соответственно. Перейдем теперь к рассмотрению локально транзитивных групп Ли преобразований пространства R^4.

Лемма 1. *Если четырехмерная алгебра Ли локально транзитивной группы Ли преобразований пространства R^4 содержит трехмерную подалгебру, то эта подалгебра эквивалентна трехмерной алгебре Ли локально транзитивной группы Ли преобразований пространства R^3.*

Под эквивалентностью в данном случае понимается возможность перехода базисных операторов одной алгебры в соответствующие базисные операторы другой при некоторой локально обратимой замене координат.

Рассмотрим отдельно четыре следующих случая: трехмерная подалгебра эквивалентна трехмерной алгебре Ли преобразований пространств R^1, R^2, R^3 и R^4 соответственно.

Первый случай. Подалгебра эквивалентна трехмерной алгебре Ли преобразований прямой R^1 и потому базисные операторы в подходящей системе координат имеют вид:

$$X_\mu = \lambda_\mu \partial_x, \; X_4 = \lambda_4 \partial_x + \sigma_4 \partial_y + \tau_4 \partial_z + \theta_4 \partial_w,$$

где $\lambda_\mu = \lambda_\mu(x)$, $\mu = 1, 2, 3$, причем первые три оператора составляют базис трехмерной подалгебры. Очевидно, что в данном случае определитель (2), составленный из коэффициентов этих операторов, будет равен нулю и потому исходная группа преобразований, в противоречие с предположением леммы 1, не может быть локально транзитивной.

Второй случай. Подалгебра эквивалентна трехмерной алгебре Ли преобразований плоскости R^2 и поэтому в подходящей системе координат для базисных операторов имеем следующие выражения:

$$X_\mu = \lambda_\mu \partial_x + \sigma_\mu \partial_y, \; X_4 = \lambda_4 \partial_x + \sigma_4 \partial_y + \tau_4 \partial_z + \theta_4 \partial_w,$$

где $\lambda_\mu = \lambda_\mu(x, y)$, $\sigma_\mu = \sigma_\mu(x, y)$, $\mu = 1, 2, 3$. Очевидно, что и в этом случае определитель (2) обращается в нуль, что противоречит предположению леммы 1 о локальной транзитивности группы Ли преобразований всего пространства R^4.

Третий случай. Подалгебра является трехмерной алгеброй Ли преобразований пространства R^3, поэтому базисные операторы в некоторой системе координат имеют следующий вид:

$$X_\mu = \lambda_\mu \partial_x + \sigma_\mu \partial_y + \tau_\mu \partial_z, \; X_4 = \lambda_4 \partial_x + \sigma_4 \partial_y + \tau_4 \partial_z + \theta_4 \partial_w,$$

где $\lambda_\mu = \lambda_\mu(x, y, z)$, $\sigma_\mu = \sigma_\mu(x, y, z)$, $\tau_\mu = \tau_\mu(x, y, z)$, $\mu = 1, 2, 3$. Определитель левой части условия (2) разложим по элементам четвертого столбца:

$$\theta_4 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \sigma_1 & \tau_1 \\ \lambda_2 & \sigma_2 & \tau_2 \\ \lambda_3 & \sigma_3 & \tau_3 \end{vmatrix}.$$

Из условия (2) следует, что определитель третьего порядка полученного разложения отличен от нуля, т.е. соответствующая группа преобразований R^3 локально транзитивна.

Четвертый случай. Пусть подалгебра является трехмерной алгеброй Ли преобразований пространства R^4. Тогда соответствующая ей группа Ли преобразований действует интранзитивно в пространсве R^4, причем инвариантное многообразие является или одномерным, или двумерным, или трехмерным, то есть мы приходим к предыдущим трем случаям. Таким образом, искомая трехмерная подалгебра эквивалентна некоторой трехмерной алгебре Ли локально транзитивной группы Ли преобразований R^3.

Ниже нам понадобятся выражения для базисных операторов трехмерной алгебры Ли локально транзитивной группы Ли преобразований пространства R^3 [4, 9]:

для алгебры (14):

$$X_1 = \partial_x, \ \ X_2 = \partial_y, \ \ X_3 = \partial_z; \tag{20}$$

для алгебры (15):

$$X_1 = \partial_x, \ \ X_2 = \partial_y, \ \ X_3 = y\partial_x + \partial_z; \tag{21}$$

для алгебры (17):

$$X_1 = \partial_x, \ \ X_2 = \partial_y, \ \ X_3 = x\partial_x + \partial_z; \tag{22}$$

для алгебры (16):

$$X_1 = \partial_x, \ \ X_2 = \partial_y, \ \ X_3 = x\partial_x + y\partial_y + \partial_z; \tag{23}$$

для алгебры (18):

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x, \ \ X_2 = tgy \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \sec y \sin x\partial_z, \\ X_3 = tgy \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \sec y \cos x\partial_z; \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

для алгебры (19):

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x, \ \ X_2 = \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \exp y \sin x\partial_z, \\ X_3 = \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \exp y \cos x\partial_z. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

2. Классификация четырехмерных алгебр Ли локально транзитивных групп Ли преобразований пространства R^4. В R^4 можно менять системы локальных координат, не изменяя при этом структуру коммутационных соотношений. Учитывая выше доказанную лемму и классификацию (20)–(25), которая проведена с точностью до эквивалентности, то есть замен координат в пространстве R^3, приходим к следующим выражениям для базисных операторов X_1, X_2, X_3, X_4 четырехмерных алгебр Ли (3)–(13) локально транзитивных групп Ли преобразований пространства R^4:

для алгебр (3)–(6):

$$X_1 = \partial_x, \ \ X_2 = \partial_y, \ \ X_3 = \partial_z, \ \ X_4 = \lambda_4\partial_x + \sigma_4\partial_y + \tau_4\partial_z + \theta_4\partial_w; \tag{26}$$

для алгебр (7)–(9):

$$X_1=\partial_x,\ \ X_2=\partial_y,\ \ X_3=y\partial_x+\partial_z,\ \ X_4=\lambda_4\partial_x+\sigma_4\partial_y+\tau_4\partial_z+\theta_4\partial_w; \tag{27}$$

для алгебры (10):

$$X_1=\partial_x,\ \ X_2=\partial_y,\ \ X_3=x\partial_x+\partial_z,\ \ X_4=\lambda_4\partial_x+\sigma_4\partial_y+\tau_4\partial_z+\theta_4\partial_w; \tag{28}$$

для алгебры (11):

$$X_1=\partial_x,\ \ X_2=\partial_y,\ \ X_3=x\partial_x+y\partial_y+\partial_z,\ \ X_4=\lambda_4\partial_x+\sigma_4\partial_y+\tau_4\partial_z+\theta_4\partial_w; \tag{29}$$

для алгебры (12):

$$\left.\begin{aligned} X_1=\partial_x,\ \ X_2=tgy\sin x\partial_x+\cos x\partial_y+\sec y\sin x\partial_z,\\ X_3=tgy\cos x\partial_x-\sin x\partial_y+\sec y\cos x\partial_z,\\ X_4=\lambda_4\partial_x+\sigma_4\partial_y+\tau_4\partial_z+\theta_4\partial_w; \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

для алгебры (13):

$$\left.\begin{aligned} X_1=\partial_x,\ \ X_2=\sin x\partial_x+\cos x\partial_y+\exp y\sin x\partial_z,\\ X_3=\cos x\partial_x-\sin x\partial_y+\exp y\cos x\partial_z,\\ X_4=\lambda_4\partial_x+\sigma_4\partial_y+\tau_4\partial_z+\theta_4\partial_w. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где, например, $\lambda_4=\lambda_4(x,y,z,w)$.

