СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

XXV, № 5 СЕНТЯБРЬ — ОКТЯБРЬ 1984

УДК 513.811

Г. Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

О ГРУППОВОЙ И ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЯХ В ГЕОМЕТРИИ

Геометрия метрических пространств дает нам пример бинарной структуры на одном множестве в отличие от физики, основные законы которой выражают отношения между двумя различными множествами физических объектов. Задание метрики на множестве $\mathfrak{M}$, понимаемой в самом общем смысле как некоторая функция $a:\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to R$, определяет геометрию пространства $\mathfrak{M}$. По известной метрике можно найти полную группу преобразований (движений) $\mathfrak{M}$, относительно которой эта метрика будет двухточечным инвариантом. Групповая же симметрия лежит в основе «Эрлангенской программы» Ф. Клейна (1872), согласно которой геометрия есть теория инвариантов данной группы преобразований множества $\mathfrak{M}$ [1]. С другой стороны, в геометрии проявляется так называемая *феноменологическая симметрия*, на которую впервые особое внимание обратил Ю. И. Кулаков [2], сделав ее основным принципом своей теории физических структур [3]. Сущность феноменологической симметрии в геометрии состоит в том, что в n-мерном пространстве между всеми взаимными расстояниями для $n+2$ произвольных точек имеется функциональная связь. В настоящей работе устанавливается, что групповая симметрия n-мерного пространства, определяющая подвижность твердых тел с $n(n+1)/2$ степенями свободы, эквивалентна феноменологической симметрии.

Проиллюстрируем в сравнении групповую и феноменологическую симметрии на примере евклидовой плоскости. В декартовых прямоугольных координатах квадрат расстояния $l(ij)$ между точками $i=(x(i),\ y(i))$ и $j=(x(j),\ y(j))$ задается известным выражением

$$a(ij)=l^2(ij)=(x(i)-x(j))^2+(y(i)-y(j))^2. \tag{1}$$

Заметим, что метрика (1) невырождена, т. е. координаты точек i и j входят в нее существенным образом. По метрике (1) можно найти группу всех преобразований (движений) евклидовой плоскости

$$x'=\lambda(x,\ y),\quad y'=\sigma(x,\ y), \tag{2}$$

относительно которых эта метрика является двухточечным инвариантом. В самом деле, если преобразование (2) сохраняет расстояние (1), то для функций λ и σ получаем уравнение

$$\begin{gathered}(x(i)-x(j))^2+(y(i)-y(j))^2=(\lambda(x(i),\ y(i))-\lambda(x(j),\ y(j)))^2+\\+(\sigma(x(i),\ y(i))-\sigma(x(j),\ y(j)))^2,\end{gathered} \tag{3}$$

общее решение которого можно найти:

$$\left.\begin{aligned}x'&=x\cos\gamma+y\sin\gamma+\alpha,\\ y'&=\mp x\sin\gamma\pm y\cos\gamma+\beta.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Решение (4) включает в себя как обычное движение (верхний знак), так и движение с отражением (нижний знак).

Трехпараметрическая группа преобразований координатной плоскости $\{x, y\}$ определяет по Клейну геометрию евклидовой плоскости. Метрика (1) есть единственный с точностью до одной произвольной функции от одной переменной двухточечный инвариант группы (4). С другой стороны, групповая симметрия, задаваемая преобразованиями (4), есть однозначное следствие метрики (1). Поэтому можно сказать, что *геометрия евклидовой плоскости определяется невырожденной метрикой* (1).

Возьмем на евклидовой плоскости четыре произвольные точки i, j, k, l, между которыми по формуле (1) можно найти шесть взаимных расстояний. Известно, что эти шесть расстояний функционально связаны, обращая в нуль определитель Кэли — Менгера пятого порядка

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a(ij) & a(ik) & a(il) \\ 1 & a(ij) & 0 & a(jk) & a(jl) \\ 1 & a(ik) & a(jk) & 0 & a(kl) \\ 1 & a(il) & a(jl) & a(kl) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Геометрический смысл соотношения (5) состоит в том, что объем тетраэдра с вершинами, лежащими на плоскости, равен нулю. По терминологии Ю. И. Кулакова [2], соотношение (5), справедливое для любой четверки точек, выражает феноменологическую симметрию евклидовой плоскости.

Выясним теперь, как связаны между собой групповая и феноменологическая симметрии в общем случае для любой плоской геометрии с невырожденной метрикой (плоскости Минковского, плоскости Лобачевского, симплектической плоскости, двумерной сферы и т. д.). Твердое тело на плоскости имеет три степени свободы. Положение произвольных четырех точек i, j, k, l твердого тела задают восемь координат: $x(i)$, $y(i)$, $x(j)$, $y(j)$, $x(k)$, $y(k)$, $x(l)$, $y(l)$. Постоянство всех шести взаимных расстояний $a(ij)$, $a(ik)$, $a(il)$, $a(jk)$, $a(jl)$, $a(kl)$ при свободном движении твердого тела налагает на эти восемь координат шесть условий. Если предположить, что расстояния независимы, то у четырехточечного жесткого симплекса с общим расположением точек на плоскости будет всего две степени свободы, вместо трех: $8-6=2$. Поэтому должна существовать функциональная связь между расстояниями

$$\Phi(a(ij),\ a(ik),\ \ldots,\ a(kl)) = 0, \tag{6}$$

конкретное выражение для которой в случае евклидовой плоскости задается соотношением (5). Только тогда для числа степеней свободы получим необходимое значение: $8-6+1=3$.

Простые соображения позволяют также установить, что если феноменологическая симметрия выражается некоторой зависимостью (6), то существует такая трехпараметрическая группа преобразований

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x, y; \alpha, \beta, \gamma), \\ y' &= \sigma(x, y; \alpha, \beta, \gamma), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

определяющая групповую симметрию плоскости, относительно которой метрика $a(ij)$ является двухточечным инвариантом.

Г. Гельмгольц в своей знаменитой работе «О фактах, лежащих в основании геометрии» [4] высказал предположение, что метрика n-мерного пространства не может быть произвольной, если в пространстве твердые тела движутся с $n(n+1)/2$ степенями свободы. Но тогда между всеми взаимными расстояниями для произвольных $n+2$ точек твердого тела должна быть связь $\Phi=0$, так как при отсутствии такой связи число степеней свободы $(n+2)$-точечного жесткого симплекса с общим расположением точек уменьшится ровно на единицу. Поэтому мы

можем предположить, что феноменологическая симметрия n-мерного пространства, выражаемая связью $\Phi = 0$, невозможна при произвольной метрике. Для одномерного и двумерного случаев это показано в работах автора [5, 6]. Заметим, что попытку определить все плоские геометрии, в которых «положение плоской фигуры в ее плоскости определяется тремя условиями», впервые предпринял А. Пуанкаре в его известной работе «Об основных гипотезах геометрии» [7].

От нестрогих соображений, приведенных выше, перейдем к точным формулировкам.

