Определение 1.

Если алгебраическая система определена не на одном множестве A, а на нескольких $A_1, \ldots, A_n$, т.е. носитель алгебры состоит более чем из одного множества, то такая алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A_1, \ldots, A_n; \Omega \rangle$ называется многосортной (n–сортной)[a], где Ω — сигнатура алгебры $\mathfrak{A}$ (множество основных операций алгебры $\mathfrak{A}$).

[a] Иногда говорят *многоосновной* или *гетерогенной*.

Определение 1.

Если алгебраическая система определена не на одном множестве A, а на нескольких $A_1, \ldots, A_n$, т.е. носитель алгебры состоит более чем из одного множества, то такая алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A_1, \ldots, A_n; \Omega \rangle$ называется многосортной (n–сортной)[a], где Ω — сигнатура алгебры $\mathfrak{A}$ (множество основных операций алгебры $\mathfrak{A}$).

[a] Иногда говорят *многоосновной* или *гетерогенной*.

Определение 2.

Если в алгебре $\mathfrak{A}$ определены частичные операции $f_i^{(\tau)} \in \Omega$, действующие не на всём множестве, то такие алгебры называются частичными.

Например, если определён класс 3–х сорных алгебр $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^{mn-1} \to B$, то естественным образом определён и их гомоморфизм.

Например, если определён класс 3–х сорных алгебр $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^{mn-1} \to B$, то естественным образом определён и их гомоморфизм.

Определение 7.

Тройка отображений

$$\chi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}', \quad \lambda : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}', \quad \psi : B \to B'$$

задаёт гомоморфизм трёхсортной алгебры $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ в алгебру $\langle \mathfrak{M}', \mathfrak{N}', B'; f', g' \rangle$, если диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi \times \lambda"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\ \mathfrak{M}' \times \mathfrak{N}' \arrow[r, "f'"] & B' \end{tikzcd}$$

и

Например, если определён класс 3–х сорных алгебр $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^{mn-1} \to B$, то естественным образом определён и их гомоморфизм.

Определение 7.

Тройка отображений

$$\chi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}', \quad \lambda : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}', \quad \psi : B \to B'$$

задаёт гомоморфизм трёхсортной алгебры $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ в алгебру $\langle \mathfrak{M}', \mathfrak{N}', B'; f', g' \rangle$, если диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi \times \lambda"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\ \mathfrak{M}' \times \mathfrak{N}' \arrow[r, "f'"] & B' \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} B^{mn-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi^{mn-1}"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\ B'^{mn-1} \arrow[r, "g'"] & B' \end{tikzcd}$$

коммутативны.

Определение ФС ранга (2,2)

ФС ранга (2,2) это трёхсортная алгебра $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями, $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^3 \to B$
а) $\forall i, j \in \mathfrak{M}, \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ справедливо

$$f(i, \alpha) = g\left(f(i, \beta), f(j, \alpha), f(j, \beta)\right);$$

Определение ФС ранга (2,2)

ФС ранга (2,2) это трёхсортная алгебра $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями, $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^3 \to B$

a) $\forall i, j \in \mathfrak{M}, \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ справедливо

$$f(i, \alpha) = g\left(f(i, \beta), f(j, \alpha), f(j, \beta)\right);$$

b) $\forall \alpha \in \mathfrak{N}, a \in B, \exists! i \in \mathfrak{M}$ такой, что $f(i, \alpha) = a$;

c) $\forall i \in \mathfrak{M}, a \in B, \exists! \alpha \in \mathfrak{N}$ такой, что $f(i, \alpha) = a$.

Определение ФС ранга (2,2)

ФС ранга (2,2) это трёхсортная алгебра $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями, $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^3 \to B$
a) $\forall i, j \in \mathfrak{M}, \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ справедливо

$$f(i, \alpha) = g\left(f(i, \beta), f(j, \alpha), f(j, \beta)\right);$$

b) $\forall \alpha \in \mathfrak{N}, a \in B, \exists! i \in \mathfrak{M}$ такой, что $f(i, \alpha) = a$;
c) $\forall i \in \mathfrak{M}, a \in B, \exists! \alpha \in \mathfrak{N}$ такой, что $f(i, \alpha) = a$.

Фиксируя $k \in \mathfrak{M}, \gamma \in \mathfrak{N}$ можно перейти от $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ к изоморфной ФС $\langle B, B, B; f', g' \rangle$,

Определение ФС ранга (2,2)

ФС ранга (2,2) это трёхсортная алгебра $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями, $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^3 \to B$
a) $\forall i, j \in \mathfrak{M}, \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ справедливо

$$f(i, \alpha) = g\left(f(i, \beta), f(j, \alpha), f(j, \beta)\right);$$

b) $\forall \alpha \in \mathfrak{N}, a \in B, \exists! i \in \mathfrak{M}$ такой, что $f(i, \alpha) = a$;
c) $\forall i \in \mathfrak{M}, a \in B, \exists! \alpha \in \mathfrak{N}$ такой, что $f(i, \alpha) = a$.

Фиксируя $k \in \mathfrak{M}, \gamma \in \mathfrak{N}$ можно перейти от $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ к изоморфной ФС $\langle B, B, B; f', g' \rangle$, тогда аксиомы можно записать уже в виде:

Определение 2 ФС ранга (2,2)

a) $\forall x, y, u, v \in B$ справедливо $f(x,u) = g\left(f(x,v), f(y,u), f(y,v)\right)$;
b) $\forall y, z \in B, \exists! x \in B$ такой, что $f(x,y) = z$;
c) $\forall x, z \in B, \exists! y \in B$ такой, что $f(x,y) = z$.