Теорема 2. *Базисные операторы X_1, X_2, X_3, X_4 четырехмерных алгебр Ли с коммутационными соотношениями (3)–(13) локально транзитивных групп Ли преобразований пространства R^4 в надлежаще выбранной системе локальных координат задаются следующими выражениями:*

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ \partial_z,\ \ \varepsilon x\partial_x+ky\partial_y+lz\partial_z+\partial_w; \tag{32}$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ \partial_z,\ \ (kx-y)\partial_x+(x+ky)\partial_y+lz\partial_z+\partial_w; \tag{33}$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ \partial_z,\ \ kx\partial_x+(x+ky)\partial_y+\varepsilon z\partial_z+\partial_w; \tag{34}$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ \partial_z,\ \ kx\partial_x+(x+ky)\partial_y+(y+\varepsilon z)\partial_z+\partial_w; \tag{35}$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ y\partial_x+\partial_z,\ \ cx\partial_x+y\partial_y+(c-1)z\partial_z+\partial_w; \tag{36}$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ y\partial_x+\partial_z,\ \ (2x+z^2/2)\partial_x+(y+z)\partial_y+z\partial_z+\partial_w; \tag{37}$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ y\partial_x+\partial_z,\ \ (qx+y^2/2-z^2/2)\partial_x-z\partial_y+(y+qz)\partial_z+\partial_w; \tag{38}$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ x\partial_x+\partial_z,\ \ y\partial_y+\partial_w; \tag{39}$$

$$\partial_x,\ \ \partial_y,\ \ x\partial_x+y\partial_y+\partial_z,\ \ -y\partial_x+x\partial_y+\partial_w; \tag{40}$$

$$\partial_x,\ \ tgy\sin x\partial_x+\cos x\partial_y+\sec y\sin x\partial_z,\ \ tgy\cos x\partial_x-\sin x\partial_y+\sec y\cos x\partial_z,\ \ \partial_w; \tag{41}$$

$$\partial_x,\ \ \sin x\partial_x+\cos x\partial_y+\exp y\sin x\partial_z,\ \ \cos x\partial_x-\sin x\partial_y+\exp y\cos x\partial_z,\ \ \partial_w, \tag{42}$$

где $\varepsilon=0,1$; k,l,q — произвольные постоянные.

В R^4 перейдем к новой системе локальных координат:

$$\xi = \varphi_1(x,y,z,w),\ \ \eta = \varphi_2(x,y,z,w),\ \ \zeta = \varphi_3(x,y,z,w),\ \ \kappa = \varphi_4(x,y,z,w). \quad (43)$$

Рассмотрим операторы (26). Легко установить, что первые три оператора после замены координат (43) сохранят свою форму, при следующих ограничениях на функции этой замены:

$$\varphi_{1x} = 1,\ \varphi_{2x} = 0,\ \varphi_{3x} = 0,\ \varphi_{4x} = 0,\ \ \varphi_{1y} = 0,\ \varphi_{2y} = 1,\ \varphi_{3y} = 0,$$
$$\varphi_{4y} = 0,\ \ \varphi_{1z} = 0,\ \varphi_{2z} = 0,\ \varphi_{3z} = 1,\ \varphi_{4z} = 0.$$

Интегрируя, приходим к формулам допустимой замены координат

$$\xi = x + \varphi_1(w),\ \ \eta = y + \varphi_2(w),\ \ \zeta = z + \varphi_3(w),\ \ \kappa = \varphi_4(w),\ \ \varphi_4' \neq 0. \quad (44)$$

Подставляя базисные операторы (26) в коммутационные соотношения алгебры (3) и приравнивая коэффициенты перед независимыми операторами ∂_x, ∂_y, ∂_z, ∂_w справа и слева, приходим к дифференциальным уравнениям: $\lambda_{4x} = \varepsilon$, $\sigma_{4x} = 0$, $\tau_{4x} = 0$, $\theta_{4x} = 0$; $\lambda_{4y} = 0$, $\sigma_{4y} = k$, $\tau_{4y} = 0$, $\theta_{4y} = 0$; $\lambda_{4z} = 0$, $\sigma_{4z} = 0$, $\tau_{4z} = l$, $\theta_{4z} = 0$. После их интегрирования находим четвертый оператор системы (26):

$$X_4 = (\varepsilon x + \lambda_4(w))\partial_x + (ky + \sigma_4(w))\partial_y + (lz + \tau_4(w))\partial_z + \theta_4(w)\partial_w,\ \ \theta_4' \neq 0.$$

Произведем в этом выражении допустимую замену координат (44):

$$(\varepsilon x + \lambda_4 + \theta_4\varphi_{1w})\partial_\xi + (ky + \sigma_4 + \theta_4\varphi_{2w})\partial_\eta + (lz + \tau_4(w) + \theta_4\varphi_{3w})\partial_\zeta + \theta_4\varphi_{4w}\partial_\kappa.$$

Функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 возьмем из решения следующей системы дифференциальных уравнений: $\lambda_4 + \theta_4\varphi_{1w} = \varepsilon\varphi_1$, $\sigma_4 + \theta_4\varphi_{2w} = k\varphi_2$, $\tau_4 + \theta_4\varphi_{3w} = l\varphi_3$, $\theta_4\varphi_{4w} = 1$. Тогда имеем $X_4 = \varepsilon\xi\partial_\xi + k\eta\partial_\eta + l\zeta\partial_\zeta + \partial_\kappa$ и, возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (32) алгебры Ли (3) локально транзитивной группы Ли преобразований пространства R^4.

Для алгебр Ли (4)–(6) аналогично получаем выражения (33)–(35).