Пусть имеется множество $\mathfrak{M}$ произвольной природы, точки которого обозначим строчными латинскими буквами, и функция $a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$, сопоставляющая упорядоченной паре $\langle ij \rangle \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ некоторое вещественное число $a(ij) \in R$. Заметим, что область определения функции a, которую обозначим через $\mathfrak{S}_a$, может не совпадать с прямым произведением $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, т. е. не каждой паре $\langle ij \rangle \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ сопоставляется число. Однако в дальнейшем удобно не оговаривать всякий раз это обстоятельство, подразумевая, что пара $\langle ij \rangle$ всегда берется из области определения $\mathfrak{S}_a$. Функцию $a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ можно рассматривать как своего рода метрику пространства $\mathfrak{M}$, хотя и не предполагается выполнение обычных аксиом метрики: симметрии, неравенства треугольника и т. д. Мы будем предполагать, что выполняется следующее условие:

I. *Существует такое конечное базисное множество $\mathfrak{M}_B$, что если две произвольные точки $i, j \in \mathfrak{M}$ различны, то для некоторого $k \in \mathfrak{M}_B$ либо $a(ik) \neq a(jk)$, либо $a(ki) \neq a(kj)$.*

Смысл условия I состоит прежде всего в том, что рассматриваются только такие свойства пространства $\mathfrak{M}$, которые выражаются посредством функции a. Конечность базисного множества $\mathfrak{M}_B$ указывает, в некотором смысле, на конечномерность пространства $\mathfrak{M}$. Если множество $\mathfrak{M}$ содержит более двух различных точек, то, по условию I, для любой точки $i \in \mathfrak{M}$ найдется такое $k \in \mathfrak{M}_B$, что либо пара $\langle ik \rangle$, либо пара $\langle ki \rangle$ принадлежит области $\mathfrak{S}_a$, т. е. $\mathrm{pr}_1 \mathfrak{S}_a \cup \mathrm{pr}_2 \mathfrak{S}_a = \mathfrak{M}$. Если же для некоторых двух точек $i, j \in \mathfrak{M}$ не найдется такого $k \in \mathfrak{M}_B$, что выполняется одно из неравенств $a(ik) \neq a(jk)$ или $a(ki) \neq a(kj)$, то эти точки совпадают: $i = j$.

Определение 1. Множество $\widetilde{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}$ называется *ограниченным*, если ограничены области значений функций $a : \widetilde{\mathfrak{M}} \times \mathfrak{M}_B \to R$ и $a : \mathfrak{M}_B \times \times \widetilde{\mathfrak{M}} \to R$.

Ясно, что всякое конечное множество ограничено и объединение конечного числа ограниченных множеств ограничено.

В множестве $\mathfrak{M}$ естественным образом можно определить топологию. Пусть $i \in \mathfrak{M}$ — произвольная точка, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — ограниченное множество, содержащее базис $\mathfrak{M}_B$, и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $P(i, \widetilde{\mathfrak{M}}, \varepsilon)$ множество всех тех точек $i' \in \mathfrak{M}$, для которых имеют место неравенства $|a(i'k) - a(ik)| < < \varepsilon$, $|a(ki') - a(ki)| < \varepsilon$ при любом $k \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ таком, что либо пара $\langle ik \rangle$, либо пара $\langle ki \rangle$ принадлежит области $\mathfrak{S}_a = \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Семейство всех $P(i, \widetilde{\mathfrak{M}}, \varepsilon)$ для произвольных ограниченных множеств $\widetilde{\mathfrak{M}} \supset \mathfrak{M}_B$ и любых значений положительного числа ε принимается за фундаментальную систему окрестностей точки $i \in \mathfrak{M}$. Пересечение множеств $P(i, \widetilde{\mathfrak{M}}_1, \varepsilon_1)$ и $P(i, \widetilde{\mathfrak{M}}_2, \varepsilon_2)$ содержит, очевидно, множество $P(i, \widetilde{\mathfrak{M}}_1 \cup \widetilde{\mathfrak{M}}_2, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$. Заметим, что окрестность $P(i, \widetilde{\mathfrak{M}}, \varepsilon)$ есть ограниченное множество, так как по построению $\widetilde{\mathfrak{M}} \supset \mathfrak{M}_B$. Произвольной окрестностью $P(i)$ точки i будем считать всякое подмножество из $\mathfrak{M}$, содержащее некоторую окрестность этой точки из фундаментальной системы.

Лемма 1. *Введенная для всех точек $i \in \mathfrak{M}$ система множеств $P(i)$ удовлетворяет аксиомам системы окрестностей и определяет в множестве $\mathfrak{M}$ единственную отделимую в смысле Хаусдорфа топологическую структуру.*

Всякое подмножество множества $\mathfrak{M}$, содержащее какую-либо окрестность $P(i)$, также является окрестностью. Пересечение конечного числа окрестностей есть окрестность. Точка i принадлежит каждой своей окрестности. Все это непосредственно следует из определения системы $P(i)$. Докажем теперь, что любая окрестность $P(i)$ содержит такое множество $P_1(i)$, что $P(i)$ является окрестностью для каждой точки из $P_1(i)$. Пусть $P(i)$ содержит окрестность $P(i, \widetilde{\mathfrak{M}}, \varepsilon)$ из фундаментальной системы. В качестве $P_1(i)$ возьмем множество $P(i, \widetilde{\mathfrak{M}}, \varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Рассмотрим у каждой точки $i' \in P_1(i)$ окрестность $P_2(i') = P(i', \widetilde{\mathfrak{M}}, \varepsilon_2)$, где $\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$. Покажем, что точка i' входит в $P(i)$ вместе с окрестностью $P_2(i')$. Действительно, для любой точки $i'' \in P_2(i')$ имеем неравенства $|a(i''k) - a(ik)| \leqslant |a(i''k) - a(i'k)| + |a(i'k) - a(ik)| < \varepsilon_2 + \varepsilon_1 = \varepsilon$, и аналогично, $|a(ki'') - a(ki)| < \varepsilon$, где $k \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, т. е. $P_2(i') \subset P(i)$. Отделимость топологии в смысле Хаусдорфа можно показать следующим образом. Поскольку по построению $\widetilde{\mathfrak{M}} \supset \mathfrak{M}_B$, топология в $\mathfrak{M}$ мажорирует слабейшую, при которой непрерывны частичные отображения $a : \mathfrak{M} \times \{k\} \to R$ и $a : \{k\} \times \mathfrak{M} \to R$, где $k \in \mathfrak{M}_B$. Если $i \neq j$, то, согласно условию 1, найдется такое $k \in \mathfrak{M}_B$, что либо $a(ik) \neq a(jk)$ либо $a(ki) \neq a(kj)$; т. е. для любых двух различных элементов $i, j \in \mathfrak{M}$ существует такое непрерывное отображение множества $\mathfrak{M}$ в отделимое пространство R, при котором их образы различны. Это и доказывает отделимость построенной в $\mathfrak{M}$ топологии в смысле Хаусдорфа, когда для любых двух различных точек $i, j \in \mathfrak{M}$ можно найти непересекающиеся окрестности $P(i)$, $P(j)$. В дальнейшем под $P(i)$ удобно понимать открытую окрестность точки $i \in \mathfrak{M}$.

Топология в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ определяется обычным образом, как произведение топологий пространств-сомножителей. Естественно предположить, что область определения функции a открыта относительно $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, т. е. пара $\langle ij \rangle \in \mathfrak{S}_a$ входит в $\mathfrak{S}_a$ вместе с некоторой своей окрестностью $P(i) \times P(j)$.

Лемма 2. *Функция $a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ непрерывна по топологии прямого произведения $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$.*

Пусть $\langle ij \rangle$ — произвольная пара из области $\mathfrak{S}_a \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ и $P(i) \times P(j) \subset \mathfrak{S}_a$ — некоторая ее окрестность. Рассмотрим ε-окрестность точки $a(ij) \in R$, задаваемую неравенством $|x - a(ij)| < \varepsilon$. Если $i' \in P_1(i) = P(i) \cap P(i, \{j\} \cup \mathfrak{M}_B, \varepsilon_1)$ и $j' \in P_1(j) = P(j) \cap P(j, P(i, \{j\} \cup \mathfrak{M}_B, \varepsilon_1), \varepsilon_2)$, где $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$, то $|a(i'j') - a(ij)| < \varepsilon$. Действительно, $|a(i'j') - a(ij)| \leqslant |a(i'j') - a(i'j)| + |a(i'j) - a(ij)| < \varepsilon_2 + \varepsilon_1$ и потому неравенство $a(i'j') - a(ij)| < \varepsilon$ имеет место для любой пары $\langle i'j' \rangle$ из окрестности $P_1(i) \times P_1(j) \subset \mathfrak{S}_a$ исходной пары $\langle ij \rangle$. А это и означает непрерывность функции $a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ по топологии прямого произведения $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, т. е. по совокупности переменных.