Определение 2 ФС ранга (2,2)

a) $\forall x, y, u, v \in B$ справедливо $f(x,u) = g\left(f(x,v), f(y,u), f(y,v)\right)$;
b) $\forall y, z \in B, \exists! x \in B$ такой, что $f(x,y) = z$;
c) $\forall x, z \in B, \exists! y \in B$ такой, что $f(x,y) = z$.

Теорема Ионина

ФС ранга (2,2) взаимнооднозначно связана с группой $\left\langle B; \cdot, ^{-1}, e \right\rangle$ так, что

$$f(x,u) = x \cdot u,$$

$$g\left(x,y,z\right) = x \cdot z^{-1} \cdot y.$$

Определение ФС ранга (3,2)

ФС ранга (3,2) это трёхсортная алгебра $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^5 \to B$

а) $\forall i, j, k \in \mathfrak{M}, \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ справедливо

$$f(i, \alpha) = g\left(f(i, \beta), f(j, \alpha), f(j, \beta), f(k, \alpha), f(k, \beta)\right);$$

Определение ФС ранга (3,2)

ФС ранга (3,2) это трёхсортная алгебра $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^5 \to B$

a) $\forall i, j, k \in \mathfrak{M}, \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ справедливо

$$f(i, \alpha) = g\left(f(i, \beta), f(j, \alpha), f(j, \beta), f(k, \alpha), f(k, \beta)\right);$$

b) $\forall \alpha \in \mathfrak{N}, (a_1, a_2) \in \widehat{B^2} \subset B^2, \exists! \, (i, j) \in \widehat{\mathfrak{M}^2} \subset \mathfrak{M}^2$ такой, что $f(i, \alpha) = a_1, f(j, \alpha) = a_2$;

c) $\forall \, (i, j) \in \widehat{\mathfrak{M}^2}, (a_1, a_2) \in \widehat{B^2}, \exists! \alpha \in \mathfrak{N}$ такой, что $f(i, \alpha) = a_1, f(j, \alpha) = a_2$.

Определение ФС ранга (3,2)

ФС ранга (3,2) это трёхсортная алгебра $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^5 \to B$

a) $\forall i, j, k \in \mathfrak{M}, \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ справедливо

$$f(i, \alpha) = g\left(f(i, \beta), f(j, \alpha), f(j, \beta), f(k, \alpha), f(k, \beta)\right);$$

b) $\forall \alpha \in \mathfrak{N}, (a_1, a_2) \in \widehat{B^2} \subset B^2, \exists! \, (i, j) \in \widehat{\mathfrak{M}^2} \subset \mathfrak{M}^2$ такой, что $f(i, \alpha) = a_1, f(j, \alpha) = a_2$;

c) $\forall \, (i, j) \in \widehat{\mathfrak{M}^2}, (a_1, a_2) \in \widehat{B^2}, \exists! \alpha \in \mathfrak{N}$ такой, что $f(i, \alpha) = a_1, f(j, \alpha) = a_2$.

Фиксируя $k_1, k_2 \in \widehat{\mathfrak{M}^2}, \gamma \in \mathfrak{N}$ можно перейти от $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ к изоморфной ФС $\left\langle B, \widehat{B^2}, B; f', g' \right\rangle$, тогда аксиомы можно записать уже в виде:

Определение 2 ФС ранга (3,2)

ФС ранга (3,2) это трёхсортная алгебра $\left\langle B, \widehat{B^2}, B; f, g \right\rangle$ с операциями $f : B \times \widehat{B^2} \to B$, $g : B^5 \to B$

a) $\forall i, j, k \in B, \alpha, \beta \in \widehat{B^2}$ справедливо

$$f(i, \alpha) = g\left(f(i, \beta), f(j, \alpha), f(j, \beta), f(k, \alpha), f(k, \beta)\right);$$

b) $\forall \alpha, (a_1, a_2) \in \widehat{B^2}, \exists! \, (i, j) \in \widehat{B^2}$ такой, что $f(i, \alpha) = a_1, f(j, \alpha) = a_2$;

c) $\forall \, (i, j), (a_1, a_2) \in \widehat{B^2}, \exists! \alpha \in \widehat{B^2}$ такой, что $f(i, \alpha) = a_1, f(j, \alpha) = a_2$.

Определение 2 ФС ранга (3,2)

ФС ранга (3,2) это трёхсортная алгебра $\left\langle B, \widehat{B^2}, B; f, g \right\rangle$ с операциями $f : B \times \widehat{B^2} \to B$, $g : B^5 \to B$

a) $\forall i, j, k \in B, \alpha, \beta \in \widehat{B^2}$ справедливо

$$f(i, \alpha) = g\left(f(i, \beta), f(j, \alpha), f(j, \beta), f(k, \alpha), f(k, \beta)\right);$$

b) $\forall \alpha, (a_1, a_2) \in \widehat{B^2}, \exists! \, (i, j) \in \widehat{B^2}$ такой, что $f(i, \alpha) = a_1, f(j, \alpha) = a_2$;

c) $\forall \, (i, j), (a_1, a_2) \in \widehat{B^2}, \exists! \alpha \in \widehat{B^2}$ такой, что $f(i, \alpha) = a_1, f(j, \alpha) = a_2$.

Теорема ФС ранга (3,2)

ФС ранга (3,2) взаимнооднозначно связана с ограниченно точно 2–транзитивной группой преобразований $T_2(X)$ множества X.