Рассмотрим теперь систему четырех операторов (27) и выясним предварительно, при каких ограничениях на функции общей замены координат (43) сохраняют свою форму первые три оператора. Оказывается, эти функции должны быть решениями следующих уравнений:

$$\varphi_{1x} = 1,\ \varphi_{2x} = 0,\ \varphi_{3x} = 0,\ \varphi_{4x} = 0,\ \ \varphi_{1y} = 0,\ \varphi_{2y} = 1,\ \varphi_{3y} = 0,\ \varphi_{4y} = 0,$$
$$y + \varphi_{1z} = \varphi_2,\ \varphi_{2z} = 0,\ \varphi_{3z} = 1,\ \varphi_{4z} = 0,$$

интегрируя которые приходим к формулам допустимой замены координат:

$$\xi = x + \varphi_2(w)z + \varphi_1(w),\ \ \eta = y + \varphi_2(w),\ \ \zeta = z + \varphi_3(w),\ \ \kappa = \varphi_4(w),\ \ \varphi_4' \neq 0. \quad (45)$$

Подставим операторы (27) в коммутационные соотношения алгебры (7) и приравняем коэффициенты перед независимыми операторами ∂_x, ∂_y, ∂_z, ∂_w слева и справа. В результате приходим к дифференциальным уравнениям $\lambda_{4x} = c$, $\sigma_{4x} = 0$, $\tau_{4x} = 0$, $\theta_{4x} = 0$; $\lambda_{4y} = 0$, $\sigma_{4y} = 1$, $\tau_{4y} = 0$, $\theta_{4y} = 0$; $y\lambda_{4x} + \lambda_{4z} - \sigma_4 = (c-1)y$, $y\sigma_{4x} + \sigma_{4z} = 0$, $y\tau_{4x} + \tau_{4z} = c - 1$, $y\theta_{4x} + \theta_{4z} = 0$, интегрируя которые для оператора X_4 получаем выражение

$$(x + z\sigma_4(w) + \lambda_4(w))\partial_x + (y + \sigma_4(w))\partial_y + ((c-1)z + \tau_4(w))\partial_z + \theta_4(w)\partial_w,\ \theta_4' \neq 0,$$

после чего в нем произведем допустимую замену координат (45):

$$\begin{aligned} X_4 = (cx + \sigma_4 z + \lambda_4 + ((c-1)z + \tau_4)\varphi_2 + \theta_4(\varphi_{2w}z + \varphi_{1w}))\partial_\xi + \\ +(y + \sigma_4 + \theta_4\varphi_{2w})\partial_\eta + ((c-1)z + \tau_4 + \theta_4\varphi_{3w})\partial_\zeta + \theta_4\varphi_{4w}\partial_\kappa. \end{aligned}$$

Если функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 взять из решений системы уравнений $\lambda_4 + \tau_4\varphi_2 + \theta_4\varphi_{1w} = c\varphi_1$, $\sigma_4 + \theta_4\varphi_{2w} = \varphi_2$, $\tau_4 + \theta_4\varphi_{3w} = (c-1)\varphi_3$, $\theta_4\varphi_{4w} = 1$, то $X_4 = c\xi\partial_\xi + \eta\partial_\eta + (c-1)\zeta\partial_\zeta + \partial_\kappa$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, приходим к выражениям (36).

Аналогичные рассуждения в отношении алгебр Ли (8) и (9) приводят к выражениям (37) и (38) соответственно.

Для системы операторов (28) найдем ограничения на функции общей замены координат (43), при которой первые три операторы сохраняют свою форму. Легко устанавливается, что должны иметь место следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \varphi_{1x} = 1,\ \varphi_{2x} = 0,\ \varphi_{3x} = 0,\ \varphi_{4x} = 0,\ \varphi_{1y} = 0,\ \varphi_{2y} = 1,\ \varphi_{3y} = 0,\ \varphi_{4y} = 0, \\ x + \varphi_{1z} = \varphi_1,\ \varphi_{2z} = 0,\ \varphi_{3z} = 1,\ \varphi_{4z} = 0, \end{aligned}$$

решая которые находим эту допустимую замену координат:

$$\xi = x + \varphi_1(w)e^z,\ \ \eta = y + \varphi_2(w),\ \ \zeta = z + \varphi_3(w),\ \ \kappa = \varphi_4(w),\ \varphi_4' \neq 0 \qquad (46)$$

Подставим операторы (28) в коммутационные соотношения алгебры (10) и приравняем коэффициенты перед независимыми операторами ∂_x, ∂_y, ∂_z, ∂_w слева и справа. В результате приходим к системе дифференциальных уравнений: $\lambda_{4x} = 0$, $\sigma_{4x} = 0$, $\tau_{4x} = 0$, $\theta_{4x} = 0$; $\lambda_{4y} = 0$, $\sigma_{4y} = 1$, $\tau_{4y} = 0$, $\theta_{4y} = 0$; $x\lambda_{4x} + \lambda_{4z} - \lambda_4 = 0$, $x\sigma_{4x} + \sigma_{4z} = 0$, $x\tau_{4x} + \tau_{4z} = 0$, $z\theta_{4x} + \theta_{4z} = 0$, интегрируя которые для оператора X_4 получаем следующее выражение:

$$\lambda_4(w)e^z\partial_x + (y + \sigma_4(w))\partial_y + \tau_4(w)\partial_z + \theta_4(w)\partial_w,\ \theta_4' \neq 0,$$

в котором затем поизведем допустимую замену координат (46):

$$(\lambda_4 e^z + \tau_4 e^z\varphi_1 + \theta_4 e^z\varphi_{1w})\partial_\xi + (y + \sigma_4 + \theta_4\varphi_{2w})\partial_\eta + (\tau_4 + \theta_4\varphi_{3w})\partial_\zeta + \theta_4\varphi_{4w}\partial_\kappa.$$

Если функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 взять из решений системы уравнений $\lambda_4 + \tau_4\varphi_1 + \theta_4\varphi_{1w} = 0$, $\sigma_4 + \theta_4\varphi_{2w} = \varphi_2$, $\tau_4 + \theta_4\varphi_{3w} = 0$, $\theta_4\varphi_{4w} = 1$, то $X_4 = \eta\partial_\eta + \partial_\kappa$, и после возвращения к прежним обозначениям координат получаем операторы (39).

Найдем такую общую замену координат (43), при которой сохранят форму первые три оператора системы (29). Нетрудно проверить, что должны выполняться уравнения

$$\varphi_{1x}=1,\ \varphi_{2x}=0,\ \varphi_{3x}=0,\ \varphi_{4x}=0,\ \ \varphi_{1y}=0,\ \varphi_{2y}=1,\ \varphi_{3y}=0,\ \varphi_{4y}=0,$$
$$x+\varphi_{1z}=\varphi_1,\ y+\varphi_{2z}=\varphi_2,\ \varphi_{3z}=1,\ \varphi_{4z}=0,$$

интегрируя которые, находим допустимую замену координат:

$$\xi=x+\varphi_1(w)e^z,\ \ \eta=y+\varphi_2(w)e^z,\ \ \zeta=z+\varphi_3(w),\ \ \kappa=\varphi_4(w),\ \varphi_4'\neq 0. \tag{47}$$

Подставляя, как обычно, операторы (29) в коммутационные соотношения для алгебры (11), приходим к уравнениям $\lambda_{4x}=0$, $\sigma_{4x}=1$, $\tau_{4x}=0$, $\theta_{4x}=0$; $\lambda_{4y}=-1$, $\sigma_{4y}=0$, $\tau_{4y}=0$, $\theta_{4y}=0$; $x\lambda_{4x}+y\lambda_{4y}+\lambda_{4z}-\lambda_4=0$, $x\sigma_{4x}+y\sigma_{4y}+\sigma_{4z}-\sigma_4=0$, $x\tau_{4x}+y\tau_{4y}+\tau_{4z}=0$, $z\theta_{4x}+y\theta_{4y}+\theta_{4z}=0$ и, после их интегрирования, к выражению для четвертого оператора:

$$X_4=(-y+\lambda_4(w)e^z)\partial_x+(x+\sigma_4(w)e^z)\partial_y+\tau_4(w)\partial_z+\theta_4(w)\partial_w,\ \theta_4'\neq 0,$$