Заметим, что если функция $a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ удовлетворяет аксиомам обычной метрики, то построенная в $\mathfrak{M}$ топология совпадает с естественной топологией метрического пространства и является слабейшей топологией, при которой эта метрика непрерывна.

Пусть $n \geqslant 1$ — произвольное целое число. Для некоторого кортежа $\langle p \ldots q \rangle$ длины n построим непрерывное отображение $a[p \ldots q] : \mathfrak{M} \to R^n$, сопоставляя точке $i \in \mathfrak{M}$ совокупность n чисел $(a(ip), \ldots, a(iq)) \in R^n$. Второе условие определяет размерность множества $\mathfrak{M}$.

II. *Для каждой точки $i \in \mathfrak{M}$ найдется такой кортеж $\langle p \ldots q \rangle$ длины n, что для некоторой окрестности $P(i)$ отображение $a[p \ldots q] : P(i) \to R^n$ является локальным гомеоморфизмом.*

Согласно условию II, множество $\mathfrak{M}$ является топологическим многообразием размерности n, в некоторой окрестности каждой точки которого можно ввести локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$, полагая, например, $x^1(i) = a(ip), \ldots, x^n(i) = a(iq)$. Для исходной функции $a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ в некоторой окрестности $P(i) \times P(j)$ произвольной пары $\langle ij \rangle \in \mathfrak{S}_a$ полу-

чаем локальное координатное представление

$$a(ij) = a(x^1(i), \ldots, x^n(i), x^1(j), \ldots, x^n(j)), \tag{8}$$

свойства которого задаются третьим условием.

III. *Функция $a(ij)$ достаточно гладкая и локальные координаты $x^1(i), \ldots, x^n(i)$ и $x^1(j), \ldots, x^n(j)$ входят в нее существенным образом.*

Достаточная гладкость подразумевает наличие непрерывных производных достаточно высокого порядка. Существенная зависимость от локальных координат предполагает, что никакая невырожденная замена не приведет к уменьшению их числа.

Пусть, далее, $m = n + 2 \geqslant 3$ и $\mathfrak{M}^m$ m-кратное прямое произведение множества $\mathfrak{M}$ на себя. В $\mathfrak{M}^m$ обычным образом определим топологию прямого произведения. Построим отображение $A : \mathfrak{M}^m \to R^{m(m-1)/2}$, сопоставляя кортежу $\langle ijk \ldots vw \rangle \in \mathfrak{M}^m$ длины $m = n + 2$ совокупность $m(m-1)/2$ чисел $(a(ij), a(ik), \ldots, a(vw))$, соответствующих всем упорядоченным парам в кортеже и рассматриваемых как координаты некоторой точки в пространстве $R^{m(m-1)/2}$. Обозначим область определения построенного отображения через $\mathfrak{S}_a$, которая может и не совпадать со всем прямым произведением $\mathfrak{M}^m$. Естественно предположить, что $\mathfrak{S}_A$ не пусто и что для любой пары из $\mathfrak{S}_A$ найдется такой кортеж из $\mathfrak{S}_A$, который содержит эту пару. Окрестность кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$ в $\mathfrak{M}^m$ будем обозначать через $P(\langle ijk \ldots vw \rangle)$. Поскольку область $\mathfrak{S}_a$ по предположению открыта в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, открытой будет также и область $\mathfrak{S}_A$ в $\mathfrak{M}^m$, т. е. кортеж $\langle ijk \ldots \ldots vw \rangle$ входит в $\mathfrak{S}_A$ вместе с некоторой своей окрестностью $P(\langle ijk \ldots vw \rangle)$.

Лемма 3. *Отображение $A : \mathfrak{M}^m \to R^{m(m-1)/2}$ непрерывно по топологии прямого произведения $\mathfrak{M}^m$.*

Рассмотрим точку $(a(ij), a(ik), \ldots, a(vw)) \in R^{m(m-1)/2}$, соответствующую произвольному кортежу $\langle ijk \ldots vw \rangle \in \mathfrak{S}_A \subset \mathfrak{M}^m$, и некоторую ее ε-окрестность по топологии пространства $R^{m(m-1)/2}$. В соответствии с леммой 2, по которой функция a непрерывна, можно найти такие окрестности $P_1(i)$, $P_1(j)$, что будет выполняться неравенство $|a(i'j') - a(ij)| < \varepsilon$ для любой пары $\langle i'j' \rangle \in P_1(i) \times P_1(j)$. Затем можно найти такие окрестности $P_2(i)$, $P_1(k)$, что будет выполняться второе неравенство $|a(i'k') - a(ik)| < \varepsilon$ для любой пары $\langle i'k' \rangle \in P_2(i) \times P_1(k)$ и т. д. Таким образом, для каждой из точек $i, j, k, \ldots, v, w \in \mathfrak{M}$ определится $m - 1 = n + 1$ окрестностей. Если взять их пересечение, то получим такие окрестности $P(i), \ldots, P(w)$, что множество значений отображения $A : P(i) \times \ldots \times P(w) \to R^{m(m-1)/2}$ будет принадлежать ε-окрестности точки $(a(ij), a(ik), \ldots, a(vw))$, что и доказывает лемму 3.

Определение 2. Будем говорить, что функция $a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ *задает на множестве $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную n-мерную геометрию расстояний ранга* $m = n + 2$, если, кроме условий I, II, III, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IV. *Для каждого кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$ длины $m = n + 2$ из плотного в $\mathfrak{S}_A \subset \mathfrak{M}^m$ множества и некоторой его окрестности $P(\langle ijk \ldots vw \rangle)$ существует такая достаточно гладкая функция $\Phi : \mathrm{E} \to R$, определенная в некоторой области $\mathrm{E} \subset R^{m(m-1)/2}$, что $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$ в точке $A(\langle ijk \ldots vw \rangle) \in \mathrm{E}$ и множество $A(P(\langle ijk \ldots vw \rangle))$ совпадает с множеством нулей функции Φ, т. е.*

$$\Phi(a(ij), a(ik), \ldots, a(vw)) = 0 \tag{9}$$

для всякого кортежа из $P(\langle ijk \ldots vw \rangle)$.

Аксиома IV составляет содержание принципа феноменологической симметрии в общей схеме теории физических структур, предложенной Ю. И. Кулаковым [3] как средство классификации физических законов. Эта аксиома выражает собой требование, чтобы $m(m-1)/2$ упорядоченных взаимных расстояний между точками любого кортежа из $P(\langle ijk \ldots \ldots vw \rangle)$ были функционально связаны, т. е. удовлетворяли некоторому

уравнению (9), задающему аналитическое выражение физического закона. Расстояние $a(ij)$ есть результат измерения физической величины a. Требование $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$ в точке $A(\langle ijk\ldots vw\rangle)$, входящее в аксиому IV, означает, грубо говоря, что в $\mathfrak{M}^m$ существуют кортежи $\langle ijk\ldots vw\rangle$, точки которых находятся в общем расположении, т. е. что отображение A в определенном смысле не вырождено.