Группа $G(M)$ называется транзитивной, если каждый элемент $x \in M$ может быть переведён в любой элемент $y \in M$ подходящим $g \in G$:

$$x \cdot g = y.$$

Группа $G(M)$ называется транзитивной, если каждый элемент $x \in M$ может быть переведён в любой элемент $y \in M$ подходящим $g \in G$:

$$x \cdot g = y.$$

Действие G на M индуцирует действие G на $M^n = M \times \ldots \times M$ по правилу $(m_1, \ldots, m_n) \cdot g = (m_1 \cdot g, \ldots, m_n \cdot g)$.

Группа $G(M)$ называется транзитивной, если каждый элемент $x \in M$ может быть переведён в любой элемент $y \in M$ подходящим $g \in G$:

$$x \cdot g = y.$$

Действие G на M индуцирует действие G на $M^n = M \times \ldots \times M$ по правилу $(m_1, \ldots, m_n) \cdot g = (m_1 \cdot g, \ldots, m_n \cdot g)$.
Определим множество

$$F(M, n) = \{(m_1, \ldots, m_n) \in M^n | m_i \neq m_j \text{ при } i \neq j\}.$$

Группа $G(M)$ называется транзитивной, если каждый элемент $x \in M$ может быть переведён в любой элемент $y \in M$ подходящим $g \in G$:

$$x \cdot g = y.$$

Действие G на M индуцирует действие G на $M^n = M \times \ldots \times M$ по правилу $(m_1, \ldots, m_n) \cdot g = (m_1 \cdot g, \ldots, m_n \cdot g)$.
Определим множество

$$F(M, n) = \{(m_1, \ldots, m_n) \in M^n | m_i \neq m_j \text{ при } i \neq j\}.$$

Определение

Группа $T_n(M)$ называется n-транзитивной, если для любых $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in F(M, n)$ существует такой элемент $g \in T_n$, что $(x_1, \ldots, x_n) \cdot g = (y_1, \ldots, y_n)$.

Рассмотрим некоторое непустое подмножество $N \subseteq F(M, n)$.

Рассмотрим некоторое непустое подмножество $N \subseteq F(M, n)$.

Определение n-транзитивности

Группа $T_n(M)$ называется N-ограниченно точно n-транзитивной, если для любых $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in N \subseteq F(M, n)$ существует единственный $g \in T_n$ такой, что $x_i \cdot g = y_i$ для $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим некоторое непустое подмножество $N \subseteq F(M,n)$.

Определение n-транзитивности

Группа $T_n(M)$ называется N-ограниченно точно n-транзитивной, если для любых $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in N \subseteq F(M,n)$ существует единственный $g \in T_n$ такой, что $x_i \cdot g = y_i$ для $i = 1,\ldots,n$.

Если $N = F(M,n)$, то $T_n(M)$ — *точно n-транзитивная группа*.

Рассмотрим некоторое непустое подмножество $N \subseteq F(M, n)$.

Определение n-транзитивности

Группа $T_n(M)$ называется N-ограниченно точно n-транзитивной, если для любых $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in N \subseteq F(M, n)$ существует единственный $g \in T_n$ такой, что $x_i \cdot g = y_i$ для $i = 1, \ldots, n$.

Если $N = F(M, n)$, то $T_n(M)$ — *точно n-транзитивная группа*. Соответственно, если $n = 2$, то

Определение 2-транзитивности

Группа $T_2(M)$ называется ограниченно точно 2-транзитивной, если для любых $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in N \subseteq F(M, 2)$ существует единственный $g \in T_2$ такой, что $(x_1, x_2) \cdot g = (y_1, y_2)$.

Рассмотрим некоторое непустое подмножество $N \subseteq F(M,n)$.

Определение n-транзитивности

Группа $T_n(M)$ называется N-ограниченно точно n-транзитивной, если для любых $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in N \subseteq F(M,n)$ существует единственный $g \in T_n$ такой, что $x_i \cdot g = y_i$ для $i = 1,\ldots,n$.

Если $N = F(M,n)$, то $T_n(M)$ — *точно n-транзитивная группа*. Соответственно, если $n = 2$, то

Определение 2-транзитивности

Группа $T_2(M)$ называется ограниченно точно 2-транзитивной, если для любых $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in N \subseteq F(M,2)$ существует единственный $g \in T_2$ такой, что $(x_1,x_2) \cdot g = (y_1,y_2)$.

Пример

Общая линейная группа $T_2 = GL_2(F)$ над полем F действует на множестве двумерных векторов $V = F^2$. Подмножество $N \subset V^2$ состоит из всех линейно независимых векторов.

Умножение в группе T_2 можно записать при помощи функции действия $f : M \times T_2 \to M$. Групповое умножение для элементов $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in T_2 = N \subseteq F(M, 2) \subset M^2$ запишется в виде

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (f(x_1, y_1, y_2), f(x_2, y_1, y_2)).$$

Умножение в группе T_2 можно записать при помощи функции действия $f : M \times T_2 \to M$. Групповое умножение для элементов $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in T_2 = N \subseteq F(M, 2) \subset M^2$ запишется в виде

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (f(x_1, y_1, y_2), f(x_2, y_1, y_2)).$$

Пусть (e_1, e_2) — нейтральный элемент группы T_2. Стабилизатор элемента e_2 это подгруппа

$$T_1 = \{g \in T_2 \mid e_2 \circ g = e_2\} = \{(x, e_2)\}.$$

Умножение в группе T_2 можно записать при помощи функции действия $f : M \times T_2 \to M$. Групповое умножение для элементов $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in T_2 = N \subseteq F(M, 2) \subset M^2$ запишется в виде

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (f(x_1, y_1, y_2), f(x_2, y_1, y_2)).$$

Пусть (e_1, e_2) — нейтральный элемент группы T_2. Стабилизатор элемента e_2 это подгруппа

$$T_1 = \{g \in T_2 \mid e_2 \circ g = e_2\} = \{(x, e_2)\}.$$

Элемент $(e_2, e_1) \in T_2$ инволютивный т.е. $(e_2, e_1) \circ (e_2, e_1) = (e_1, e_2)$.