в котором произведем допустимую замену координат (47):

$$X_4=(-y+\lambda_4e^z+\tau_4e^z\varphi_1+\theta_4e^z\varphi_{1w})\partial_\xi+$$
$$+(x+\sigma_4e^z+\tau_4e^z\varphi_2+\theta_4e^z\varphi_{2w})\partial_\eta+(\tau_4+\theta_4\varphi_{3w})\partial_\zeta+\theta_4\varphi_{4w}\partial_\kappa.$$

Пусть функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 являются решениями системы уравнений $\lambda_4+\tau_4\varphi_1+\theta_4\varphi_{1w}=-\varphi_2$, $\sigma_4+\tau_4\varphi_2+\theta_4\varphi_{2w}=\varphi_1$, $\tau_4+\theta_4\varphi_{3w}=0$, $\theta_4\varphi_{4w}=1$. Тогда $X_4=-\eta\partial_\xi+\xi\partial_\eta+\partial_\kappa$ и, после возвращения к прежним обозначениям координат, получаем выражения (40) для базисных операторов алгебры Ли (11).

Найдем, наконец, выражения для базисных операторов алгебр Ли (12) и (13). Нетрудно убедиться в том, что эти алгебры представимы в виде прямой суммы идеалов J_1 и J_2. В алгебре (12) идеал J_1 порождается операторами: $X_1,\ X_2,\ X_3$, причем $[X_1,X_2]=X_3,\ [X_3,X_1]=X_2,\ [X_2,X_3]=X_1$, а идеал J_2 – оператором X_4. В алгебре (13) идеал J_1 порождается операторами: $X_1,\ X_2,\ X_3$, причем $[X_1,X_2]=X_3,\ [X_3,X_1]=X_2,\ [X_2,X_3]=-X_1$, а идеал J_2 – оператором X_4.

Сопоставляя идеалы J_1 и J_2 с трехмерными и одномерными алгебрами Ли групп Ли преобразований пространств R^3 и R^1, заключаем, что они изоморфны алгебрам Ли некоторых локально транзитивных групп Ли преобразований этих пространств.

Рассмотрим касательное пространство $T_a(R^4)$ к многообразию R^4 в точке a. Разобьем это пространство на два дополнительных друг к другу подпространства $\Delta_a(1)$ и $\Delta_a(2)$, то есть $T_a(R^4)=\Delta_a(1)\oplus\Delta_a(2)$ так, чтобы $(X_1)_a,(X_2)_a,(X_3)_a\in\Delta_a(1)$, а $(X_4)_a\in\Delta_a(2)$. Из локальной транзитивности групп преобразований следует, что векторы $(X_1)_a,(X_2)_a,(X_3)_a$ и $(X_4)_a$ образуют базисы подпространств $\Delta_a(1)$ и $\Delta_a(2)$ соответственно, а все четыре — базис пространства $T_a(R^4)$. В окрестности точки a эти векторы включаются в гладкие векторные поля X_1, X_2, X_3 и X_4. Поэтому в окрестности точки a многообразия R^4 мы приходим к дополнительным друг к другу гладким распределениям $\Delta(1)$ и $\Delta(2)$. Поскольку J_1 и J_2 являются идеалами, то распределения $\Delta(1)$ и $\Delta(2)$ инволютивны. Ниже воспользуемся утверждением, доказательство которого можно найти в книге [4].

Если T' и T'' – два инволютивных распределения на n-мерном многообразии M, дополнительные всюду на M, то для каждой точки из M существует локальная система координат $x^1, ..., x^n$ с началом в этой точке такая, что $(\partial_{x^1}, ..., \partial_{x^k})$ и $(\partial_{x^{k+1}}, ..., \partial_{x^n})$ образуют локальный базис для T' и T'' соответственно.

Произвольная точка $a \in R^4$ принадлежит интегральным многообразиям $\delta(1)$ и $\delta(2)$ распределений $\Delta(1)$ и $\Delta(2)$, в которых транзитивно действуют локальные группы Ли преобразований с алгебрами Ли J_1 и J_2. Из последнего утверждения следует, что в точке a можно ввести такую локальную систему координат, чтобы первые три коодинаты были координатами на подмногообразии $\delta(1)$, а четвертая – координатой на $\delta(2)$. Эти координаты мы обозначим через x, y, z и w соответсвенно. Тогда базисные операторы алгебр Ли (12) и (13) локально транзитивной группы Ли преобразований пространства R^4 примут следующий вид:

$$X_\mu = \lambda_\mu(x,y,z)\partial_x + \sigma_\mu(x,y,z)\partial_y + \tau_\mu(x,y,z)\partial_z, \;\; X_4 = \theta_4(w)\partial_w, \tag{48}$$

где $\mu = 1, 2, 3$. Совмещая (30) и (31) с (48), получаем:

для алгебры (12):

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = tgy \sin x \partial_x + \cos x \partial_y + \sec y \sin x \partial_z, \\ X_3 = tgy \cos x \partial_x - \sin x \partial_y + \sec y \cos x \partial_z, \;\; X_4 = \theta_4(w)\partial_w \end{array}\right\} \tag{49}$$

и для алгебры (13):

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = \sin x \partial_x + \cos x \partial_y + \exp y \sin x \partial_z, \\ X_3 = \cos x \partial_x - \sin x \partial_y + \exp y \cos x \partial_z, \;\; X_4 = \theta_4(w)\partial_w. \end{array}\right\} \tag{50}$$

Ясно, что операторы (49) и (50) инвариантны относительно замены координат:

$$\xi = x, \;\; \eta = y, \;\; \zeta = z, \;\; \kappa = \varphi(w), \; \varphi' \neq 0. \tag{51}$$

Полагая $\theta_4(w)\varphi'(w) = 1$, получаем в R^4 такие координаты, в которых четвертый оператор систем (49) и (50) принимает простейшую форму: $X_4 = \partial_\kappa$. Тогда в прежних обозначениях координат базисные операторы алгебр Ли (12) и (13) локально транзитивной группы Ли преобразований пространства R^4 задаются выражениями (41) и (42) соответственно.

3. 4-метрическая физическая структура ранга (2,2). Рассмотрим два 4-мерных гладких многообразия M и N. Элементы этих многообразий будем обозначать строчными латинскими: $i, j, k, l, ...$ и строчными греческими: $\alpha, \beta, \gamma, ...$ буквами соответственно. Определим гладкую функцию $f : M \times N \to R^4$, которую будем называть 4-метрикой или метрической функцией. Ее компоненты: $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)$ и пусть $\mathcal{M}_f \subset M \times N$ – область ее определения. Если в окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$ точек i и α ввести локальные координаты x, y, z, w и

$\xi, \eta, \zeta, \vartheta$, относительно которых $i = (x_i, y_i, z_i, w_i)$ и $\alpha = (\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha, \vartheta_\alpha)$, то в случае $U(i) \times U(\alpha) \subset \mathcal{M}_f$ метрическая функция f будет иметь следующее координатное представление: $f(i\alpha) = f(x_i, y_i, z_i, w_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha, \vartheta_\alpha)$. В последующем изложении индексы i и α часто будут опускаться, так как ясно, к каким координатам они должны быть отнесены.