Используя представление (8), запишем локальное координатное задание отображения $A:\mathfrak{M}^m \to R^{m(m-1)/2}$:

$$\left.\begin{aligned} a(ij) &= a(x^1(i), \ldots, x^n(i), x^1(j), \ldots, x^n(j)),\\ a(ik) &= a(x^1(i), \ldots, x^n(i), x^1(k), \ldots, x^n(k)),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a(vw) &= a(x^1(v), \ldots, x^n(v), x^1(w), \ldots, x^n(w)),\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

функциональная матрица которого имеет $m(m-1)/2$ строк и mn столбцов:

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial a(ij)}{\partial x^1(i)} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial a(ij)}{\partial x^n(j)} & 0 & \ldots\ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots\ldots & 0 & \dfrac{\partial a(vw)}{\partial x^1(v)} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial a(vw)}{\partial x^n(w)}\end{matrix}\right\|. \tag{11}$$

Задание (10) отображения A есть задание системы $m(m-1)/2$ дифференцируемых функций $a(ij)$, $a(ik)$, ..., $a(vw)$, специальным образом зависящих от mn координат $x^1(i)$, ..., $x^n(i)$, ..., $x^1(w)$, ..., $x^n(w)$. Поскольку число функций меньше общего числа координат, наличие связи (9) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольных функций (10). Матрица Якоби системы функций (10) есть функциональная матрица отображения A и ее ранг считается рангом этого отображения.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $a:\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to R$ задавала на множестве $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную n-мерную геометрию расстояний ранга $m=n+2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения был равен $m(m-1)/2-1$ на плотном в $\mathfrak{S}_A\subset\mathfrak{M}^m$ множестве.*

Докажем сначала необходимость. Согласно аксиоме IV определения 2 в любой окрестности произвольного кортежа из $\mathfrak{S}_A$ найдется такой кортеж $\langle ijk\ldots vw\rangle$ и такая его окрестность $P\langle ijk\ldots vw\rangle)$, что множество значений $A(P(\langle ijk\ldots vw\rangle))$ будет задаваться уравнением (9), причем $\operatorname{grad}\Phi\neq 0$ в точке $A(\langle ijk\ldots vw\rangle)$. Поскольку функция Φ достаточно гладкая, можно без ограничения общности считать, что $\operatorname{grad}\Phi\neq 0$ для всех точек множества $A(P(\langle ijk\ldots vw\rangle))$. Но тогда это множество является гиперповерхностью размерности $m(m-1)/2-1$, лежащей в окрестности $E\subset R^{m(m-1)/2}$, где определена функция Φ. Продифференцируем уравнение (9) по каждой из mn координат $x^1(i)$, ..., $x^n(w)$. В результате получим mn линейных однородных уравнений относительно $m(m-1)/2$ частных производных функции Φ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial a(ij)}\cdot\frac{\partial a(ij)}{\partial x^1(i)}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial a(iw)}\cdot\frac{\partial a(iw)}{\partial x^1(i)}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{\partial\Phi}{\partial a(iw)}\cdot\frac{\partial a(iw)}{\partial x^n(w)}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial a(vw)}\cdot\frac{\partial a(vw)}{\partial x^n(w)}=0.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Матрица системы уравнений (12) есть транспонированная матрица (11). Поскольку $\operatorname{grad}\Phi\neq 0$, уравнения (12) имеют, по крайней мере, одно линейно независимое ненулевое решение в окрестности $P(\langle ijk\ldots vw\rangle)$. Легко понять, что любые два ненулевых решения линейно зависимы. В самом деле, если бы у системы (12) было бы два линейно независимых ненулевых решения, то в окрестности $P(\langle ijk\ldots vw\rangle)$, кроме уравнения (9), имело

бы место еще одно уравнение $\Phi_1 = 0$ с $\operatorname{grad}\Phi_1 \neq 0$, причем функции Φ и Φ_1 были бы независимы. Но тогда множество $A(P(\langle ijk\ldots vw\rangle))$ было бы гиперповерхностью размерности не больше $m(m-1)/2-2$ и не совпадало бы с множеством нулей функции Φ, которое есть гиперповерхность размерности $m(m-1)/2-1$, что противоречит аксиоме IV. Итак, система (12) имеет всего одно линейно независимое ненулевое решение. Поэтому ранг матрицы системы, во-первых, не может быть равен своему максимально возможному значению $m(m-1)/2$ для некоторого кортежа из $P(\langle ijk\ldots vw\rangle)$, так как система (12) имела бы тогда только нулевое решение в некоторой окрестности этого кортежа. Во-вторых, ранг матрицы системы, т. е. матрицы (11), для некоторого кортежа $\langle i'j'k'\ldots v'w'\rangle \in P(\langle ijk\ldots vw\rangle)$ будет точно на единицу меньше числа неизвестных производных в системе (12), т. е. равен $m(m-1)/2-1$. Ранг отображения A есть ранг функциональной матрицы (11) и потому для кортежа $\langle i'j'k'\ldots v'w'\rangle$ равен $m(m-1)/2-1$. Легко понять, что множество таких кортежей плотно в $\mathfrak{S}_A$, также как плотно в $\mathfrak{S}_A$, по условию аксиомы IV, множество кортежей, для которых $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$.

Перейдем к доказательству достаточности. Пусть для некоторого кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ из плотного $\mathfrak{S}_A$ множества ранг отображения A, задаваемого системой функций (10), равен $m(m-1)/2-1$. Прежде всего заметим, что ни для одного кортежа из $\mathfrak{S}_A$ ранг матрицы (11) не равен своему максимально возможному значению $m(m-1)/2$, т. е. числу строк, которое не больше числа столбцов, равного mn, где $m = n+2$. Действительно, если для некоторого кортежа из $\mathfrak{S}_A$ ранг матрицы (11), т. е. ранг отображения A, будет равен $m(m-1)/2$, то он, в силу достаточной гладкости функций системы (10), будет равен тому же максимально возможному значению и в некоторой его окрестности. Но тогда в этой окрестности не найдется ни одного кортежа, для которого ранг отображения A был бы равен $m(m-1)/2-1$, что противоречит условию теоремы 1. Следовательно, существует такая окрестность кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$, в которой всюду ранг отображения A равен $m(m-1)/2-1$. По свойству дифференцируемых отображений для некоторой окрестности $P(\langle ijk\ldots vw\rangle)$ множество $A(P(\langle ijk\ldots vw\rangle))$ гомеоморфно окрестности из $R^{m(m-1)/2-1}$, т. е. является гиперповерхностью размерности $m(m-1)/2-1$. Можно считать, очевидно, что ранг отображения A равен $m(m-1)/2-1$ во всей окрестности $P(\langle ijk\ldots vw\rangle)$. По матрице (11) отображения A запишем систему уравнений (12). Это система, поскольку ее ранг равен $m(m-1)/2-1$ и ровно на единицу меньше числа неизвестных производных функции Φ, имеет в окрестности $P(\langle ijk\ldots vw\rangle)$ единственное линейно независимое ненулевое решение. А это означает, что существует единственная (с точностью до функциональной зависимости) функция $\Phi: \mathrm{E}' \to R$, определенная в некоторой окрестности $\mathrm{E}' \subset R^{m(m-1)/2}$ точки $A(\langle ijk\ldots vw\rangle)$, такая что имеет место уравнение (9) для всех кортежей из $P(\langle ijk\ldots vw\rangle)$, т. е. окрестность $A(P(\langle ijk\ldots vw\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ. Очевидно, для некоторой окрестности $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}'$ множество нулей функции Φ и множество $A(P(\langle ijk\ldots vw\rangle))$ будут совпадать, являясь гиперповерхностью размерности $m(m-1)/2-1$, так как $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$ в окрестности $P(\langle ijk\ldots vw\rangle)$. Теорема 1 полностью доказана.

Преобразованием множества $\mathfrak{M}$, как известно, называется взаимнооднозначное отображение этого множества на себя. Некоторое преобразование назовем *движением*, если оно сохраняет исходную функцию (метрику) $a: \mathfrak{M}\times\mathfrak{M} \to R$. Совокупность всех преобразований, относительно которых метрика a является двухточечным инвариантом (т. е. сохраняется), составляет, очевидно, группу. Координатное задание дифференцируемого локального преобразования множества $\mathfrak{M}$ можно записать в виде

$$x'^{\mu} = \lambda^{\mu}(x^1, \ldots, x^n), \quad \mu = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

подобном (2). Инвариантность метрики (8) относительно преобразова-

ний (13) означает, что имеет место уравнение

$$a(x^1(i), \ldots, x^n(i), x^1(j), \ldots, x^n(j)) = a(\lambda^1(i), \ldots, \lambda^n(i), \lambda^1(j), \ldots, \lambda^n(j)), \quad (14)$$

аналогичное уравнению (3). По известной функции (8), решая это уравнение, можно найти группу преобразований (13). Нам же о метрике (8) известно только, что она феноменологически инвариантна, т. е. удовлетворяет некоторому уравнению (9). Но этого оказывается достаточно для установления факта существования группы движений с $n(n+1)/2$ и не более параметрами.