Лемма

Группа T_2 порождается подгруппой T_1 и элементом $A = (e_2, e_1)$: $T_2 = \langle T_1, A \rangle$.

Лемма

Для произвольного $x \in T_1$ существуют единственные $y, z \in T_1$ для которых справедливо тождество

$$AxA = yAz.$$

Лемма

Для произвольного $x \in T_1$ существуют единственные $y, z \in T_1$ для которых справедливо тождество

$$AxA = yAz.$$

Лемма

Для почти произвольных $x, y \in T_1$ справедливо тождество

$$\varphi\left(\varphi_2(x)\varphi_2(y)\right) = \varphi_2\left(x\varphi_2(y^{-1})\right)y,$$

где $\varphi_2(x) = f(x, A)$

Лемма

Для произвольного $x \in T_1$ существуют единственные $y, z \in T_1$ для которых справедливо тождество

$$AxA = yAz.$$

Лемма

Для почти произвольных $x, y \in T_1$ справедливо тождество

$$\varphi\left(\varphi_2(x)\varphi_2(y)\right) = \varphi_2\left(x\varphi_2(y^{-1})\right)y,$$

где $\varphi_2(x) = f(x, A)$ так, что функция

$$f(x, y, z) = \varphi_2\left(x\varphi_2(yz^{-1})\right)z$$

Лемма

Для произвольного $x \in T_1$ существуют единственные $y, z \in T_1$ для которых справедливо тождество

$$AxA = yAz.$$

Лемма

Для почти произвольных $x, y \in T_1$ справедливо тождество

$$\varphi\left(\varphi_2(x)\varphi_2(y)\right) = \varphi_2\left(x\varphi_2(y^{-1})\right)y,$$

где $\varphi_2(x) = f(x, A)$ так, что функция

$$f(x, y, z) = \varphi_2\left(x\varphi_2(yz^{-1})\right)z = \varphi_2\left(f_1(x, \varphi_2(yz^{-1}))\right)z.$$

Пару (T_1, φ_2) будем назвать 2–псевдополем, оно связано с обычными полями, почти–полями и почти–кольцами, почти–областями, если ввести вторую бинарную операцию

$$x \oplus y = \varphi_2 \left(x \cdot ((-1) \cdot y)^{-1} \right) y.$$

Пару (T_1, φ_2) будем назвать 2–псевдополем, оно связано с обычными полями, почти–полями и почти–кольцами, почти–областями, если ввести вторую бинарную операцию

$$x \oplus y = \varphi_2\left(x \cdot ((-1) \cdot y)^{-1}\right) y.$$

Пример

Для $T_1 = F^*$ имеется решение $\varphi_2(x) = 1 - x$ так, что $T_2 = \langle T_1, \varphi_2 \rangle \simeq F \leftthreetimes F^*$.

Пару (T_1, φ_2) будем назвать 2–псевдополем, оно связано с обычными полями, почти–полями и почти–кольцами, почти–областями, если ввести вторую бинарную операцию

$$x \oplus y = \varphi_2\left(x \cdot ((-1) \cdot y)^{-1}\right) y.$$

Пример

Для $T_1 = F^*$ имеется решение $\varphi_2(x) = 1 - x$ так, что $T_2 = \langle T_1, \varphi_2 \rangle \simeq F \leftthreetimes F^*$.
Для $T_1 = F \leftthreetimes F^*$ имеется решение $\varphi_2(x, y) = (y, x)$ так, что $T_2 = \langle T_1, \varphi_2 \rangle \simeq GL_2(F)$.

Определение ФС ранга (n,2)

ФС ранга (n,2) это трёхсортная алгебра $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^{2n-1} \to B$

а) $\forall i_1, \ldots, i_n \in \mathfrak{M}, \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ справедливо

$$f(i_1, \alpha) = g\left(f(i_1, \beta), \ldots, f(i_n, \beta)\right);$$

Определение ФС ранга (n,2)

ФС ранга (n,2) это трёхсортная алгебра $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^{2n-1} \to B$

a) $\forall i_1, \ldots, i_n \in \mathfrak{M}, \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ справедливо

$$f(i_1, \alpha) = g\left(f(i_1, \beta), \ldots, f(i_n, \beta)\right);$$

b) $\forall \alpha \in \mathfrak{N}, (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \widehat{B^{n-1}} \subset B^{n-1}$,

Определение ФС ранга (n,2)

ФС ранга (n,2) это трёхсортная алгебра $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^{2n-1} \to B$

a) $\forall i_1, \ldots, i_n \in \mathfrak{M}, \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ справедливо

$$f(i_1, \alpha) = g\left(f(i_1, \beta), \ldots, f(i_n, \beta)\right);$$

b) $\forall \alpha \in \mathfrak{N}, (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \widehat{B^{n-1}} \subset B^{n-1}$,
$\exists! \, (i_1, \ldots, i_{n-1}) \in \widehat{\mathfrak{M}^{n-1}} \subset \mathfrak{M}^{n-1}$