Будем говорить, следуя [3], что функция f на четырехмерных многообразиях M и N задает *4-метрическую физическую структуру ранга* (2,2), если выполняются следующие условия:

1. Область определения $\mathcal{M}_f \subseteq M \times N$ функции f есть открытое и плотное в $M \times N$ множество.

2. Метрическая функция f в области ее определения достаточно гладкая и невырожденная, то есть относительно локальных координат точек i и α выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^3(i\alpha), f^4(i\alpha))}{\partial(x_i, y_i, z_i, w_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha), f^3(i\alpha), f^4(i\alpha))}{\partial(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha, \vartheta_\alpha)} \neq 0.$$

3. Для любой четверки $<ij, \alpha\beta>$ такой, что пары $<i\alpha>$, $<i\beta>$, $<j\alpha>$, $<j\beta>$ принадлежат $\mathcal{M}_f$, существует четырехкомпонентная функция 16 переменных $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4,)$ с rank $\Phi = 4$, такая, что

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) = 0.$$

Условие 3 называется принципом феноменологической симметрии.

В монографии [3] установлено, что в многообразиях M и N тогда действует 4-параметрическая группа движений, относительно которой метрическая функция является двухточечным инвариантом. Согласно критерию инвариантности для нее выполняются уравнения:

$$X_\mu(i)f(i\alpha) + \Xi_\mu(\alpha)f(i\alpha) = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \tag{52}$$

где X_1, X_2, X_3, X_4 и Ξ_1, Ξ_2, Ξ_2, Ξ_2 – операторы действия группы движений в многообразиях M и N соответственно. Там же доказана

Лемма 2. *Если функция $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)$ на четырехмерных многообразиях M и N задает четыреметрическую физическую структуру ранга (2,2), то базисные операторы X_1, X_2, X_3, X_4 и Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3, Ξ_4 определяют локально транзитивные группы Ли преобразований этих многообразий соответственно.*

Итак, группа движений в многообразиях M и N действует локально транзитивно. Выражения для операторов X_1, X_2, X_3, X_4 этой группы в многообразии M приведены в теореме 2, а выражения для операторов Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3, Ξ_4 получаются из них после следующих переобозначений координат: $x \to \xi$, $y \to \eta$, $z \to \zeta$, $w \to \vartheta$. Решая уравнения системы (52), приходим к классификации 4-метрических физических структур ранга (2,2).

Теорема 3. *С точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$ и в надлежаще выбранной в четырехмерных многообразиях M и N системах локальных* *координат 4-метрика $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)$, задающая на них физическую структуру ранга (2,2), определяется следующими каноническими выражениями:*

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = (x+\xi)^2 \exp[\varepsilon(w+\vartheta)], \quad f^2 = (y+\eta)^2 \exp[k(w+\vartheta)], \\ f^3 = (z+\zeta)^2 \exp[l(w+\vartheta)], \quad f^4 = w - \vartheta; \end{array}\right\} \qquad (53)$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = [(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2] \exp\left(-2k\, arctg\dfrac{y+\eta}{x+\xi}\right), \\ f^2 = 2 arctg\dfrac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta, \quad f^3 = (z+\zeta)^2 \exp[l(w+\vartheta)], \quad f^4 = w - \vartheta; \end{array}\right\} \qquad (54)$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = (x+\xi)^2 \exp\left(-2k\dfrac{y+\eta}{x+\xi}\right), \quad f^2 = 2\dfrac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta, \\ f^3 = (z+\zeta)^2 \exp[\varepsilon(w+\vartheta)], \quad f^4 = w - \vartheta; \end{array}\right\} \qquad (55)$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = x+\xi, \quad f^2 = 2\dfrac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta, \\ f^3 = z + \zeta - \dfrac{(y+\eta)^2}{2(x+\xi)}, \quad f^4 = w - \vartheta, \end{array}\right\} \qquad (56)$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = x+\xi, \quad f^2 = 2\dfrac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta, \\ f^3 = (x+\xi)\ln(z+\zeta+y+\eta+x+\xi) - y - \eta, \quad f^4 = w - \vartheta, \end{array}\right\} \qquad (57)$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = (x+\xi)^2 \exp\left(-2k\dfrac{y+\eta}{x+\xi}\right), \quad f^2 = 2\dfrac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta, \\ f^3 = k(y+\eta) - x - \xi - k^2(z+\zeta), \quad f^4 = w - \vartheta, \end{array}\right\} \qquad (58)$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = (x+\xi)^2 \exp\left(-2k\dfrac{y+\eta}{x+\xi}\right), \quad f^2 = 2\dfrac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta, \\ f^3 = 2\dfrac{z+\zeta}{x+\xi} - k\left(\dfrac{y+\eta}{x+\xi}\right)^2, \quad f^4 = w - \vartheta; \end{array}\right\} \qquad (59)$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = [x+\xi - z(y+\eta)]^2 \exp[c(w+\vartheta)], \\ f^2 = [x+\xi + \zeta(y+\eta)]^2 \exp[c(w+\vartheta)], \\ f^3 = (y+\eta)^2 \exp(w+\vartheta), \quad f^4 = w - \vartheta; \end{array}\right\} \qquad (60)$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = f^1[x+\xi - z(y+\eta), x+\xi+\zeta(y+\eta), y+\eta, w, \vartheta], \\ f^2 = f^2[x+\xi - z(y+\eta), x+\xi+\zeta(y+\eta), y+\eta, w, \vartheta], \\ f^3 = f^3[x+\xi - z(y+\eta), x+\xi+\zeta(y+\eta), y+\eta, w, \vartheta], \\ f^4 = w - \vartheta, \end{array}\right\} \qquad (61)$$

причем функции f^1, f^2, f^3 и f^4 – независимые интегралы уравнения

$$[2s - \frac{1}{2}(\frac{t-s}{u})^2]\frac{\partial F}{\partial s} + [2t + \frac{1}{2}(\frac{t-s}{u})^2]\frac{\partial F}{\partial t} + (2t + \frac{t-s}{u})\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial F}{\partial \vartheta} = 0$$

при следующих обозначениях: $s = x + \xi - z(y+\eta)$, $t = x + \xi + \zeta(y+\eta)$, $u = y + \eta$;

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = f^1[x+\xi - z(y+\eta), x+\xi+\zeta(y+\eta), y+\eta, w, \vartheta], \\ f^2 = f^2[x+\xi - z(y+\eta), x+\xi+\zeta(y+\eta), y+\eta, w, \vartheta], \\ f^3 = f^3[x+\xi - z(y+\eta), x+\xi+\zeta(y+\eta), y+\eta, w, \vartheta], \\ f^4 = w - \vartheta, \end{array}\right\} \tag{62}$$

причем функции f^1, f^2, f^3 *и* f^4 *– независимые интегралы уравнения*

$$[qs - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(\frac{t-s}{u})^2]\frac{\partial F}{\partial s} + [qt + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}(\frac{t-s}{u})^2]\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{t-s}{u}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial F}{\partial \vartheta} = 0$$