Определение 3. Будем говорить, что функция $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$ задает на множестве $\mathfrak{M}$ *n-мерную геометрию расстояний, наделенную групповой симметрией степени* $n(n+1)/2$, если, кроме условий I, II, III, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IV′. *Для всякой точки i и для всякой точки j из плотного в* $\mathfrak{M}$ *множества существует такая локальная группа дифференцируемых локальных преобразований некоторых их окрестностей* $P(i)$ *и* $P(j)$, *содержащая* $n(n+1)/2$ *и не более существенных независимых параметров, что если пара* $\langle ij \rangle \in \mathfrak{S}_a$, *то функция* $a: P(i) \times P(j) \to R$ *является двухточечным инвариантом.*

Локальная группа преобразований, о которой говорится в аксиоме IV′, определяет полную подвижность твердых тел в n-мерном пространстве $\mathfrak{M}$ с $n(n+1)/2$ и не более степенями свободы. Однако в общем случае такое движение задано не для всякой пары из $\mathfrak{S}_a$, точно так же, как не для всякой пары из $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ определена функция a. Может быть и такой случай, когда для некоторой пары движение задано, в то время как сама пара не принадлежит области определения функции a. Слова «не более» в аксиоме IV′ означают, что группа движений не может содержать более чем $n(n+1)/2$ существенных независимых параметров. Подгруппы группы движений, естественно, могут зависеть от меньшего числа параметров.

Лемма 4. *Если движение окрестности* $P(i) \times P(j)$, *сохраняющее расстояние* $a: P(i) \times P(j) \to R$, *содержит некоторое число существенных независимых параметров, то преобразование окрестности* $P(i)$ *и преобразование окрестности* $P(j)$, *составляющие это движение, каждое в отдельности содержат такое же число существенных независимых параметров.*

Локальное движение окрестности $P(i) \times P(j)$ пары $\langle ij \rangle$ запишется в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} dx^\mu(i) &= \lambda^\mu_\sigma(x^1(i), \ldots, x^n(i))\, d\alpha^\sigma, \\ dx^\mu(j) &= \lambda^\mu_\sigma(x^1(j), \ldots, x^n(j))\, d\alpha^\sigma, \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

где $dx^\mu = x'^\mu - x^\mu$, $d\alpha^\sigma$ — бесконечно малые параметры движения, а по «немому» индексу σ производится суммирование в пределах от 1 до общего числа параметров. Подставляя преобразование (15) в уравнение (14) с учетом независимости параметров $d\alpha^\sigma$, получаем систему линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных для функции $a(ij)$:

$$\lambda^\mu_\sigma(i) \frac{\partial a(ij)}{\partial x^\mu(i)} + \lambda^\mu_\sigma(i) \frac{\partial a(ij)}{\partial x^\mu(j)} = 0, \quad (16)$$

где по «немому» индексу μ производится суммирование в пределах от 1 до n. Поскольку параметры $d\alpha^\sigma$ существенны, функции $\lambda^\mu_\sigma(i)$ и $\lambda^\mu_\sigma(j)$ линейно независимы по нижнему индексу σ с одинаковыми постоянными коэффициентами. А это означает, что уравнения системы (16) линейно независимы с постоянными коэффициентами. Предположим, что независимые параметры $d\alpha^\sigma$ в преобразование $dx^\mu(i) = \lambda^\mu_\sigma(i)\, d\alpha^\sigma$ окрестности $P(i)$ входят несущественным образом. В этом случае функции $\lambda^\mu_\sigma(i)$ будут линейно зависимы по нижнему индексу σ с постоянными коэффициентами, т. е. найдутся такие числа c^σ, не все равные нулю одновре-

менно, что выполняется соотношение $c^{\sigma}\lambda^{\mu}_{\sigma}(i)=0$, в то время как $c^{\sigma}\lambda^{\mu}_{\sigma}(j)\neq 0$ для некоторого μ. Но тогда из системы уравнений (16) получается новое уравнение

$$c^{\sigma}\lambda^{\mu}_{\sigma}(j)\,\partial a(ij)/dx^{\mu}(j)=0, \tag{16'}$$

в которое входят только производные по координатам $x^1(j), \ldots, x^n(j)$ и от этих же только координат зависят коэффициенты $c^{\sigma}\lambda^{\mu}_{\sigma}(j)$. Это уравнение решается методом характеристик, причем система уравнений характеристик имеет не более $n-1$ независимых интегралов. Следовательно, его общее решение будет:

$$a(ij)=a(x^1(i), \ldots, x^n(i), \psi^1(j), \ldots, \psi^{n-1}(j)),$$

где, например, $\psi^1(j)=\psi^1(x^1(j), \ldots, x^n(j))$ есть функция первого интеграла уравнений характеристик. Однако в полученное выражение для $a(ij)$ координаты $x^1(j), \ldots, x^n(j)$ входят несущественным образом, что противоречит условию III. Аналогично доказывается, что независимые параметры $d\alpha^{\sigma}$ входят существенным образом и в преобразование $dx^{\mu}(j)=\lambda^{\mu}_{\sigma}(j)\,d\alpha^{\sigma}$ окрестности $P(j)$.

Лемма 5. *Множество кортежей $\langle ijk\ldots vw\rangle$ длины $m=n+2$, движение некоторой окрестности $P(i)\times\ldots\times P(w)$ которых, содержащее $n(n+1)/2$ и не более существенных независимых параметров, сохраняет все взаимные упорядоченные расстояния $a:P(i)\times P(j)\to R$, $a:P(i)\times\times P(k)\to R, \ldots, a:P(v)\times P(w)\to R$ плотно в $\mathfrak{S}_A\subset\mathfrak{M}^m$.*

Пусть $\langle ijk\ldots vw\rangle$ такой кортеж длины $m=n+2$, что точки $i, j, k, \ldots, v, w$ принадлежат плотному подмножеству в $\mathfrak{M}$, о котором говорится в аксиоме IV′. Очевидно, множество таких кортежей плотно в $\mathfrak{M}^m\supset\mathfrak{S}_A$. Для пары $\langle ij\rangle$, согласно аксиоме IV′, найдется такая окрестность $P_1(i)\times P_1(j)$, движение которой сохраняет расстояние $a:P_1(i)\times\times P_1(j)\to R$. Далее для пары $\langle ik\rangle$ найдется такая окрестность $P_2(i)\times\times P_1(k)$, что сохраняется расстояние $a:P_2(i)\times P_1(k)\to R$. Рассматривая последовательно все пары в кортеже $\langle ijk\ldots vw\rangle$, получим для каждой из точек $i, j, k, \ldots, v, w$ $m-1$ окрестность. Беря пересечение этих окрестностей, найдем такую окрестность $P(i)\times\ldots\times P(w)$ кортежа $\langle ijk\ldots\ldots vw\rangle$, движение которой сохраняет все $m(m-1)/2$ расстояний. Естественно при этом, что общее движение задается $n(n+1)/2$ и не более существенными независимыми параметрами, как и движение окрестности точки по условию аксиомы IV′. Лемма 5 доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $a:\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to R$ задавала на множестве $\mathfrak{M}$ n-мерную геометрию расстояний, наделенную групповой симметрией степени $n(n+1)/2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения A был равен $m(m-1)/2-1$ на плотном в $\mathfrak{S}_A\subset\mathfrak{M}^m$ множестве.*