Определение ФС ранга (n,2)

ФС ранга (n,2) это трёхсортная алгебра $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^{2n-1} \to B$

a) $\forall i_1, \ldots, i_n \in \mathfrak{M}, \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ справедливо

$$f(i_1, \alpha) = g\left(f(i_1, \beta), \ldots, f(i_n, \beta)\right);$$

b) $\forall \alpha \in \mathfrak{N}, (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \widehat{B^{n-1}} \subset B^{n-1}$,
$\exists! \, (i_1, \ldots, i_{n-1}) \in \widehat{\mathfrak{M}^{n-1}} \subset \mathfrak{M}^{n-1}$
такой, что $f(i_k, \alpha) = a_k$ где $k \in \{1, \ldots, n-1\}$;

Определение ФС ранга (n,2)

ФС ранга (n,2) это трёхсортная алгебра $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ с операциями $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$, $g : B^{2n-1} \to B$

a) $\forall i_1, \ldots, i_n \in \mathfrak{M}, \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ справедливо

$$f(i_1, \alpha) = g\left(f(i_1, \beta), \ldots, f(i_n, \beta)\right);$$

b) $\forall \alpha \in \mathfrak{N}, (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \widehat{B^{n-1}} \subset B^{n-1}$,
$\exists! \, (i_1, \ldots, i_{n-1}) \in \widehat{\mathfrak{M}^{n-1}} \subset \mathfrak{M}^{n-1}$
такой, что $f(i_k, \alpha) = a_k$ где $k \in \{1, \ldots, n-1\}$;

c) $\forall \, (i_1, \ldots, i_{n-1}) \in \widehat{\mathfrak{M}^{n-1}}, (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \widehat{B^{n-1}}$,
$\exists! \alpha \in \mathfrak{N}$ такой, что $f(i_k, \alpha) = a_k$ где $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Фиксируя $k_1, \dots k_{n-1} \in \widehat{\mathfrak{M}^{n-1}}, \gamma \in \mathfrak{N}$ можно перейти от $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ к изоморфной ФС $\left\langle B, \widehat{B^{n-1}}, B; f', g' \right\rangle$ и тогда переписать аксиомы аналогично случаю ФС ранга (3,2).

Фиксируя $k_1, \dots k_{n-1} \in \widehat{\mathfrak{M}^{n-1}}, \gamma \in \mathfrak{N}$ можно перейти от $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ к изоморфной ФС $\left\langle B, \widehat{B^{n-1}}, B; f', g' \right\rangle$ и тогда переписать аксиомы аналогично случаю ФС ранга (3,2).

Теорема ФС ранга (n,2)

ФС ранга (n,2) взаимнооднозначно связана с ограниченно точно $n-1$–транзитивной группой преобразований $T_{n-1}(X)$ множества X.

Фиксируя $k_1, \dots k_{n-1} \in \widehat{\mathfrak{M}^{n-1}}, \gamma \in \mathfrak{N}$ можно перейти от $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B; f, g \rangle$ к изоморфной ФС $\left\langle B, \widehat{B^{n-1}}, B; f', g' \right\rangle$ и тогда переписать аксиомы аналогично случаю ФС ранга (3,2).

Теорема ФС ранга (n,2)

ФС ранга (n,2) взаимнооднозначно связана с ограниченно точно $n-1$–транзитивной группой преобразований $T_{n-1}(X)$ множества X.

Саму группу T_{n-1} можно записать при помощи функции действия $f : M \times T_{n-1} \to M$. Тогда групповое умножение для $(x_1, \dots, x_{n-1}), (y_1, \dots, y_{n-1}) \in T_{n-1} = \widehat{B^{n-1}}$ запишется в виде

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \circ (y_1, \dots, y_{n-1}) = \\ (f(x_1, y_1, \dots, y_{n-1}), \dots, f(x_2, y_1, \dots, y_{n-1})).$$

Пусть $E = (e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1})$ — нейтральный элемент группы T_{n-1}. Стабилизатор элемента e_{n-1} это подгруппа T_{n-2}. Элемент $A_{n-1} = (e_{n-1}, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_1) \in T_{n-1}$ инволютивный т.е. $A_{n-1}^2 = E$.

Пусть $E = (e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1})$ — нейтральный элемент группы T_{n-1}. Стабилизатор элемента e_{n-1} это подгруппа T_{n-2}. Элемент $A_{n-1} = (e_{n-1}, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_1) \in T_{n-1}$ инволютивный т.е. $A_{n-1}^2 = E$.

Лемма

Группа $T_{n-1} = \langle T_{n-2}, A_{n-1} \rangle$ порождается подгруппой T_{n-2} и элементом A_{n-1}.

Пусть $E = (e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1})$ — нейтральный элемент группы T_{n-1}. Стабилизатор элемента e_{n-1} это подгруппа T_{n-2}. Элемент $A_{n-1} = (e_{n-1}, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_1) \in T_{n-1}$ инволютивный т.е. $A_{n-1}^2 = E$.

Лемма

Группа $T_{n-1} = \langle T_{n-2}, A_{n-1} \rangle$ порождается подгруппой T_{n-2} и элементом A_{n-1}.

Лемма

Для почти произвольных $x, y \in T_1$ справедливо тождество

$$\varphi_{n-1}\left(\varphi_{n-1}(x)\varphi_{n-1}(y)\right) = \varphi_{n-1}\left(x\varphi_{n-1}(y^{-1})\right) y,$$

где $\varphi_{n-1}(x) = f_{n-1}(x, A_{n-1})$

Пусть $E = (e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1})$ — нейтральный элемент группы T_{n-1}. Стабилизатор элемента e_{n-1} это подгруппа T_{n-2}. Элемент $A_{n-1} = (e_{n-1}, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_1) \in T_{n-1}$ инволютивный т.е. $A_{n-1}^2 = E$.