при тех же обозначениях, что и в предыдущем уравнении;

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = (x+\xi)\exp z, \quad f^2 = (x+\xi)\exp\zeta, \\ f^3 = (y+\eta)\exp w, \quad f^4 = (y+\eta)\exp\vartheta; \end{array}\right\} \tag{63}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = [(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2]\exp(z+\zeta), \\ f^2 = 2\,arctg\dfrac{y+\eta}{x+\xi} + w + \vartheta, \\ f^3 = z - \zeta, \quad f^4 = w - \vartheta; \end{array}\right\} \tag{64}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = \sin y \sin\eta\cos(x+\xi) + \cos y\cos\eta, \\ f^2 = z + arcsin\left(\dfrac{\sin(x+\xi)\sin\eta}{\sqrt{1-(f^1)^2}}\right), \\ f^3 = \zeta + arcsin\left(\dfrac{\sin(x+\xi)\sin y}{\sqrt{1-(f^1)^2}}\right), \\ f^4 = w - \vartheta; \end{array}\right\} \tag{65}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = (x+\xi)y\eta, \quad f^2 = z + \dfrac{1}{(x+\xi)y^2}, \\ f^3 = \zeta + \dfrac{1}{(x+\xi)\eta^2}, \quad f^4 = w - \vartheta, \end{array}\right\} \tag{66}$$

где $\varepsilon = 0, 1$; k, l, c, q *– произвольные постоянные, причем в выражениях (58) и (59) дополнительно* $k \neq 0$.

Доказательством теоремы 3 является непосредственное интегрирование систем дифференциальных уравнений (52), с операторами (32)–(42). При записи канонических выражений (53)–(66) использовался также переход к более удобной системе координат в многообразиях M и N.

Список литературы

[1] *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[2] *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.

[3] *Михайличенко Г.Г.* Групповая симметрия физических структур. Барнаул: БГПУ, Горно-Алтайск: ГАГУ, 2003.

[4] *Михайличенко Г.Г.* Полиметрические геометрии. Новосибирск: НГУ, 2001.

[5] *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии, т.1. М.: Наука, 1981.

[6] *Михайличенко Г.Г.* Простейшие полиметрические геометрии // Докл. АН РФ, 1996, Т.348, №1, С.22-24.

[7] *Михайличенко Г.Г.* Простейшие полиметрические геометрии I // Сиб. мат. журн., 1998, Т.39, №2, С.377-395.

[8] *Михайличенко Г.Г.* Некоторые замечания к классификации Ли групп преобразований // Вестник МГУ, Сер. 1. Математика. Механика, 1986, №5, С.98.

[9] *Михайличенко Г.Г.* Трехмерные алгебры Ли локально транзитивных преобразований пространства R^3 // Известия вузов. Математика, 1997, №9, С.41-48.

А.Н. Бородин

К теории груд

§1. Введение

Пусть имеется множество Q, элементы которого будем обозначать строчными латинскими буквами, и $n \geq 1$ – натуральное число. Отображение $\omega : Q^n \to Q$, однозначно сопоставляющее всякому кортежу длины n из прямого произведения Q^n некоторый элемент из множества Q, называется, как известно, n-арной *алгебраической операцией* на этом множестве. Будем говорить, что операция ω допускает *деление*, если для любого кортежа $< q_1 q_2 ... q_{n-1} >$ длины $n-1$ из Q^{n-1} и любого элемента q из Q имеет решение каждое из уравнений $q_1 q_2 ... q_{n-1} x = q,\ q_1 q_2 ... x q_{n-1} = q$, ... , $x q_1 q_2 ... q_{n-1} = q$ относительно x. Заметим также, что 0-арной операцией на множестве Q обычно называют фиксирование в нем некоторых его элементов.

Непустое множество Q, на котором заданы алгебраические операции ω различной арности, называется *универсальной алгеброй*. Класс универсальных алгебр называется *многообразием*, если существует такая система тождеств Σ, что алгебра принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда в ней выполняются все тождества системы Σ. Многообразие алгебр обозначается через $M(\omega, \Sigma)$.

А.Г. Курош в своих лекциях [1] привел пример алгебры Q с тернарной операцией ω и следующей системой тождеств Σ:

$$(abc)de = ab(cde), \tag{1.1}$$

$$abb = bba = a. \tag{1.2}$$

Алгебру Q, тернарная операция которой удовлетворяет системе тождеств (1.1), (1.2), называют *грудой*. Согласно теореме Бэра-Вагнера (см. [1]) в каждой груде можно ввести такую бинарную операцию, при которой она становится группой. Многообразие $M(\omega, \Sigma)$, каждая алгебра Q которой является грудой, называется многообразием груд.

Углубив аксиоматику простейшей физической структуры ранга (2,2), автор в приложении [3] к монографии [2] пришел к многообразию $M(\omega, \Sigma)$ алгебр Q с тернарной операцией ω, но с иной, чем у груды, системой тождеств Σ:

$$abc = (abs)sc = as(sbc), \tag{1.3}$$

$$abb = bba = a, \tag{1.4}$$

которое ниже будем называть $\Phi_{(2,2)}$-многообразием.

В §2 изучаются свойства многообразия $\Phi_{(2,2)}$, устанавливается его эквивалентность многообразию груд, для тернарной операции которой оказывается возможным разложение на три бинарные операции, а также на одну бинарную и одну унарную операции.

Далее, в §3 изучается особый тип многообразия $M(\omega, \Sigma)$ с тернарной операцией ω, допускающей деление, и всего одним тождеством в системе Σ:

$$abc = (abs)(tbs)(tbc), \tag{1.5}$$

которое оказывается эквивалентным $\Phi_{(2,2)}$-многообразию и, следовательно, многообразию груд.

В последнем §4 изучается многообразие $M(\omega, \Sigma)$ симметричных груд Q с тернарной операцией ω и системой тождеств Σ, состоящей из тождества (1.3) и тождества

$$bab = a. \tag{1.6}$$

§2. $\Phi_{(2,2)}$-многообразие

Напомним, что тернарная операция в многообразии груд удовлетворяет тождествам (1.1) и (1.2), а в $\Phi_{(2,2)}$-многообразии – тождествам (1.3) и (1.4).

Теорема 2-1. *Многообразие груд и $\Phi_{(2,2)}$-многообразие эквивалентны.*

Действительно, если положить в тождестве (1.1) $c = d = s$ и ввести переобозначение $e \to c$, то получим первое из тождеств (1.3). Второе же из тождеств (1.3) получится, если положить в (1.1) $b = c = s$ и ввести переобозначения $d \to b,\ e \to c$. Тождества (1.2) и (1.4) при этом просто дублируют друг друга. Обратно, используя тождество (1.4), очевидно, имеем: $(abc)de = (abc)c(cde) = ab(cde)$, то есть получаем тождество (1.1) при совпадении тождеств (1.4) и (1.2). Теорема 2-1 доказана.