Докажем сначала необходимость. Рассмотрим m-точечный симплекс, соответствующий некоторому кортежу из окрестности $P(i)\times\ldots\ldots\times P(w)$, устанавливаемой леммой 5. Движение симплекса $\langle ijk\ldots vw\rangle$ как твердого тела означает, что при изменении координат точек симплекса все взаимные упорядоченные расстояния в нем, определяемые системой функций (10), остаются постоянными. Постоянство расстояний (10) при движении выражается обращением в нуль их дифференциалов

$$da(ij)=da(ik)=\ldots=da(vw)=0,$$

хотя и не обращаются в нуль одновременно дифференциалы всех координат. В результате из этих условий получаем систему $m(m-1)/2$ линейных однородных уравнений относительно mn независимых дифферен-

циалов $dx^1(i), \ldots, dx^n(w)$ координат точек симплекса $\langle ijk \ldots vw \rangle$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial a(ij)}{\partial x^\mu(i)} dx^\mu(i) + \frac{\partial a(ij)}{\partial x^\mu(j)} dx^\mu(j) = 0, \\ &\frac{\partial a(ik)}{\partial x^\mu(i)} dx^\mu(i) + \frac{\partial a(ik)}{\partial x^\mu(k)} dx^\mu(k) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial a(vw)}{\partial x^\mu(v)} dx^\mu(v) + \frac{\partial a(vw)}{\partial x^\mu(w)} dx^\mu(w) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Матрица системы (17) совпадает с функциональной матрицей (11) отображения A. Локальное движение некоторой окрестности симплекса-кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$ можно, согласно лемме 5 и формулам (15), записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &dx^\mu(i) = \lambda^\mu_\sigma(x^1(i), \ldots, x^n(i)) d\alpha^\sigma, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &dx^\mu(w) = \lambda^\mu_\sigma(x^1(w), \ldots, x^n(w)) d\alpha^\sigma, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где по «немому» индексу σ производится суммирование в пределах от 1 до $n(n+1)/2$. Из леммы 5 вытекает, что функции λ^μ_σ линейно независимы по нижнему индексу σ с постоянными коэффициентами. Так как число дифференциалов координат, равное mn (т. е. $(n+2)n$), больше числа дифференциалов $d\alpha^\sigma$ параметров движения (18), равного $n(n+1)/2$, система (17) имеет $n(n+1)/2$ и не более линейно независимых с постоянными коэффициентами решений. Эти решения можно получить из выражений (18), беря соответствующее число линейно независимых векторов $(d\alpha^1, d\alpha^2, \ldots, d\alpha^{n(n+1)/2})$, например, $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$ $\ldots, (0, 0, \ldots, 1)$. Покажем, что эти решения будут также линейно независимы и с переменными коэффициентами, т. е. в общем смысле. Предположим противное. Пусть найдутся такие переменные коэффициенты c^σ, $\sigma = 1, 2, \ldots, n(n+1)/2$, что имеют место соотношения

$$c^\sigma \lambda^\mu_\sigma(i) = 0, \quad c^\sigma \lambda^\mu_\sigma(j) = 0, \ldots, c^\sigma \lambda^\mu_\sigma(w) = 0, \tag{19}$$

вытекающие из линейной зависимости в общем смысле тех решений (18), которые с постоянными коэффициентами линейно независимы. Коэффициенты линейной зависимости c^σ, если они отличны от нуля, есть решения системы mn уравнений (19) и, по предположению, являются некоторыми функциями координат точек симплекса $\langle ijk \ldots vw \rangle$. Рассмотрим движение симплекса $\langle k \ldots vw \rangle$, содержащего n точек, и симплекса $\langle jk \ldots vw \rangle$, содержащего $n+1$ точку. Переход от первого симплекса ко второму состоит в добавлении точки j, положение которой определяется n координатами $x^1(j), \ldots, x^n(j)$. Однако изменение этих координат при движении однозначно определяется изменением координат $x^\nu(k), \ldots$ $\ldots, x^\nu(w)$, $\nu = 1, \ldots, n$, так как движение должно сохранять дополнительно ровно n расстояний $a(jk), \ldots, a(jw)$, в которые координаты $x^1(j), \ldots, x^n(j)$ по условию III входят существенным образом. Это означает, что имеется линейная связь между дифференциалами координат $x^\mu(j)$ и $x^\nu(k), \ldots, x^\nu(w)$:

$$dx^\mu(j) = b^\mu_{1\nu} dx^\nu(k) + \ldots + b^\mu_{n\nu} dx^\nu(w),$$

которая, в соответствии с выражениями (18) и в силу независимости параметров движения $d\alpha^\sigma$, переходит в линейную связь между функциями

$$\lambda^\mu_\sigma(j) = b^\mu_{1\nu} \lambda^\nu_\sigma(k) + \ldots + b^\mu_{n\nu} \lambda^\nu_\sigma(w). \tag{20}$$

Запишем подсистему $(m-2)n$ уравнений системы (19), относящуюся к кортежу $\langle k \ldots vw \rangle$ длины $n = m-2$:

$$c^{\sigma}\lambda^{\mu}_{\sigma}(k)=0,\ \ldots,\ c^{\sigma}\lambda^{\mu}_{\sigma}(w)=0. \qquad (19')$$

Соответствующая подсистема системы (19) для кортежа $\langle jk\ldots vw\rangle$ длины $n+1$ получается добавлением к подсистеме (19′) уравнений $c^{\sigma}\lambda^{\mu}_{\sigma}(j)=0$, которые по линейной связи (20) являются следствием уравнений подсистемы (19′). Таким образом, ранги матриц подсистем системы (19), относящиеся к кортежам $\langle k\ldots vw\rangle$ и $\langle jk\ldots vw\rangle$, совпадают. Пусть ранг матрицы подсистемы (19′) равен r. Ясно, что этот ранг не может принимать своего максимально возможного значения $n(n+1)/2$, так как тогда вся система (19), ранг которой тоже был бы равен $n(n+1)/2$, имела бы только нулевое решение, что противоречит сделанному предположению. Поэтому ранг матрицы подсистемы (19′) должен быть меньше $n(n+1)/2$. В матрице этой подсистемы найдется такая квадратная подматрица размера $r<n(n+1)/2$, определитель которой отличен от нуля. Возьмем определитель $r+1$ порядка, содержащий эту подматрицу в качестве минора порядка r, и одну строку из матрицы подсистемы (19) для кортежа $\langle jk\ldots vw\rangle$ длины $n+1$, в которую входят функции $\lambda^{\mu}_{\sigma}(j)$. Поскольку, по доказанному выше, ранг матрицы подсистемы при этом не возрастает, указанный определитель $(r+1)$-го порядка должен обращаться в нуль. Раскрывая этот определитель по элементам строки, содержащей функции $\lambda^{\mu}_{\sigma}(j)$, получаем связь:

$$\tilde{c}^{\sigma}(\langle k\ldots vw\rangle)\lambda^{\mu}_{\sigma}(j)=0,$$

где $\tilde{c}^{\sigma}$ есть алгебраические дополнения к $\lambda^{\mu}_{\sigma}(j)$, зависящие от координат точек кортежа $\langle k\ldots vw\rangle$ и не зависящих от координат $x^{\mu}(j)$ точки j. Заметим, что, по крайней мере, один из коэффициентов $\tilde{c}^{\sigma}$ обязательно отличен от нуля. Фиксируя в полученной связи координаты точек кортежа $\langle k\ldots vw\rangle$ длины n, устанавливаем, что функции $\lambda^{\mu}_{\sigma}(j)$ линейно зависимы по нижнему индексу σ с постоянными коэффициентами $\tilde{c}^{\sigma}$. Однако это противоречит аксиоме IV′, согласно которой преобразование окрестности $P(j)$ содержит $n(n+1)/2$ и не более существенных независимых параметров $d\alpha^{\sigma}$, т. е. функции $\lambda^{\mu}_{\sigma}(j)$ по нижнему индексу σ должны быть линейно независимы с постоянными коэффициентами. Таким образом, система уравнений (17) имеет $n(n+1)/2$ линейно независимых в общем смысле ненулевых решений в окрестности $P(i)\times\ldots\times P(w)$. Легко понять, что это число максимально, так как если бы система (17) имела более $n(n+1)/2$ линейно независимых ненулевых решений, то движение симплекса-кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ длины $m=n+2$ могло бы содержать более чем $n(n+1)/2$ существенных независимых параметров, что противоречит лемме 5. Пусть в $P(i)\times\ldots\times P(w)$ найдется такой кортеж, для которого ранг матрицы (11) равен своему максимально возможному значению $m(m-1)/2$, т. е. числу уравнений в системе (17). В силу достаточной гладкости функций a, ранг матрицы (11) будет равен $m(m-1)/2$ в некоторой окрестности этого кортежа, содержащейся в $P(i)\times\ldots\times P(w)$. Как известно, максимальное число линейно независимых ненулевых решений системы линейных однородных уравнений равно числу неизвестных минус ранг матрицы системы. В предполагаемом случае для системы (17) оно будет равно $mn-m(m-1)/2=(n+2)n-(n+2)\times(n+1)/2=n(n+1)/2-1$, хотя, как только что было показано, система (17) имеет $n(n+1)/2$ линейно независимых ненулевых решений. С другой стороны, ранг матрицы (11) не может быть меньше чем или равен $m(m-1)/2-2$ всюду в окрестности $P(i)\times\ldots\times P(w)$. Действительно, в этом случае у системы (17) будет более $n(n+1)/2$ линейно независимых решений, однако выше было установлено, что их максимальное число равно $n(n+1)/2$. Следовательно, в окрестности $P(i)\times\ldots\times P(w)$ плотного в $\mathfrak{S}_A\subset\mathfrak{M}^{m(m-1)/2}$ множества кортежей, устанавливаемого леммой 5, найдется такой кортеж, для ко-

торого ранг матрицы (11), т. е. ранг отображения A, равен $m(m-1)/2-1$. Множество таких кортежей, очевидно, плотно в $\mathfrak{S}_A$, так как если $P(\langle ijk\ldots vw\rangle)$ — произвольная окрестность, то движение (18), о котором говорится в лемме 5, можно рассматривать в отношении окрестности $P_1(i)\times\ldots\times P_1(w)=P(\langle ijk\ldots vw\rangle)\cap P(i)\times\ldots\times P(w)$.

Перейдем к доказательству достаточности. Как и в соответствующей части доказательства теоремы 1, предварительно заметим, что ни для одного кортежа из $\mathfrak{S}_A$ ранг матрицы (11) не равен своему максимально возможному значению $m(m-1)/2$. Пусть для кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ из плотного в $\mathfrak{S}_A$ множества ранг матрицы (11) равен $m(m-1)/2-1$. Учитывая сделанное выше замечание, можем утверждать, что ранг матрицы (11) будет равен $m(m-1)/2-1$ для всех кортежей из некоторой окрестности $P(i)\times\ldots\times P(w)$. Запишем систему уравнений (17) для кортежа из этой окрестности. Максимальное число линейно независимых ненулевых решений системы (17), матрица которой есть матрица (11), равно числу неизвестных mn минус ранг матрицы системы $m(m-1)/2-1$, т. е. равно $n(n+1)/2$. Выпишем эти решения:

$$\left.\begin{aligned} dx^\mu(i) &= \lambda^\mu_\sigma(x^1(i),\ldots,x^n(i),\langle jk\ldots vw\rangle)\,d\alpha^\sigma,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ dx^\mu(w) &= \lambda^\mu_\sigma(x^1(w),\ldots,x^n(w),\langle ijk\ldots v\rangle)\,d\alpha^\sigma,\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

где, например, в выражении для $dx^\mu(i)$ предполагается зависимость не только от координат $x^1(i),\ldots,x^n(i)$ точки i, но и возможная зависимость от координат всех других точек, условно обозначенная кортежем $\langle jk\ldots\ldots vw\rangle$ длины $n+1=m-1$. Функции λ^μ_σ решения (21) линейно независимы по нижнему индексу σ в общем смысле и, конечно же, линейно независимы с постоянными коэффициентами. Покажем, что в каждом из выражений (21) для дифференциалов координат точек кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ могут присутствовать только координаты соответствующей точки, т. е. что, например, $dx^\mu(i)=\lambda^\mu_\sigma(i)\,d\alpha^\sigma$, как в решении (18). Возьмем кортеж $\langle jk\ldots vw\rangle$ длины $m-1$, полученный из первоначального кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle\in P(i)\times\ldots\times P(w)$ длины m опусканием точки i. Движение (21), естественно, сохраняет все упорядоченные взаимные расстояния для любого кортежа длины $m-1$ из окрестности $P(j)\times\ldots\ldots\times P(w)$. Выделим из системы уравнений (17) подсистему $(m-1)(m-2)/2$ уравнений, которые не включают в себя точки из окрестности $P(i)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial a(jk)}{\partial x^\mu(j)}\,dx^\mu(j)+\frac{\partial a(jk)}{\partial x^\mu(k)}\,dx^\mu(k)=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{\partial a(vw)}{\partial x^\mu(v)}\,dx^\mu(v)+\frac{\partial a(vw)}{\partial x^\mu(w)}\,dx^\mu(w)=0.\end{aligned}\right\}\tag{17'}$$

Предположим, что ранг матрицы подсистемы (17′) всюду в окрестности $P(j)\times\ldots\times P(w)$ меньше или равен $(m-1)(m-2)/2-1$, т. е. меньше числа уравнений в подсистеме. Но матрица подсистемы (17′) есть матрица Якоби подсистемы $(m-1)(m-2)/2$ функций

$$\left.\begin{aligned} a(jk) &= a(x^1(j),\ldots,x^n(j),x^1(k),\ldots,x^n(k)),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a(vw) &= a(x^1(v),\ldots,x^n(v),x^1(w),\ldots,x^n(w))\end{aligned}\right\}\tag{10'}$$

системы (10). По теореме о функциональной связи в предполагаемом случае найдется такая функция Φ_1 от $(m-1)(m-2)/2$ переменных с $\operatorname{grad}\Phi_1\neq 0$, что для подсистемы (10′) имеет место следующее уравнение:

$$\Phi_1(a(jk),\ \ldots,\ a(vw))=0.\tag{22}$$

Без ограничения общности можно считать, что отлична от нуля производная функции Φ_1 по переменной $a(jk)$, т. е. уравнение (22) может быть однозначно разрешено относительно этой переменной

$$a(jk) = \Gamma_1(a(jl), \ldots, a(jw), a(kl), \ldots, a(kw), \ldots, a(vw)), \qquad (22')$$