Лемма

Группа $T_{n-1} = \langle T_{n-2}, A_{n-1} \rangle$ порождается подгруппой T_{n-2} и элементом A_{n-1}.

Лемма

Для почти произвольных $x, y \in T_1$ справедливо тождество

$$\varphi_{n-1}\left(\varphi_{n-1}(x)\varphi_{n-1}(y)\right) = \varphi_{n-1}\left(x\varphi_{n-1}(y^{-1})\right) y,$$

где $\varphi_{n-1}(x) = f_{n-1}(x, A_{n-1})$ и функции φ_k порождают симметрическую группу $S_{n-1} = \langle \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1} \rangle$.

Пусть $E = (e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1})$ — нейтральный элемент группы T_{n-1}. Стабилизатор элемента e_{n-1} это подгруппа T_{n-2}. Элемент $A_{n-1} = (e_{n-1}, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_1) \in T_{n-1}$ инволютивный т.е. $A_{n-1}^2 = E$.

Лемма

Группа $T_{n-1} = \langle T_{n-2}, A_{n-1} \rangle$ порождается подгруппой T_{n-2} и элементом A_{n-1}.

Лемма

Для почти произвольных $x, y \in T_1$ справедливо тождество

$$\varphi_{n-1}\left(\varphi_{n-1}(x)\varphi_{n-1}(y)\right) = \varphi_{n-1}\left(x\varphi_{n-1}(y^{-1})\right) y,$$

где $\varphi_{n-1}(x) = f_{n-1}(x, A_{n-1})$ и функции φ_k порождают симметрическую группу $S_{n-1} = \langle \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1} \rangle$.Функция действия

$$f_{n-1}(x, y_1, \ldots, y_{n-1}) = \varphi_{n-1}\left(f_{n-2}\left(x, \varphi_{n-1}(y_1 y_{n-1}^{-1}), \ldots, \varphi_{n-1}(y_{n-2} y_{n-1}^{-1})\right)\right) y.$$

Набор $(T_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ можно назвать $(n-1)$–псевдополем.

Набор $(T_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ можно назвать $(n-1)$–псевдополем.
При помощи элементов $\Sigma_k \in T_{n-1}$ с переставленными в единичном наборе $(e_1, e_3, \ldots, e_{n-1})$ элементами e_k и e_{n-1} получим ещё один набор инволютивных элементов $\Sigma_k \in T_{n-1}$, где $k \in \{2, \ldots, n-2\}$.

Набор $(T_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ можно назвать $(n-1)$–псевдополем. При помощи элементов $\Sigma_k \in T_{n-1}$ с переставленными в единичном наборе $(e_1, e_3, \ldots, e_{n-1})$ элементами e_k и e_{n-1} получим ещё один набор инволютивных элементов $\Sigma_k \in T_{n-1}$, где $k \in \{2, \ldots, n-2\}$. Они задают внешнюю группу автоморфизмов группы T_1. Для произвольных $x, y \in T_1$ справедливо $x^{\Sigma_k} \cdot y^{\Sigma_k} = (x \cdot y)^{\Sigma_k}$.

Набор $(T_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ можно назвать $(n-1)$–псевдополем. При помощи элементов $\Sigma_k \in T_{n-1}$ с переставленными в единичном наборе $(e_1, e_3, \ldots, e_{n-1})$ элементами e_k и e_{n-1} получим ещё один набор инволютивных элементов $\Sigma_k \in T_{n-1}$, где $k \in \{2, \ldots, n-2\}$. Они задают внешнюю группу автоморфизмов группы T_1. Для произвольных $x, y \in T_1$ справедливо $x^{\Sigma_k} \cdot y^{\Sigma_k} = (x \cdot y)^{\Sigma_k}$. Построим по Σ_k соответствующие функции

$$\sigma_k(x) = f_{n-1}(x, \Sigma_k),$$

для которых так же справедливо равенство

$$\sigma_k(x) \cdot \sigma_k(y) = \sigma_k(x \cdot y),$$

Набор $(T_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ можно назвать $(n-1)$–псевдополем. При помощи элементов $\Sigma_k \in T_{n-1}$ с переставленными в единичном наборе $(e_1, e_3, \ldots, e_{n-1})$ элементами e_k и e_{n-1} получим ещё один набор инволютивных элементов $\Sigma_k \in T_{n-1}$, где $k \in \{2, \ldots, n-2\}$. Они задают внешнюю группу автоморфизмов группы T_1. Для произвольных $x, y \in T_1$ справедливо $x^{\Sigma_k} \cdot y^{\Sigma_k} = (x \cdot y)^{\Sigma_k}$. Построим по Σ_k соответствующие функции

$$\sigma_k(x) = f_{n-1}(x, \Sigma_k),$$

для которых так же справедливо равенство

$$\sigma_k(x) \cdot \sigma_k(y) = \sigma_k(x \cdot y),$$

причём $\varphi_k = \sigma_k \varphi_2 \sigma_k$ и

$$\sigma_k = \varphi_2 \varphi_k \varphi_2 = \varphi_k \varphi_2 \varphi_k.$$

Ю.И. Кулаков в 1988 г. сформулировал гипотезу:

Ю.И. Кулаков в 1988 г. сформулировал гипотезу:

Гипотеза Кулакова

Всякая физическая структура ранга $(m+1, n+1)$ $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}; f, g \rangle$ вложима в физическую структуру ранга $(2, 2)$ $\left\langle \mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R}^{mn}; \widetilde{f}, \widetilde{g} \right\rangle$, но построенную над матрицами $\mathbb{R}^{mn}$.