Теорема 2-2. *В $\Phi_{(2,2)}$-многообразии имеют место следующие тождества:*

$$(abc)cb = a,\ ab(bac) = c,\ a(cba)c = b. \tag{2.1}$$

Полагая в первом тождестве (1.3) $b = c$, имеем $acc = (acs)s$, после чего введем переобозначение $s \to b$ и учтем, что по тождеству (1.4) $acc = a$. Далее из второго тождества (1.3), полагая $b = a$, имеем $c = as(sac)$, после чего введем переобозначения $c \to a,\ a \to b,\ s \to c$. Для вывода третьего тождества системы (2.1) исходим из тождества $(abc)de = a(dcb)e$, которое А.Г.Курош [1] включил в определение груды, но оказалось, как показано автором в приложении [3], излишним, будучи следствием (1.1) и (1.2). Полагая в нем $b = a,\ d = e$ и вводя затем переобозначения $c \to a,\ a \to b,\ e \to c$, завершаем систему тождеств (2.1). Теорема 2-2 доказана.

Теорема 2-3. *Тернарная операция алгебры Q из $\Phi_{(2,2)}$-многообразия является 3-квазигрупповой.*

Леко установить, мспользуя полученные выше тождества (2.1), что каждое из трех уравнений $abx = c,\ ayb = c$ и $zab = c$ для любых элементов a, b, c, имеет единственное решение, задаваемое соответствено выражениями $x = bac,\ y = bca$ и $z = cba$. Теорема 2-3 доказана.

Теорема 2-4. *Тернарная операция алгебры Q из $\Phi_{(2,2)}$-многообразия разложима на три бинарные. Разложение имеет следующий вид:*

$$abc = a * (b \circ c) = a \circ (b \star c), \tag{2.2}$$

$$abc = a \circ \zeta(b) \circ c, \tag{2.3}$$

где $Q(\circ)$ – группа, $Q(*)$ и $Q(\star)$ – квазигруппы, изотопные группе $Q(\circ)$. Изотопия устанавливается равенствами $a * b = a \circ \zeta(b)$ и $a \star b = \zeta(a) \circ b$, где ζ – некоторая подстановка множества Q.

Зафиксируем в двух тождествах (1.3) элемент s, полагая $s = e$, и введем три бинарные операции $a * b = abe$, $a \circ b = aeb$, $a \star b = eab$. В результате получим, очевидно, первые два разложения (2.2). Покажем, что $Q(\circ)$ есть группа. Действительно, $(a \circ b) \circ c = (aeb)ec = (aeb)b(bec) = ae(bec) = a \circ (b \circ c)$. Далее в равенстве $(a*b)\circ c = a\circ(b\star c)$ из разложения (2.2) положим $c = e$. Легко проверяется, что элемент e в группе $Q(\circ)$ является нейтральным. Тогда из равенства $(a*b)\circ e = a\circ(b\star e)$ следует $a * b = a \circ \zeta_1(b)$, где $\zeta_1(b) = b \star e$ – некоторая подстановка множества Q. Аналогично, полагая в том же равенстве из разложения (2.2) $a = e$, получаем $(e * b) \circ c = e \circ (b \star c)$, откуда следует $b \star c = \zeta_2(b) \circ c$, где $\zeta_2(b) = e * b$ – возможно, какя-то другая подстановка множества Q. В действительности же подстановки ζ_1 и ζ_2 совпадают, в чем можно убедиться, заменяя в равенстве $a * b = a \circ \zeta_1(b)$, через которое вводилась первая подстановка, элемент a на нейтральный: $e * b = e \circ \zeta_1(b)$, откуда следует $\zeta_2 = \zeta_1 = \zeta$. А разложение (2.3) естественно следует из второго разложения $abc = a \circ (b \star c)$ из (2.2), в которое подставляется связь $b \star c = \zeta(b) \circ c$. Теорема 2-4 доказана.

Теорема 2-5. *Алгебра $Q(*)$ есть квазигруппа Уорда, а алгебра $Q(\star)$ – квазигруппа Бола.*

То, что обе алгебры являются квазигруппами, тривиально. Покажем, что алгебра $Q(*)$ есть квазигруппа Уорда. Действительно, $a * b = abe = (ab(bce))(bce)e = (ace)(bce)e = (a * c) * (b * c.)$ Аналогично устанавливется, что алгебра $Q(\star)$ есть квазигруппв Бола: $a \star b = eab = e(eca)((eca)ab) = e(eca)(ecb) = (c \star a) \star (c \star b)$. Теорема 2-5 доказана.

§3. $\Phi^*_{(2,2)}$-многообразие, определяемое одним тождеством

В данном параграфе будет рассмотрено многообразие $M(\omega, \Sigma)$ алгебр Q с тернарной операцией ω, допускающей деление, и имеющее всего одно тождество (1.5) в системе Σ:

$$abc = (abs)(tbs)(tbc), \tag{3.1}$$

которое назовем $\Phi^*_{(2,2)}$-многообразием. Это многообразие, как и рассмотренное в предыдущем параграфе §2 $\Phi_{(2,2)}$-многообразие, также возникает при анализе аксиом простейшей физической структуры ранга (2,2), но несколько в другом аспекте.

Теорема 3-1. *В $\Phi^*_{(2,2)}$-многообразии выполняются тождества (1.4) и (2.1).*

Полагая в тождестве (3.1) $s = c$, имеем $abc = (abc)(tbc)(tbc)$ или $a = abb$, так как переменные abc и tbc независимы в силу свойств тернарной операции, допускающей деление. Полагая, далее, в тождестве (3.1) $t = a$, имеем $abc = (abs)(abs)(abc)$ или $a = bba$ в силу упомянутых выше свойств тернарной операции. Таким образом, получены оба тождества системы (1.4). Опираясь на них, а также тождество (3.1), установим справедливость тождеств системы (2.1). Положим сначала $c = b$ в тождестве (3.1): $abb = (abs)(tbs)(tbb)$, откуда с учетом тождеств (1.4): $a = (abs)(tbs)t$. Если теперь в последнем результате положить $s = c$ и $t = b$, то получим $a = (abc)(bbc)b$, то есть первое тождество $a = (abc)cb$ системы (2.1). Положим, далее, в тождестве (3.1) $b = a$, учитывая также тождества (1.4): $c = s(tas)(tac)$. Полагая затем $s = a$ и $t = b$, получаем, очевидно, второе тождество $c = ab(bac)$ системы (2.1). В завершение, полагая $a = c = b$ в тождестве (3.1), имеем $b = s(tbs)t$, откуда при $s = a$ и $t = c$ получем третье тождество $b = a(cba)c$ системы (2.1). Теорема 3-1 доказана.