где точка l следует за k в исходном кортеже $\langle ijkl \ldots vw \rangle$. Заметим, что уравнения (22) и (22′) выполняются тождественно по переменным $x^1(j), \ldots, x^n(w)$. Подставим в уравнение (22′) все выражения (10′), кроме первого. В результате должно получиться локальное представление для $a(jk)$. Однако в это представление координаты $x^1(j), \ldots, x^n(j)$ и $x^1(k), \ldots, x^n(k)$ будут входить несущественным образом, так как по уравнению (22′) функция $a(jk)$ зависит только от $n-1$ переменной $a(jl), \ldots, a(jw)$, содержащих точку j, и $n-1$ переменной $a(kl), \ldots, a(kw)$, содержащих точку k, что противоречит условию III. Таким образом, ранг матрицы подсистемы уравнений (17′) в некоторой окрестности какого-то кортежа из $P(j) \times \ldots \times P(w)$ должен равняться своему максимальному значению $(m-1(m-2)/2$. В этом случае подсистема (17′) имеет $n(n+1)/2$ и не более линейно независимых ненулевых решений. В самом деле максимальное число таких решений равно числу неизвестных минус ранг матрицы подсистемы: $(m-1)n-(m-1)(m-2)/2 = (n+1)n-(n+1)n/2 = n(n+1)/2$, т. е. если из решений (21) исключить выражение для дифференциала $dx^\mu(i)$, то получим $n(n+1)/2$ линейно независимых ненулевых решений подсистемы (17′). Но в матрице подсистемы (17′) нет зависимости от координат точки i и потому ее решения без ограничения общности можно взять не зависящими от этих координат. Следовательно, можно найти такие решения (21) исходной системы (17), что координаты $x^1(i), \ldots$ $\ldots, x^m(i)$ будут входить только в выражение для дифференциала $dx^\mu(i)$. Перебирая последовательно все кортежи длины $m-1=n+1$ и исследуя аналогично соответствующие подсистемы уравнений системы (17), получим для некоторой окрестности какого-то кортежа из $P(i) \times \ldots$ $\ldots \times P(w)$ такие решения (21), которые могут быть записаны в форме (18). Рассматривая в решениях (18) дифференциальные коэффициенты $d\alpha^\sigma$ как $n(n+1)/2$ существенных и независимых параметров, получим такое движение этой окрестности, которое сохраняет все расстояния. Множество таких кортежей, очевидно, плотно в $\mathfrak{S}_A \subset \mathfrak{M}^m$, так как они существуют в любой окрестности кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$, где выполняется условие теоремы 2. Покажем теперь, что в решениях (18) функции λ^μ_σ линейно независимы по нижнему индексу σ с постоянными коэффициентами не только для всего кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$, но и для каждой отдельной точки этого кортежа. Действительно, пусть, например, преобразование окрестности $P(i)$, задаваемое первым выражением в решениях (18), зависит от параметра $d\alpha^\sigma$ несущественным образом. Это означает, что найдутся такие постоянные коэффициенты c^σ, не все равные нулю одновременно, что имеет место соотношение $c^\sigma \lambda^\mu_\sigma(i) = 0$. При этом, естественно, хотя бы для одной из остальных точек $j, k, \ldots, v, w$ будет иметь место неравенство $c^\sigma \lambda^\mu_\sigma \neq 0$, поскольку в решение (18) для всего кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$ параметры $d\alpha^\sigma$ входят существенным образом. Предположим, что для точки j: $c^\sigma \lambda^\mu_\sigma(j) \neq 0$. Тогда, подставляя выражения для $dx^\mu(i)$ и $dx^\mu(j)$ из решений (18) в первое уравнение системы (17), с учетом независимости параметров $d\alpha^\sigma$ получаем уравнения (16), а затем уравнение (16′), следствием которого является несущественная зависимость функции $a(ij)$ от координат $x^1(j), \ldots, x^n(j)$, противоречащая условию III. Значит, для каждой из точек кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$ должно быть $c^\sigma \lambda^\mu_\sigma = 0$, а это невозможно, так как в решение (18) параметры $d\alpha^\sigma$ входят существенным образом. Заметим, что в доказательстве линейной независимости с постоянными коэффициентами c^σ функций λ^μ_σ

для каждой из точек кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ ограничение $\sigma\leqslant n(n+1)/2$ не было использовано. Покажем дополнительно, что в движении (18) число параметров $d\alpha^\sigma$ не может превышать $n(n+1)/2$. Предположим обратное, т. е. что в решении (18) число существенных независимых параметров больше $n(n+1)/2$. Без ограничения общности можно предположить, что $\sigma\leqslant n(n+1)/2+1$, так как если существует движение с числом параметров больше $n(n+1)/2+1$, то необходимо существует движение с числом параметров, равным $n(n+1)/2+1$. Функции λ^μ_σ будут линейно независимы по нижнему индексу σ с постоянными коэффициентами для всего кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ и, как только что было показано, для каждой отдельной точки этого кортежа. Однако функции λ^μ_σ для кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ будут линейно зависимы с некоторыми переменными коэффициентами c^σ, так как система (17) имеет не более $n(n+1)/2$ линейно независимых в общем смысле ненулевых решений. Следовательно, должны выполняться соотношения (19), в которых суммирование по индексу σ будет происходить в пределах от 1 до $n(n+1)/2+1$. Повторяя почти дословно рассуждения, которые следовали за соотношениями (19) в доказательстве необходимости, приходим к противоречию: функции $\lambda^\mu_\sigma(j)$ линейно зависимы по нижнему индексу σ с некоторыми постоянными коэффициентами $\tilde{c}^\sigma$. Таким образом, движение (18) содержит $n(n+1)/2$ и не более существенных независимых параметров. Пусть $\langle i_0j_0\rangle$ произвольная пара из $\mathfrak{S}_a\subset\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ и $P(i_0)\times P(j_0)$ — любая ее окрестность. В области $\mathfrak{S}_A$ по предположению существует кортеж $\langle i_0j_0k_0\ldots v_0w_0\rangle$ длины $m=n+2$, содержащий пару $\langle i_0j_0\rangle$. В любой окрестности $P(i_0)\times P(j_0)\times\ldots\times P(w_0)$ этого кортежа, по доказанному выше, найдется такой кортеж $\langle ijk\ldots vw\rangle$, что существует движение (18) некоторой его окрестности $P(i)\times P(j)\times\ldots\times P(w)$, содержащее $n(n+1)/2$ и не более существенных независимых параметров, которое сохраняет все взаимные расстояния. Но тогда для пары $\langle ij\rangle\in P(i_0)\times P(j_0)$ движение ее окрестности $P(i)\times P(j)$ задается выражениями (15). Это движение сохраняет расстояние $a:P(i)\times P(j)\to R$, которое, следовательно, является двухточечным инвариантом. Поскольку $\mathrm{pr}_1\mathfrak{S}_a\cup\cup\mathrm{pr}_2\mathfrak{S}_a=\mathfrak{M}$, а множество пар $\langle ij\rangle$ плотно в $\mathfrak{S}_a$, плотным оказывается множество точек i, j в $\mathfrak{M}$, преобразование некоторых окрестностей $P(i)$, $P(j)$ которых, содержащие $n(n+1)/2$ и не более существенных независимых параметров, составляют группу локальных движений (15). Теорема 2 полностью доказана.

Итоговым результатом настоящей работы является установление эквивалентности феноменологической и групповой симметрии n-мерной геометрии расстояний. Эта эквивалентность непосредственно вытекает из доказанных выше двух теорем.

Теорема 3. *Для того чтобы функция $a:\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to R$ задавала на множестве $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную n-мерную геометрию расстояний ранга $m=n+2$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на $\mathfrak{M}$ n-мерную геометрию расстояний, наделенную групповой симметрией степени $n(n+1)/2$.*

В заключение отметим, что необходимое и достаточное условие теорем 1 и 2 о ранге отображения A можно было бы включить в определение n-мерной геометрии расстояний, которая была бы, с одной стороны, феноменологически симметрична, а с другой, была бы наделена групповой симметрией, причем обе симметрии были бы полностью эквивалентны.

г. Новосибирск

Статья поступила 15 июня 1982 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлагенская программа»).— В кн.: Об основаниях геометрии. М.: Гостехиздат, 1956, с. 402—434.
2. *Кулаков Ю. И.* Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур.— Докл. АН СССР, т. 193, № 5, 1970, с. 985—987.
3. *Кулаков Ю. И.* Элементы теории физических структур. Новосибирск: изд. Новосибирского ун-та, 1968.
4. *Гельмгольц Г.* О фактах, лежащих в основании геометрии.— В кн.: Об основаниях геометрии. М.: Гостехиздат, 1956, с. 366—388.
5. *Михайличенко Г. Г.* Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур.— В кн.: Кулаков Ю. И. Элементы теории физических структур. Дополнение. Новосибирск: изд. Новосибирского ун-та, 1968, с. 175—226.
6. *Михайличенко Г. Г.* Двумерные геометрии.— Докл. АН СССР, т. 260, № 4, 1981, с. 803—805.
7. *Пуанкаре А.* Об основных гипотезах геометрии.— В кн.: Об основаниях геометрии. М.: Гостехиздат, 1956, с. 388—398.