Ю.И. Кулаков в 1988 г. сформулировал гипотезу:

Гипотеза Кулакова

Всякая физическая структура ранга $(m+1, n+1)$ $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}; f, g \rangle$ вложима в физическую структуру ранга $(2,2)$ $\left\langle \mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R}^{mn}; \widetilde{f}, \widetilde{g} \right\rangle$, но построенную над матрицами $\mathbb{R}^{mn}$.

Теорема

Физическая структура $\langle M, N, B; f, g \rangle$ ранга $(m+1, n+1)$ вложима в соответствующую физическую структуру $\left\langle M^m, N^n, B^{mn}; \widetilde{f}, \widetilde{g} \right\rangle$ ранга $(2,2)$.

Аксиомы псевдоматричного умножения

AM1. Для произвольных: матрицы $A \in G$ и столбца $C^j \in \Sigma_R$, существует единственный столбец $B^j \in \Sigma_R$, для которого справедливо равенство $A \cdot_f B^j = C^j$;

Аксиомы псевдоматричного умножения

AM1. Для произвольных: матрицы $A \in G$ и столбца $C^j \in \Sigma_R$, существует единственный столбец $B^j \in \Sigma_R$, для которого справедливо равенство $A \cdot_f B^j = C^j$;

AM2. Для произвольных: матрицы $B \in G$ и строки $C_i \in \Omega_R$, существует единственная строка $A_i \in \Omega_R$, для которой справедливо равенство $A_i \cdot_f B = C_i$;

Аксиомы псевдоматричного умножения

AM1. Для произвольных: матрицы $A \in G$ и столбца $C^j \in \Sigma_R$, существует единственный столбец $B^j \in \Sigma_R$, для которого справедливо равенство $A \cdot_f B^j = C^j$;
AM2. Для произвольных: матрицы $B \in G$ и строки $C_i \in \Omega_R$, существует единственная строка $A_i \in \Omega_R$, для которой справедливо равенство $A_i \cdot_f B = C_i$;
AM3. Умножение матриц ассоциативно. Иными словами, для произвольных $A, B, C \in G$ справедливо равенство $(A \cdot_f B) \cdot_f C = A \cdot_f (B \cdot_f C)$.

Над множеством $B = \mathbb{R}$ одно решение $f(x, y) = x \cdot y$;

Над множеством $B = \mathbb{R}$ одно решение $f(x, y) = x \cdot y$;
Над $B = \mathbb{R}^2$ имеется два решения:
1. $\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Над множеством $B = \mathbb{R}$ одно решение $f(x, y) = x \cdot y$;
Над $B = \mathbb{R}^2$ имеется два решения:
1. $\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
Над $B = \mathbb{R}^3$ семь решений:
1. $\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & {x_3}^p & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $p \in [-1, 1]$
3. $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 4. $\begin{pmatrix} x_3 & -x_3 \ln(x_3) & x_1 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
5. $\begin{pmatrix} e^{\gamma x_3} \cos(x_3) & e^{\gamma x_3} \sin(x_3) & x_1 \\ -e^{\gamma x_3} \sin(x_3) & e^{\gamma x_3} \cos(x_3) & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma \in [0, \infty)$,
6. $\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 1$; 7. $\det \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = 1$.

Аддитивная группа $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ обладает однопараметрическим автоморфизмом: $(x, y)^a = (ax, a^p y)$, тогда группа $G_2 = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \leftthreetimes \mathbb{R}_0$. Группы G_3, G_4 и G_5 строятся совершенно аналогично, но используются другие автоморфизмы аддитивной группы $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, а именно:

$$G_3: \quad (x_1, x_2)^a = (x_1 + x_2 a, x_2)$$

$$G_4: \quad (x, y)^a = (ax, a(y - x \ln |a|))$$

$$G_5: \quad (x, y)^a = ((x \cos(a) - y \sin(a))e^{\gamma a}, (x \sin(a) + y \cos(a))e^{\gamma a}).$$

Над $B = \mathbb{R}^4$ имеется пятнадцать решений

$$\begin{pmatrix} x_4^{\varepsilon} & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & x_4^{k} & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_4^{c} & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} e^{cx_4} & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & e^{kx_4}\cos(x_4) & e^{kx_4}\sin(x_4) & x_2 \\ 0 & -e^{kx_4}\sin(x_4) & e^{kx_4}\cos(x_4) & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} e^{\varepsilon x_4} & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & e^{cx_4} & -x_4 e^{cx_4} & x_2 \\ 0 & 0 & e^{cx_4} & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & x_4 & \frac{1}{2}x_4^2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_4 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} e^{x_4} & e^{x_4}-1 & e^{x_4}-x_4-1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & (e^{kx_4}-1)k^{-1} & \left(kx_4e^{kx_4}-e^{kx_4}+1\right)k^{-2} & x_3 \\ 0 & e^{kx_4} & x_4e^{kx_4} & x_2 \\ 0 & 0 & e^{kx_4} & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} e^{x_4} & x_4e^{x_4} & \frac{k}{2}x_4^2e^{x_4} & x_1 \\ 0 & e^{x_4} & kx_4e^{x_4} & x_2 \\ 0 & 0 & e^{x_4} & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_4^c & x_3 & x_1 \\ 0 & x_4 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & x_4 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} e^{x_3}\cos(x_4) & e^{x_3}\sin(x_4) & x_1 \\ -e^{x_3}\sin(x_4) & e^{x_3}\cos(x_4) & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Над $\mathbb{R}$ имеется одно 3–псевдополе $(\mathbb{R}, \varphi_2, \sigma_3)$, где

$$\sigma_3(x) = x^{-1}, \varphi_2(x) = 1 - x,$$

бинарная операция — обычное умножение на $\mathbb{R}$.