Теорема 3-2. *Многообразия* $\Phi^*_{(2,2)}$ *и* $\Phi_{(2,2)}$ *эквивалентны.*

Выполнение тождеств (1.4) было проверено в доказательстве предыдущей теоремы 3-1. Покажем теперь, что оба тождества (1.3) получаются из одного тождества (3.1). Положив сначала в нем $t = b$ с учетом тождеств (1.4) сразу приходим к первому тождеству $abc = (abs)sc$ системы (1.3). Если же в нем положить $s = b$ и затем ввести переобозначение $t \to s$, то, очевидно, приходим ко второму тождеству $abc = as(sbc)$ этой системы. С другой стороны, согласно теоремам 2-1 и 2-3 тернарная операция для любой алгебры из $\Phi_{(2,2)}$-многообразия является квазигрупповой и потому деление в ней не только возможно, но оно еще и однозначное. Далее по тождествам (1.3) легко получаем равенство $abc = (abs)p(psc)$. Полагая в нем $p = tbs$, очевидно, приходим к тождеству (3.1). Действительно: $abc = (abs)(tbs)((tbs)sc) = (abs)(tbs)(tbc)$. Теорема 3-2 доказана.

§4. $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразие симметричных груд

Симметричной грудой назовем алгебру с тернарной операцией ω и системой Σ, состоящей из тождеств (1.3) и (1.6). Многообразие $M(\omega, \Sigma)$, каждая алгебра которого симметрична, назовем многообразием симметричных груд и обозначим через $\Phi^s_{(2,2)}$.

Теорема 4-1. *В* $\Phi^s_{(2,2)}$*-многообразии тернарная операция абсолютно симметрмчна, то есть* $abc = acb = cba = bac$.

Полагая в первом тождестве (1.3) $s = a$, с учетом тождества (1.6) получаем $abc = bac$, то есть симметрию по перестановке первого и второго сомножителей. Аналогично, полагая во втором тождестве (1.3) $s = c$, получаем $abc = acb$, то есть симметрию по перестановке второго и третьего сомножителей. Симметрия же по перестановке первого и третьего сомножителей есть очевидное следствие первых двух: $abc = bac = bca = cba$. Теорема 4-1 доказана.

Теорема 4-2. *Для любых трех элементов* a, b, c *алгебры* Q *из* $\Phi^s_{(2,2)}$*-многообразия множество* $\{a, b, c, abc\}$ *является ее подалгеброй.*

Утверждение теоремы 4-2 легко проверяется на основе тождеств (1.3) с учетом установленной в предыдущей теореме 4-1 симметрии тернарной операции алгебры по перестановке любых двух элементов.

Теорема 4-3. *Тернарная операция алгебры Q из $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразия может быть представлена разложением $abc = a \circ b \circ c$, где $Q(\circ)$ – абелевя группа, в которой $a^{-1} = a$.*

Доказательсьво этой теоремы очевидным образом повторяет доказательство теоремы 2-4, причем все три бинарные операции в разложении (2.2) оказываются одной и той же операцией коммутативной группы: $a \circ b = aeb = abe = eab$. Поскольку $a \circ a = aae = e$, в абелевой группе $Q(\circ)$ обратный элемент совпадает с самим собой, то есть $a^{-1} = a$.

Теорема 4-4. *В $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразии не существует алгебры $Q = \{a, b, c\}$, порядок которой равен 3.*

Предположим противное, то есть что в $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразии существует трехмерная алгебра $Q = \{a, b, c\}$, в которой, например, $abc = a$. Тогда $a(abc)b = aab = b$, но по тождествам (1.3) и симметрии тернарной операции имеем $a(abc)b = ab(bac) = aac = c$, то есть $b = c$ и алгебра $Q = \{a, b, c\}$ оказывается двухэлементной, что противоречит предполагаемой ее трехэлементности, то есть порядку 3. Теорема 4-4 доказана.

Теорема 4-5. *Всякая алгебра Q из $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразия порядка $n \geq 2$ разлагается в теоретико-множественную сумму двухэлементных подалгебр.*

Пусть $Q = \{a, b, c, ...\}$. Рассмотрим двухэлементную подалгебру $Q' = \{a, b\}$. Если $n = 2$, то теорема 4-5 верна. Если же $n \geq 3$, то для любого элемента $c \in Q \backslash Q'$ имеем $abc \in Q \backslash Q'$, так как при $abc \in Q'$ должно быть и $c \in Q'$ (см. доказательство предыдущей теоремы 4-4). Поскольку операция в симметричной груде квазигрупповая, элементы abc для разных $c \in Q \backslash Q'$ различны и исчерпывают все дополнение $Q \backslash Q'$. Пусть $abc = d$. Тогда четверка $\{a, b, c, d\}$ по теореме 4-2 является подалгеброй, а поскольку она по теореме 4-4 не может быть трехэлементной, то $d \neq c$ и потому $n \geq 4$. Если $n = 4$, то теорема 4-5 верна и алгебра Q распадается на две двухэлементные подалгебры $Q' = \{a, b\}$ и $Q'' = \{c, d\}$. Если же $n \geq 5$, то, рассуждая аналогично, доказываем, что, в действительности, $n \geq 6$. Если $n = 6$, то теорема 4-5 верна и алгебра Q распадается на три двухэлементные подалгебры. Если же $n \geq 7$, то, повторяя предыдущие рассуждения, устанавливаем, что, на самом деле, $n \geq 8$ и т.д. Теорема 4-5 доказана.

Теорема 4-6. *Число элементов конечной алгебры порядка $n \geq 2$ из $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразия четно.*

Эта теорема есть, очевидно, простое следствие предыдущей теоремы 4-5.

Теорема 4-7. *Если алгебра Q из $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразия содержит подалгебру Q', порядок которой равен n, то порядок самой алгебры Q больше или равен $2n$.*

Пусть $Q' = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Так как Q' является подалгеброй в Q, то существует такой элемент $a \in Q$, который не принадлежит подалгебре Q'. Покажем, что для любых двух элементов b_i, b_j из нее произведение ab_ib_j также ей не принадлежит. Действительно, если $ab_ib_j = b_k$, то из $ab_kb_k = a$ получим $a = a(ab_ib_j)b_k = b_ib_jb_k = b_l$, что означает $a \in Q'$ в противоречие с выбором элемента $a \notin Q'$. Из теоремы

2-3 следует, что при различных элементах $b_i,\ i = 1, ..., n$ и фиксированных $b \in Q',\ a \in Q \backslash Q'$ произведения $ab_ib \in Q \backslash Q'$ различны. Таким образом, в дополнении $Q \backslash Q'$ имеется не менее n различных элементов, а во всей алгебре Q – не менее $2n$. Теорема 4-7 доказана.

Теорема 4-8. *В $\Phi^s_{(2,2)}$-многообразии нет такой алгебры Q, порядок которой был бы равен 6.*

Предположим противное, то есть что алгебра $Q = \{a, b, c, d, e, f\}$, содержащая 6 элементов, принадлежит многообразию $\Phi^s_{(2,2)}$. Два элемента a, b образуют двумерную подалгебру. Присоединив к ним элемент c и произведение abc, получим четырехэлементную подалгебру $Q' = \{a, b, c, abc\}$. Согласно предыдущей теореме 4-7 порядок самой алгебры Q не может быть меньше 8, хотя в ней всего 6 элементов. Полученное противоресие и доказывает теорему 4-8.

Литература

1. Курош А.Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года. М., 1974.

2. Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия физических структур. Барнаул: БГПУ, Горно-Алтайск: ГАГУ, 2003.

3. Бородин А.Н. Груда и группа как физическая структура. Приложение к [2].