Над $\mathbb{R}$ имеется одно 3–псевдополе $(\mathbb{R}, \varphi_2, \sigma_3)$, где

$$\sigma_3(x) = x^{-1}, \varphi_2(x) = 1 - x,$$

бинарная операция — обычное умножение на $\mathbb{R}$.
Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ имеется четыре 2–псевдополя со следующими операциями

Над $\mathbb{R}$ имеется одно 3–псевдополе $(\mathbb{R}, \varphi_2, \sigma_3)$, где

$$\sigma_3(x) = x^{-1}, \varphi_2(x) = 1 - x,$$

бинарная операция — обычное умножение на $\mathbb{R}$.
Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ имеется четыре 2–псевдополя со следующими операциями
1. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + \varepsilon x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$,
$\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, -x_2)$;

Над $\mathbb{R}$ имеется одно 3–псевдополе $(\mathbb{R}, \varphi_2, \sigma_3)$, где

$$\sigma_3(x) = x^{-1}, \varphi_2(x) = 1 - x,$$

бинарная операция — обычное умножение на $\mathbb{R}$.
Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ имеется четыре 2–псевдополя со следующими операциями
1. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + \varepsilon x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$,
$\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, -x_2)$;
2. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 |y_1|^c)$, $c \in [0; 1)$,
$\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, x_2)$;

Над $\mathbb{R}$ имеется одно 3–псевдополе $(\mathbb{R}, \varphi_2, \sigma_3)$, где

$$\sigma_3(x) = x^{-1}, \varphi_2(x) = 1 - x,$$

бинарная операция — обычное умножение на $\mathbb{R}$.
Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ имеется четыре 2–псевдополя со следующими операциями
1. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + \varepsilon x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$,
$\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, -x_2)$;
2. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 |y_1|^c)$, $c \in [0; 1)$,
$\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, x_2)$;
3. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1^2 + (x_1 - 1) x_1 y_1^2 \ln |y_1|)$,
$\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, x_2)$;

Над $\mathbb{R}$ имеется одно 3–псевдополе $(\mathbb{R}, \varphi_2, \sigma_3)$, где

$$\sigma_3(x) = x^{-1}, \varphi_2(x) = 1 - x,$$

бинарная операция — обычное умножение на $\mathbb{R}$.
Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ имеется четыре 2–псевдополя со следующими операциями
1. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + \varepsilon x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$,
$\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, -x_2)$;
2. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 |y_1|^c)$, $c \in [0; 1)$,
$\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, x_2)$;
3. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1^2 + (x_1 - 1) x_1 y_1^2 \ln |y_1|)$,
$\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, x_2)$;
4. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.

Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ имеется одна ФС ранга (5,2):
$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$, $\quad \varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2)$,
$\sigma_3(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2 x_1^{-1})$, $\quad \sigma_4(x_1, x_2) = (x_1 x_2^{-1}, x_2^{-1})$.

Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ имеется одна ФС ранга (5,2):
$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2)$,
$\sigma_3(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2 x_1^{-1})$, $\sigma_4(x_1, x_2) = (x_1 x_2^{-1}, x_2^{-1})$.
Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ имеется три решения ФС ранга (4,2) со следующими операциями
1.1. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2)$,
$\sigma_3(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2^{-1})$; + 2.

Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ имеется одна ФС ранга (5,2):
$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2)$,
$\sigma_3(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2 x_1^{-1})$, $\sigma_4(x_1, x_2) = (x_1 x_2^{-1}, x_2^{-1})$.
Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ имеется три решения ФС ранга (4,2) со следующими операциями
1.1. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2)$,
$\sigma_3(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2^{-1})$; + 2.
1.2. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$,
$\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, -x_2)$, $\sigma_3(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2})$;

Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ имеется одна ФС ранга (5,2):
$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2)$,
$\sigma_3(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2 x_1^{-1})$, $\sigma_4(x_1, x_2) = (x_1 x_2^{-1}, x_2^{-1})$.
Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ имеется три решения ФС ранга (4,2) со следующими операциями
1.1. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2)$,
$\sigma_3(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2^{-1})$; + 2.
1.2. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$,
$\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, -x_2)$, $\sigma_3(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2})$;
1.3. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, y_1 + y_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, -\frac{x_1 x_2}{1 - x_1})$,
$\sigma_3(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, -x_2)$;

Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ имеется одна ФС ранга (5,2):
$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2)$,
$\sigma_3(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2x_1^{-1})$, $\sigma_4(x_1, x_2) = (x_1x_2^{-1}, x_2^{-1})$.
Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ имеется три решения ФС ранга (4,2) со следующими операциями
1.1. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2)$,
$\sigma_3(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2^{-1})$; + 2.
1.2. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$,
$\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, -x_2)$, $\sigma_3(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2})$;
1.3. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1, y_1 + y_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, -\frac{x_1x_2}{1-x_1})$,
$\sigma_3(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, -x_2)$;
4. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2)$,
$\varphi_2(x_1, x_2) = (x_2, x_1), \sigma_3(x_1, x_2) = (x_1, 1 - x_1 - x_2)$.